நவீன இயற்கணிதம்

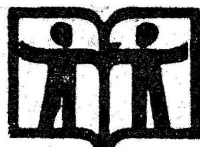
(பட்டப் படிப்பிற்குரியது)

ஆசிரியர்

ஏ. எஸ். குமாரசாமி,

துணைப் பேராசிரியர், கணிதத்துறை,

புதுக் கல்லூரி, சென்னை.





தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

First Edition—December, 1972

T.N.T.B.S. (C.P.) No. 384

MODERN ALGEBRA

A. S. KUMARASAMY

Price Rs. 11-90

'Published by The Tamil Nadu Text Book Society under the Centrally sponsored Scheme of Production of books and literature in regional languages at the University level, of the Government of India in the Ministry of Education and Social Welfare (Department of Culture), New Delhi.'

Printed by
Muthukumaran Press,
Madras-1.

அணிந்துரை

திரு. இரா. நெடுஞ்செழியன்
(தமிழகக் கல்வி-உள்ளாட்சித்துறை அமைச்சர்)

தமிழைக் கல்லூரிக் கல்வி மொழியாக ஆக்கிப் பன்னிரண்டாண்டுகள் ஆகிவிட்டன. குறிப்பிட்ட சில கல்லூரிகளில் பி.ஏ. வகுப்பு மாணவர்கள் தங்கள் பாடங்கள் அனைத்தையும் தமிழிலேயே கற்றுவந்தனர். 1968ஆம் ஆண்டின் தொடக்கத்தில் புகுமுக வகுப்பிலும் (P.U.C.), 1969ஆம் ஆண்டிலிருந்து பட்டப் படிப்பு வகுப்புகளிலும் அறிவியல் பாடங்களையும் தமிழிலேயே கற்பிக்க ஏற்பாடு செய்துள்ளோம். தமிழிலேயே கற்பிப்போம் என முன்வந்துள்ள கல்லூரி ஆசிரியர்களின் ஊக்கம், பிற பல துறைகளிலும் தொண்டு செய்வோர் இதற்கெனத் தந்த உழைப்பு, தங்கள் சிறப்புத் துறைகளில் நூல்கள் எழுதித் தர முன்வந்த நூலாசிரியர்கள் தொண்டுணர்ச்சி இவற்றின் காரணமாக இத் திட்டம் நம்மிடையே மகிழ்ச்சியும் மன நிறைவும் தரத்தக்க வகையில் நடைபெற்று வருகிறது. இவ்வகையில், கல்லூரிப் பேராசிரியர்கள் கலை, அறிவியல் பாடங்களை மாணவர்க்குத் தமிழிலேயே பயிற்றுவிப்பதற்குத் தேவையான பயிற்சியைப் பெறுவதற்கு மதுரைப் பல்கலைக்கழகம் ஆண்டுதோறும் எடுத்துவரும் பெரு முயற்சியைக் குறிப்பிட்டுச் சொல்லவேண்டும்.

பல துறைகளில் பணிபுரியும் பேராசிரியர்கள் எத்தனையோ நெருக்கடிகளுக்கிடையே குறுகிய காலத்தில் அரிய முறையில் நூல்கள் எழுதித் தந்துள்ளனர்.

வரலாறு, அரசியல், உளவியல், பொருளாதாரம், தத்துவம், புவியியல், புவியமைப்பியல், மனையியல், கணிதம், இயற்பியல், வேதியியல், உயிரியல், வானியல், புள்ளியியல், விலங்கியல், தாவரவியல், பொறியியல் ஆகிய எல்லாத் துறைகளிலும் தனி நூல்கள், மொழிபெயர்ப்பு நூல்கள் என்ற இருவகையிலும் தமிழ் நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம் வெளியிட்டுவருகிறது.

இவற்றுள் ஒன்றான '**நவீன இயற்கணிதம்**' என்ற இந் நூல் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனத்தின் **384** ஆவது வெளியீடாகும். இதுவரை **419** நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன. இந்நூல் மைய அரசு கல்வி, சமூக நல அமைச்சகத்தின் மாநில மொழியில் பல்கலைக் கழக நூல்கள் வெளியிடும் திட்டத்தின்கீழ் வெளியிடப் படுகிறது.

உழைப்பின் வாரா உறுதிகள் இல்லை ; ஆதலின், உழைத்து, வெற்றி காண்போம். தமிழைப் பயிலும் மாணவர்கள் உலக மாணவர்களிடையே சிறந்த இடம் பெற வேண்டும். அதுவே தமிழன்னையின் குறிக்கோளுமாகும். தமிழ்நாட்டுப் பல்கலைக் கழகங்களின் பல்வகை உதவிகளுக்கும் ஒத்துழைப்புக்கும் நம் மனம் கலந்த நன்றி உரியதாகுக.

இரா. நெடுஞ்செழியன்

பொருளடக்கம்

1. கண இயல்

(SET ALGEBRA)

1·1. முன்னுரை

அமெரிக்கக் கணித நிபுணர் **பால் ஹால்மாஸ்** (Paul Halmos) என்பார் கணவியயலின் அவசியத்தை, 'கணிதத்திலே புலமை பெற்றவன் எவனுக்கும் கண இயல் (Set Algebra) தெரிந்திருக்க வேண்டும் என்பது ஒவ்வொரு கணித நிபுணனும் ஒப்புக்கொண்ட உண்மை' என்று உணர்த்துகிறார். கணிதத்தில் புதைந்து கிடக்கும் கருவூலங்களை ஆழ்ந்து அனுபவிக்க வேண்டுமானால், கணிதத்தின் அடிப்படைத் தத்துவங்களில் ஒன்றான கண இயலை அறிதல் வேண்டும். சிக்கலான அறிமுறைகள் பல கண இயலால் தெளிவாக்கப்பட்டிருக்கின்றன. கண இயலுக்கு வித்திட்டவர் **கேயோர்க் கேன்டார்** (Georg Cantor, 1845-1918) என்னும் ஜெர்மானியக் கணித மேதையாவார்.

1·2. கணங்கள் (Sets)

வாழ்க்கை நடைமுறையில் சில சொற்கள் விளக்கமின்றியே நமக்குப் புரிகின்றன. இது எல்லா மொழிகளுக்கும் பொதுவான உண்மை. உதாரணமாக, 'நாய்' என்ற சொல், சொன்ன வுடனேயே நமக்குப் புரிந்துவிடுகின்றது. அல்லாமல், அந்தச் சொல்லை, 'மனிதனுக்குப் பயன் தருவதும் நரி, ஓநாய் இனத்தைச் சேர்ந்ததுமான விலங்கு' என்று ஒரு கொள்கையாக வடித்தால், 'நாய்' நம்முடைய அறிவுக்குச் சட்டென, எளிதில் புலனாவதில்லை. 'அழகு' என்ற சொல் மற்றோர் உதாரணம். இதுபோல் வரைகணிதத்தில் (Geometry) வரும் சொற்கள் : புள்ளி, நேர்கோடு முதலியன.

'கணம்' என்ற சொல்லும் உதாரணங்களால் எளிதில் புரிந்துவிடக் கூடியது; ஆனால், கொள்கை வடிவில் கடினமானது.

கணத்திற்குச் சில உதாரணங்கள்

1. ஒரு வகுப்பிலுள்ள மாணவர் அனைவரும் ஒரு கணத்தைச் சேர்ந்தவராவர். அந்த வகுப்பை ஒரு 'மாணவர் கணம்' (set of boy students) என்போம். ஒவ்வொரு மாணவனும் அந்தக் கணத்தின் 'உறுப்பு' (element) ஆவான்.

2. ஒரு வாரம் என்பது 7 நாள்கள் கொண்ட ஒரு கணம். ஞாயிறு, திங்கள், செவ்வாய், புதன், வியாழன், வெள்ளி, சனி என்பவை இந்தக் கணத்தின் உறுப்புகள்.

3. 2, 4, 6, 8, 10 என்பவை ஒரு கணத்தை அமைப்பதாகக் கூறலாம்.

மேற்கண்ட உதாரணங்களில் ஒவ்வொரு கணத்திலும் காணும் உறுப்புகள் அந்தக் கணத்துள் ஒரு 'பொதுத் தன்மை' யைப் (common property) பெற்றிருப்பதைக் காணலாம்.

உதாரணம் 1-ல், எந்த ஓர் உறுப்பும் 'மாணவன்' என்ற பொதுத்தன்மை யுடையது. 'வார கண'த்தின் ஒவ்வோர் உறுப்பும் 'நாள்' என்ற பொதுத்தன்மையது. மூன்றுவது உதாரணத்தில் கணத்தின் உறுப்புகள் ஒவ்வொன்றும் 'இரட்டை நேர் முழுவெண்' (Even positive integer) என்ற பண்புடையது. ஆனால், ஒரு கணத்தின் உறுப்புகளுக்குப் பொதுத்தன்மை இருக்கவேண்டும் என்ற கட்டாய விதி ஒன்றுமில்லை.

உதாரணமாக, திராட்சை, $4\frac{1}{2}$, —10, நாற்கரம் என்ற பொருள்களைக் கொண்ட கணத்தின் உறுப்புகளுக்குப் பொதுத்தன்மை இல்லை.

1·2·1. வரை இலக்கணம் (Definition)

பொருள்கள் அடங்கிய கூட்டம் அல்லது திரளுக்குக் கணம் என்பது பெயர்.

1·2·2. வரை இலக்கணம்

ஒரு கணத்தின் உறுப்புகள் எனப்படுவன, அக் கணத்தைச் சேர்ந்த பொருள்கள் ஆவன.

1·2·3. குறியீட்டு முறை (Notation)

நடைமுறையில், வழக்கில் ஆங்கில மொழியின் பெரிய எழுத்துகளான $A, B, C, \ldots$ என்பவை கணங்களையும், சிறிய எழுத்துகளான $a, b, c, \ldots$ என்பவை கணத்தின் உறுப்புகளையும் குறிக்கின்றன.

'a என்பது A என்ற கணத்தின் உறுப்பு' என்பதை $a \in A$ என்ற குறியீட்டால் எழுதலாம்.

நாற்கரங்கள் கணத்தை S என்றும், அதன் ஓர் உறுப்பாகிய சதுரத்தை x என்றும் கொண்டால், இந்தக் கருத்தை $x \in S$ என்று குறியிடுவோம். ஒரு பொருள் ஒரு கணத்தின் உறுப்பு அன்று என்றால், $\notin$ என்ற குறியீட்டைப் பயன்படுத்துவோம்.

உதாரணமாக, A, இரட்டை நேர் முழுவெண் கணம் (Set of even positive integers) என்றால் $3 \notin A$; ஏனெனில் 3, ஒற்றை எண்.

குறிப்புகள்

1. ஒரு பொருள் கொடுக்கப்பட்ட கணத்தின் உறுப்பா, அல்லவா என்று நிர்ணயம் செய்ய முடிந்தால் அந்தக் கணத்தை 'நல் வரையறைக் கணம்' (well-defined set) என்போம்; இல்லாவிடின், 'நல் வரையறையற்ற கணம்' என்போம்.

உதாரணம்

தமிழ்நாட்டின் தலை சிறந்த நான்கு பின்னணிப் பாடகர்கள் கணம் நல் வரையறையற்றது. ஏனெனில், ஒரு குறிப்பிட்ட பாடகர் தலைசிறந்தவர் என்று ஒருமனதாக யாராலும் அறுதி யிட்டுக் கூற முடியுமா?

2. ஒரு கணம் வேறொரு கணத்தின் உறுப்பாக இருக்கலாம்.

உதாரணம்

நேர்கோடுகள் கணம். எப்படி ?

எண்ணற்ற, அதாவது முடிவில்லாத எண்ணிக்கையுடைய புள்ளிகளை (points) அடக்கியது ஒரு நேர்கோடு.

∴ ஒரு நேர்க்கோடு என்பது 'புள்ளிகள் கணம்' (set of points).

ஆனல், இந்த நேர்கோடு 'நேர்க்கோடுகள் கண'த்தின் ஓர் உறுப்பு.

∴ 'நேர்கோடுகள் கண'த்தின் ஒவ்வோர் உறுப்பும் ஒரு 'புள்ளிகள் கணம்'.

∴ 'நேர்க்கோடுகள் கணம்' என்பது, 'கணங்கள் அடங்கிய கணம்' அல்லது 'கணங்களின் கணம்' (set of sets) என்பதற்கு ஓர் எடுத்துக்காட்டு.

1.3. முடிவுள்ள (Finite) கணங்களும், முடிவில்லாக் (Infinite) கணங்களும்

1.3.1. வரை இலக்கணம்

முடிவில்லாக் கணம் : கணக்கிலடங்காத, அதாவது, எண்ணிலடங்காத உறுப்புகளைக் கொண்ட கணம் 'முடிவில்லாக் கணம்' எனப்படும். அத்தகைய கணத்திற்குக் கடைசி உறுப்பு என்று ஒன்றும் கிடையாது.

உதாரணங்கள்

1. 5 ஆல் மீதியில்லாமல் வகுபடும் முழு எண்கள் கணம்.

2. 0-க்கும் 1-க்கும் இடையே அடங்கியுள்ள பின்னங்கள் கணம்.

3. ஒரு முழு எண்ணின் காரணிகள் (factors), அந்த எண்ணும், 1-ம் தவிர வேறெதுவும் இல்லையென்றல் அந்த முழு எண், பகா எண் (Prime number) எனப்படும்.

2, 3, 5, 7,..., 23,...என்பவை பகா எண்களாவன.

இப்பொழுது, 'ஒற்றைப் பகா எண்கள்' (odd primes) அடங்கிய கணம் முடிவில்லாக் கணம் ஆகும்.

1·3·2. வரை இலக்கணம்

முடிவுள்ள கணம் : ஒரு கணத்தின் உறுப்புகள் முடிவுள்ள எண்ணிக்கை யுள்ளவையென்றல், அது 'முடிவுள்ள கணம்' எனப்படும். முடிவுள்ள கணத்திற்குக் கடைசி உறுப்பு உண்டு இந்தக் கணத்தில் உள்ள உறுப்புகளை இத்தனை என்று எண்ணிவிட முடியும்.

உதாரணங்கள்

1. 'இரட்டைப் பகா எண் கணம்'. ஏன்? 2 என்ற ஒரே ஒரு முழு எண்தானே இந்தக் கணத்தில் உள்ளது.

2. 'ஒரு வாரத்திலுள்ள நாள்கள் கணம்'. ஒரு வாரத்தில் 7 நாள்கள்தாமே உள்ளன. இத்தனை நாள்கள், அதாவது, இந்தக் கணத்தில் இத்தனை உறுப்புகள் என்று எண்ணி விட்டோமே!

3. $x^2 - 2x - 3 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் (equation) மூலங்கள் (roots) அடங்கிய கணம். ஏன்? மூலங்கள் : 3, — 1 ஆகியவைதாம். கணத்தின் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை 2.

1·3·3. வரை இலக்கணம்

வெற்றுக் கணம் (Null, empty, void, vacuous set) : உறுப்பு ஒன்றுமே இல்லாத கணம் 'வெற்றுக் கணம்' எனப்படும். கணங்களையொட்டிய 'விதிவிலக்கு விவரணங்கள்' (exception to rules) சிலவற்றைச் சுலபமாகக் கையாளுவதற்கு வெற்றுக் கணக் கோட்பாடு அவசியமாகிறது. வெற்றுக் கணத்தின் குறியீடு $\emptyset$ ஆகும்.

உதாரணங்கள்

1. $x^2 + 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மெய் மூலங்கள் (real roots) அடங்கிய கணம்.

2. $2x^2 - 3 = 0$-ன் முழுவெண் மெய் மூலங்கள் அடங்கிய கணம்.

1·4. கணங்களின் வரைதல் முறைகள் (Description of sets)

கணங்களின் உறுப்புகளை வரைவதற்கு இரு முறைகள் வழக்கில் உள்ளன.

அவை : 1. பட்டியல் அமைத்தல் முறை (Tabulation Method)

2. வரையறைத் தன்மை முறை (Defining property Method)

1·4·1. பட்டியல் அமைத்தல் முறை

இம் முறையில், ஓர் உறுப்பையும், அடுத்து வரும் உறுப்பையும் காற்புள்ளியால் பிரித்து, கணத்தின் உறுப்புகளை

'இரட்டை அடைப்பு'களில் (braces) இடவேண்டும். கணத்தின் உறுப்புகள் ஒழுங்கான குறிப்பிட்ட வரிசையில் (order) அமைய வேண்டுவதில்லை.

உதாரணமாக, { 2, 8, 10 }, { 2, 10, 8 }, { 8, 2, 10 }, { 8, 10, 2 }, { 10, 2, 8 }, { 10, 8, 2 } ஆகியவை வெவ்வேறு கணங்களைக் குறிக்காமல் ஒரே கணத்தையே குறிக்கின்றன. ஒவ்வொரு கணத்திலும் ஒரே எண்ணிக்கையுள்ள ஒரே மாதிரி உறுப்புகள்தாம் உள்ளன.

சில முடிவுள்ள கணங்களை, முதல் சில உறுப்புகளை எழுதி, பிறகு மூன்று புள்ளிகளை இட்டு, கடைசி உறுப்பை எழுதி விடுவதும் உண்டு.

உதாரணம்

10-க்கும் 100-க்கும் இடையேயுள்ள ஒற்றை முழுவெண்கள் கொண்ட கணத்தை { 11, 13, 15,..., 99 } என்று எழுதலாம்.

ஒரு கணத்தில் ஓர் உறுப்பு அல்லது பல உறுப்புகள் ஒரு தடவைக்குமேல் பல தடவைகள் காணப்பட்டாலும் அந்தக் கணம் மாறுவதில்லை.

உதாரணம்

{ 2, 0, 1 }, { 2, 0, 0, 1, 1 }, { 2, 0, 2, 1, 2, 1, 1 } ஆகியவை ஒரே கணத்தைக் குறிப்பவையே.

1·4·2. வரை இலக்கணம்

ஓருறுப்புக் கணம் (Singleton, Unit Set) : ஒரே ஓர் உறுப்பை மட்டும் கொண்ட கணத்திற்கு ஓருறுப்புக் கணம் என்பது பெயர்.

உதாரணங்கள் : $\{a\}$, $\{0\}$ என்பன.

எச்சரிக்கை !

$\{0\} \neq \emptyset$. ஏன் ? 0 என்பது ஓர் எண் ; $0 \in \{0\}$. ஆனால் $\emptyset$-ல் உறுப்பே இருக்கக் கூடாதே !

1·4·3. முடிவில்லாக் கணங்களை வரைதல் முறை

முதல் சில உறுப்புகளை எழுதி, பின்னே மூன்று புள்ளிகளை வைத்து, இரட்டை அடைப்புகளை இட்டுவிடு.

உதாரணம்

இயற்கையெண்கள் கணம். இதை வரைதல் முறை $\{1, 2, 3, 4, 5 \ldots\}$

1·4·4. வரையறைத் தன்மை முறை

இம் முறை மிகவும் வசதியானது ; கணத்தின் உறுப்புகளின் தன்மையை எளிதில் புலப்படுத்தக் கூடியது. இந்த வசதி பட்டியல் முறையில் கிடையாது.

இம் முறையிலும் இரு வகைகள் உண்டு.

வகை 1.

உதாரணமாக, 10-க்கும் 20-க்கும் இடையே உள்ள பகா எண்கள் அமைக்கும் கணத்தை {10-க்கும் 20-க்கும் இடையிலுள்ள பகா எண்கள்} என எழுதலாம்.

வகை 2.

இந்த வகையில் உறுப்பின் தன்மையை வெளிப்படுத்துகிறோம்.

உதாரணமாக, 15-க்குக் குறைந்த பகா எண்கள் கொண்ட கணத்தை இந்த வகையில் எழுதும் முறை : $\{x \mid x$ பகா எண் $< 15\}$ அல்லது $\{x : x$ பகா எண் $< 15\}$,

அல்லது $\{x ; x$ பகா எண் $< 15\}$.

| , :, ; என்ற குறியீடுகள் 'எப்படிப்பட்டது எனில்' என்ற சொற்றொடரைக் குறிப்பவை. அதாவது இக் குறிகளின் பின்னால் வரும் செய்தி x-ன் தன்மையைக் குறிப்பது. x என்பது கணத்தின் உருமாதிரி. x க்குப் பதில் y, Z $\ast$, α, β, ... போன்ற எந்தக் குறியீடுகளையும் பிரதியிடலாம். குறியீடு விளக்கும் செய்திதான் முக்கியமேயொழிய, குறியீடு எதுவாயிருப்பின் என்ன ?

x-ன் தன்மையை விளக்கும் வரைக்கு 'வரைதல் நிபந்தனை' (defiening condition) என்பது பெயர்.

மேற்கண்ட உதாரணத்தில், x பகா எண், $x < 15$ என்பது வரைதல் நிபந்தனை.

முக்கிய உதாரணம்

$\emptyset = \{x \mid x \neq x\}$. இதனையே $\emptyset$-ன் வரையறையாகக் கொள்ளலாம்.

மாதிரிக் கணக்குகள்

கீழ்க்கண்ட கணங்களின் வரையறைத் தன்மையை, முடியுமானால் புலப்படுத்துக :

1. $\{2, 4, 6, 8\}$ 2. $\{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$
3. $\{-1, 1\}$, 4. $\{1, \omega, \omega^2\}$
5. $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}$ 6. $\{1, i, -1, -i\}$

விடை

1. N_e : எல்லா இரட்டை இயற்கையெண்கள் கணம்

$\{2, 4, 6, 8,\} = \{x \mid x \in N_e$, x ஓரிலக்க (one-digit) இயற்கையெண் $\}$

2. $\{x \mid x$ ஒற்றை இயற்கையெண் $\}$
3. $\{x \mid x \in \mathbf{R}, x^2 - 1 = 0\}$, $\mathbf{R}$: மெய்யெண்கள் கணம்.
4. $\{x \mid x^3 = 1$-ன் எல்லா மூலங்கள் $\}$
5. $\{x \mid x \in P,\ x$ ஒற்றையெண் $< 25\}$, P : நேர்ப் பகா எண்கள் கணம்.
6. $\{Z : Z$ கலப்பெண், $Z^4 = 1\}$.

1·5. உட்கணங்கள் (Sub sets)

1·5·1. வரை இலக்கணம்

B என்ற ஒரு கணத்தின் ஒவ்வோர் உறுப்பும் A என்ற கணத்தின் உறுப்பானால், B என்பது A-ன் உட்கணம் எனப்படும்

உதாரணங்கள் :

1. $A = \{3, 5, 1, 2\}$

$B = \{3, 2\}$. இங்கு, B-ன் எல்லா உறுப்புகளான 3-ம், 2-ம், A-ல் உள்ளன.

$\therefore B$ கணமானது A-ன் உட்கணம்.

2. **R** : மெய்யெண்கள் கணம்.

Z : முழு எண்கள் கணம்.

எல்லா முழு எண்களும் மெய்யெண்கள்.

∴ **R**-ன் உட்கணம் **Z**

1·5·2. குறியீட்டு முறை

ஒவ்வொரு கணத்திற்கும் அதுவே ஓர் உட்கணம் ஆகிறது. அதாவது A என்ற கணத்தின் ஓர் உட்கணம் A-வே.

'A-ன் உட்கணம் B', அதாவது, 'B என்பது A-ன் உட்கணம்' என்பதை $B \subseteq A$ என்ற குறியீட்டு முறையால் எழுதலாம்.

$\subseteq$-க்குக் 'கண அடங்கல்' (Set Inclusion) என்பது பெயர்.

'B ஆனது A-ன் உட்கணம் அன்று' எனப் பொருள்படும் குறியீடு : $B \not\subseteq A$

முக்கியமான தற்கோள்

ஒவ்வொரு கணத்திற்கும் வெற்றுக் கணமும் ஓர் உட்கணமாம். அதாவது, $\emptyset \subseteq A$.

1·5·3. வரை இலக்கணம்

சம கணங்கள் (Equal sets): A என்ற கணத்தின் ஒவ்வோர் உறுப்பும், B என்ற கணத்தின் உறுப்பாகவும், B என்ற கணத்தின் ஒவ்வோர் உறுப்பும் A என்ற கணத்தின் உறுப்பாகவும் இருந்தால்,

A-ம், B-ம் சம கணங்கள் எனப்படும்.

குறியீட்டு முறையில் $A = B$.

'கண அடங்கல்' குறியீட்டு முறையில்,

$A = B \Longleftrightarrow A \subseteq B,\ B \subseteq A$.

உதாரணங்கள்

1. $\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\} = \{1, 3, 2\} = \{2, 3, 1\} = \{2, 1, 3\} = \{3, 2, 1\}$

2. $\{a, b, c\}$-ன் உட்கணங்களாவன; $\{a, b, c\}$ $\{a, b\}$ $\{a, c\}$, $\{b, c\}$ $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$,

1·5·4. வரை இலக்கணம்

சரியான உட்கணம் (Proper Subset) : B என்ற கணம், A என்ற கணத்தின் உட்கணமாகவும், குறைந்த பட்சம் A-ன் ஓர் உறுப்பாவது B-ல் இல்லாமலுமிருந்தால், B என்பது A-ன் சரியான உட்கணம் எனப்படும்.

குறியீட்டு முறையில், $B \subset A$ என்பது மேற்கண்ட வரையைக் குறிக்கும். $B \subset A \Longrightarrow B \subseteq A\ ,\ B \neq A$

B ஆனது A-ன் சரியான உட்கணம் அன்று என்றால், $B \not\subset A$ என்று குறியிடு.

உதாரணங்கள்

1. $\{1,2\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$
2. பகா எண்கள் கணம் $\subset$ இயற்கையெண்கள் கணம்,

1·5·5. வரை இலக்கணம்

அற்ப உட்கணங்கள் (Improper, Trivial subsets) : ஒரு கொடுக்கப்பட்ட கணத்தின் அற்ப உட்கணங்களாவன, அதே கணமும் வெற்றுக் கணமும்.

உதாரணங்கள்

1. $\{2, 3, 4\} \not\subset \{2, 3, 4\}$
1. $\emptyset \not\subset \{2, 3\}$

1. 5. 6. வரை இலக்கணம்

மேற்கணம் (Super set) : B என்ற கணம் A என்ற கணத்தின் சரியான உட்கணமானல், A என்பது B-ன் மேற்கணம் எனப்படும்.

உதாரணங்கள் :

1. $\{1, 3, 7\} \supset \{1, 3\}$

   $\{1, 7, 3\} \supset \{3, 7\}$

2. { செங்கோண முக்கோணங்கள் } $\supset$ { இரு சமபக்க செங்கோண முக்கோணங்கள் }.

1. 5. 7. **பெருங்கணம்** (Universal set, Universe, Ground set, Master set)

ஒரு கணித விவாதத்தில் பங்குபெறும் கணங்கள் அனைத்தையும் ஒரு பெருங்கணத்தின் உட்கணங்களாகக் கருதுவது மிகவும் வசதியாய் இருக்கிறது. ஒரு விவாதத்திற்கு உரிய பெருங்கணம் மற்றொரு விவாதத்திற்கு உதவாதும் இருக்கலாம். பெரும்பாலும் ஒரு விவாதத்தில் எடுத்துக்கொண்ட பெருங் கணத்தை மாற்றுவதில்லை. வழக்கமாக, பெருங்கணத்தை U அல்லது V என்று குறிப்பிடுகிறோம்.

கணங்களை வரையப் பயன்படும் வரையறை நிபந்தனைகள் சமன்பாடுகளாகவோ, சமனிலிகளாகவோ (inequalities) இருப்பதுடன், பெருங்கணமும் கூடி இருக்கும். உதாரணமாக, வரையறை நிபந்தனை; $x \in R$, $x^2+4=0$ என்றால், x-ன் மதிப்புகளான தீர்வுகள் R-ல் உள்ளன என்பதாகும். இங்கே R என்ற மெய்யெண்கள் கணம்தான் பெருங்கணம். இந்த உதாரணத்தில் தீர்வுகள் R-ல் கிடையாது. . தீர்வுகள் அமைக்கும் கணம் $\emptyset$.

மேலும் சில உதாரணங்கள்

1. Z : முழு எண்கள் கணம், $\{x \in Z \mid x^2-2x+4=0\}$ என்பதில் பெருங்கணம் $U = Z = \{x \mid x \in Z\}$, வரையறை நிபந்தனை : $x^2-2x+4=0$

தீர்வுக் கணம் $= S = \{2, 2\} = \{2\}$ $\therefore S \subset Z$

2. R. மெய்யெண்கள் கணம், $S = \{x \mid x \in R, x^2 = -9\}$ என்பதில். $U = R$; வரையறை நிபந்தனை $x^2 = -9$.

   $x^2 = -9 \Longrightarrow x$ ஒரு கற்பனை எண்; மெய்யெண் அன்று.
   $\therefore S = \emptyset$

3. $U = C$, $S = \{x \mid x \in C, x^2 = -9\}$
   $= \{3i, -3i\}$

4. $U = N =$ இயற்கையெண்கள் கணம், $S = \{x \mid x \in N, 2x - 5 < 6\}$,
   $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

குறிப்பு : 0 என்பது இயற்கை எண் அன்று.

1. 5. 8. வரை இலக்கணம்

அடுக்குக் கணம் (Power Set): E என்ற கணத்தின் எல்லா உட்கணங்களும் அமைக்கும் கணம், E-ன் அடுக்குக் கணம் எனப்படும். இதனை $P(E)$ என்ற குறியீட்டு முறையில் எழுதலாம்.

$P(E) = \{x \mid x \subset E\}$ இதனை 2^E என்றும் குறியிடுவர்.

உதாரணம்

$E = \{1, 2, 3\}$ என்றால்,

$$P(E) = \Big\{ \{1, 2, 3\}, \ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\} \{2, 3\}, \{3, 1\} \Big\}$$

ஒரு நல்ல முடிபு

E என்ற கணத்தின் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை m என்றால் $P(E)$-ன் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையை எழுது.

விடை

E-ன் உட்கணங்களாவன : வெற்றுக்கணம், E, ஓருறுப்புக் கணங்கள், ஈருறுப்புக் கணங்கள், மூவுறுப்புக் கணங்கள், ... , $(n-1)$ உறுப்புகள் உடைய கணங்கள் ஆகியவை.

$E = \{a_1, a_2, a_3 ..., a_n\}$ என்க.

ஓருறுப்புக் கணங்கள் : $\{a_1\}, \{a_2\}, ..., \{a_n\}$ ஆகியவை. இவற்றின் எண்ணிக்கை : nC_1

ஈருறுப்புக் கணங்கள் : $\{a_1, a_2\}, \{a_1, a_3\}, ..., \{a_1, a_n\}$ $\{a_2, a_3\}, ...$ இவற்றின் எண்ணிக்கை : nC_2.

மூவுறுப்புக் கணங்களின் எண்ணிக்கை : nC_3 ... ...

... ...

$(n-1)$ உறுப்புக் கணங்களின் எண்ணிக்கை : nC_{n-1}

$P(E)$-ன் உறுப்புகள் : E-ன் எல்லா உட்கணங்கள்

$\therefore$ $P(E)$-ன் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை

$$= 1 + 1 + nC_1 + nC_2 + \dots + nC_{n-1}$$
$$= nC_0 + nC_n + nC_1 + nC_2 + \dots + nC_{n-1}$$

$$= nC_0 + nC_1 + \dots + nC_n$$
$$= (1 + 1)^n$$
$$= 2^n$$

குறிப்பு : A ஒரு முடிவில்லாத கணமானல், $P(E)$, அதாவது, 2^E-ம் முடிவில்லாதது ஆகும்.

பயிற்சி 1

1. $\triangle_1 =$ { முக்கோணங்கள் }, $\triangle_2 =$ { இருசமபக்க முக்கோணங்கள் }

$\triangle_3 =$ { சமபக்க முக்கோணங்கள்}, $\triangle_4 =$ {சமகோண முக்கோணங்கள் },

$\triangle_5 =$ { அசமபக்க முக்கோணங்கள் }, $\triangle_6 =$ { செங் கோண முக்கோணங்கள் }

$\triangle_7 =$ { சமபக்க செங்கோண முக்கோணங்கள்},

$\triangle_8 =$ { இருசமபக்க செங்கோண முக்கோணங்கள் },

என்றல் எது எதனுடைய உட்கணம் என்பதைக் கண அடங்கல் குறியீட்டின் மூலமாய் எழுது. உதாரணமாக, $\triangle_8 \subset \triangle_2$

குறிப்பு : Z : முழு எண்கள் கணம், Z+ : நேர் முழு எண்கள் கணம், Z_e : இரட்டை முழுவெண்கள் கணம், Q : விகிதமுறு பின்னங்கள் கணம், Q^+ : நேர் விகிதமுறு பின்னங்கள் கணம், R : மெய்யெண்கள் கணம், C : கலப்பெண்கள் கணம், N : இயற்கை எண்கள் கணம், P : நேர்ப் பகா எண்கள் கணம். இந்தக் குறியீடுகளைத்தாம் புத்தகம் முழுவதிலும் பயன் படுத்துவோம்.

2. கீழ்க்கண்ட உறுப்புகளைக்கொண்ட கணங்களில் எவை முடிவுள் ளவை, எவை முடிவில்லாதவை, எவை வெற்று எனக் காண்.

(i) 3-ன் மடங்குகள், (ii) 3-க்கும் 4-க்கும் இடையே உள்ள நேர் முழு எண்கள் ; (iii) இரட்டைப் பகா எண்கள், (iv) 2-க்கும் 70-க்கும் இடையிலுள்ள எண்கள், (v) நேர்கோட்டில் அடங்கிய புள்ளிகள், (vi) $x^2 - 3 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள், (vii) ஒரு தளத்தில் உள்ள பொது மைய வட்டங்களின் வெட்டுப் புள்ளிகள், (viii) $x^2 - 5x + 6 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள், (ix) 1, 2, 3,..., n,... (x) ஒற்றைப் பகா எண்கள்.

3. கீழ்க் கண்டவைகளில் எவை சரி, எவை தவறு என்று வரிசைப் படுத்து

(i) $1 \notin \{1, 2. 3\}$ (ii) $2 \in \{ 2 \}$

(iii) $1 \in \{1, 2, 3 \}$ (iv) $2 \in \left\{ 2, \{ 2\}, \left\{ \{2\} \right\} \right\}$

(v) $a \in \{ a, b, c, d \}$ (vi) $\{ 2 \} \notin \{ 2 \}$

(vii) $\{ 2\} \in \left\{ \{ 1 \}, \{ 2, 3 \}, 4 \right\}$

(viii) $\{ a, b, c \} = \{ a, b, b, c \}$ (ix) $2 = \{ 2 \}$

(x) $\{ a \} = \{ b, c \} \Longrightarrow a = b = c$ (xi) $\{ 0 \} = \emptyset$

(xii) $\{ 2, 3 \} \subseteq \{ 2 \}$

4. $a \in \{ a, b, c \}$ என்பதற்கும். $\{a\} \subset \{ a, b, c \}$ என்பதற்கும் உள்ள வேறுபாட்டை விளக்குக.

5. கீழ்க்காணும் கணங்களின் அடுக்குக் கணங்களைப் பட்டியலமை.

(i) $\{ \emptyset \}$, (ii) $\left\{ \{ \emptyset \} \right\}$, (iii) $\{ a \}$,

(iv) $\{ 1, 3, 3, 4 \}$ (v) $\left\{ \left\{ \{ 2 \}, 1 \right\}, 1 \right\}$

5. கீழ்க்காணும் நிரல்களில் உறுப்புகளும், கணங்களும் தரப்பட்டுள்ளன. அவற்றை $\in$. $\notin$, $\subset$, $=$ என்ற குறியீடுகளைக் கொண்டு இணைக்கவும்.

இட நிரல்	வல நிரல்.
உதாரணம் : 2	$\{2, 3, 5\}$
விடை : $2 \subset \{2, 3, 5\}$	
(i) -5	$\{2, -5, 7\}$
(ii) $\{a, b, c\}$	$\{b, c, a\}$
(iii) $\{a\}$	$\{c, a, b\}$
(iv) a	$\{p, q, r\}$
(v) $\{8, 10, 12, \ldots\}$	$\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, \ldots\}$
(vi) நேர் இரட்டை முழு எண்கள் கணம்	நேர் முழு எண்கள் கணம்

(vii)	P	N
(viii)	இயற்கை எண் களின் நான்கு அடுக்குக் கணம்	இயற்கை எண்களின் வர்க்கம்
(ix)	2 ஐயும், 3 ஐயும் தவிர, மற்றப் பகா எண்கள் கணம்	n நேர் முழு எண் என்றால் $6n \pm 1$ உரு மாதிரியுள்ள எண்கள்
(x)	101	$n^2 + 1$ உரு மாதிரியுள்ள எண்கள், n முழு எண்
(xi)	$\emptyset$	$\{1, 2, 3\}$
(xii)	3	$\emptyset$

6. கீழே பெருங்கணங்களும், வரையறை நிபந்தனைகளும் தரப்பட்டுள்ளன. தீர்வுக்கணங்களைக் காண்.

U: பெருங்கணம். வ.நி. = வரையறை நிபந்தனை.

(i) $U = \mathbf{Z}$; வ. நி: $x^2 - 5x + 6 = 0$

(ii) $U = \{x \mid x \in N\}$; வ. நி: $x < 7$

(iii) $U = \mathbf{R}$. வ. நி: $x - 2 = x$

(iv) $U = \mathbf{Z}$ வ. நி: $x(x - 1) = 0$

(v) $U = \mathbf{Z}$, வ. நி: $x^2 < 0$

(vi) $U = N$. வ. நி: $x^2 = 7x$.

7. N, $\mathbf{Z}$, P, Q, R என்ற கணங்களால் பெறப்படும் ஜோடிகளை $\subset$ அல்லது $\not\subset$ என்ற குறியீடுகளால் இணை.

உதாரணம்: $N \subset \mathbf{Z}$, $N \subset Q$, $N \subset \mathbf{R}$, $N \not\subset P$.

8. கீழ்க்கண்ட கணங்களின் வரையறைத் தன்மையைப் புலப்படுத்துக:

(i) $\{1, 2, 3\}$, (ii) $\{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots\}$

1·6. கண இயல்: கணங்களின் மீது செயலிகள் (Operations on Sets)

1.6.1. வரை இலக்கணம்

கணங்களின் கூட்டு (Union of Sets): A, B கணங்களின் கூட்டு என்பது, A என்ற கணத்தின் உறுப்புகளையாவது, அல்லது B என்ற கணத்தின் உறுப்பு களையாவது, அல்லது இவ்விரு கணங்களின் உறுப்புகளையாவது கொண்ட கணமாகும்.

குறியீடு

$A \cup B$ என்பது A, B கணங்களின் கூட்டைக் குறிக்கும்.

$x \in A \vee x \in B$ என்றால், $x \in A$ அல்லது $x \in B$ அல்லது $x \in A, B$.

கணங்களின் கூட்டு, குறியீட்டு முறையில் :

$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

உதாரணம்

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{1, 2, 3, 8, 9\}$ என்றால்,

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

குறிப்புகள்

1. $A \cup A = A$
2. $A \cup \emptyset = A$
3. $A \cup B = B \cup A$.

1·6·2. வரை இலக்கணம்

கணங்களின் இடைவெட்டு (Intersection of Sets): A, B கணங்களின் இடைவெட்டு என்பது, A கணத்திற்கும், B கணத்திற்கும் பொதுவாக உள்ள எல்லா உறுப்புகளையும் கொண்ட கணமாகும்.

குறியீடு

$A \cap B$ என்பது A, B-க்களின் இடைவெட்டைக் குறிக்கும்.

$x \in A \wedge x \in B$ என்பது x ஆனது A-க்கும், B-க்கும் சொந்தம் என்ற பொருளுடையது.

மேற்கண்ட வரை இலக்கணம், குறியீட்டு முறையில்,

$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

உதாரணம்

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{1, 2, 3, 8, 9\}$ என்ருல்
$A \cap B = \{1, 2, 3\}$

குறிப்புகள்

(i) $A \cap A = A$

(ii) $A \cap \emptyset = \emptyset$.

1·6·3. வரை இலக்கணம்

பொது உறுப்பிலிக் கணங்கள் (Disjoint sets)

A கணத்திற்கும், B கணத்திற்கும் பொதுவான உறுப்புகளே இல்லையென்ருல், A-ம், B-ம் பொது உறுப்பிலிக் கணங்கள் எனப்படும். அதாவது, A-ம் B-ம் பொது உறுப்பிலிக் கணங்கள் என்ருல் $A \cap B = \emptyset$

உதாரணம்

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6\}$ என்ருல் $A \cap B = \emptyset$

$\therefore$ A-ம் B-ம் பொது உறுப்பிலிக் கணங்கள்.

1·6·4. வரை இலக்கணம்

கணங்களின் வேறுபாடு (Difference of two Sets)

A, B கணங்களின் வேறுபாடு என்பது, B-ன் உறுப்புகளாக இல்லாத A-ன் உறுப்புகளைக் கொண்ட கணமாகும்.

குறியீடு

$A - B$.

குறியீட்டு முறையில்,

$A - B = \{x \mid x \in A \quad \wedge \quad x \notin B\}$

உதாரணம்

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{1, 2, 3, 8, 9\}$ என்ருல்,

$A - B = \{4, 5, 6, 7\}$, $B - A = \{8, 9\}$

$\therefore$ $A - B \neq B - A$, $(A - B) \cap (B - A) = \emptyset$.

1·6·5. வரை இலக்கணம்

நிரப்பிக் கணம் (Complement of a Set)

U என்பது பெருங்கணம், A என்பது U-ன் உட்கணம் என்றால் $U - A$ என்ற கணம் A-ன் நிரப்பி எனப்படும்.

குறியீட்டு முறையில், $U - A = \{x \mid x \in U \ \wedge \ x \notin A\}$.

குறியீடு

A', அல்லது A^c, அல்லது $\tilde{A}$, அல்லது $-A$.

உதாரணம்

U: நேர் முழுவெண்கள் கணம், $A =$ நேர் இரட்டை எண்கள் கணம் என்றால் $\tilde{A} = U - A = \{$நேர் ஒற்றை எண்கள்$\}$.

துணை முடிவுகள்

$(A')' = A$; $A \cap A' = \emptyset$, $A \cup A' = A$.

1·6·6. வரை இலக்கணம்

இரு கணங்களின் சமச்சீர் வேறுபாடு (Symmetric difference of two sets)

A, B கணங்களின் சமச்சீர் வேறுபாடு என்பது,

$A - B$, $B - A$ என்ற கணங்களின் கூட்டு ஆகும்.

குறியீடு

$A \triangle B$.

குறியீட்டு முறையில்,

$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$

உதாரணம்

$A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{a, b, e, f, g\}$ என்றால்,

$A - B = \{c, d\}$, $B - A = \{f, g\}$.

$$\therefore \quad A \triangle B = (A - B) \cup (B - A) = \{c, d\} \cup \{f, g\} = \{c, d, f, g\}.$$

குறிப்பு

கூட்டு, வெட்டுக் கணங்கள் எவையேனும் இரு கணங்களை ஒட்டி வரையறுக்கப்பட்டன. இரண்டுக்கு மேற்பட்ட பல கணங்களையொட்டியும் இவற்றை வரையறுக்கலாம். உதாரணமாக,

$X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup \ldots \cup X_n = \{x \mid x \in X_1 \vee x \in X_2 \vee \cdots \vee x \in X_n\}$

$X_1 \cap X_2 \cap X_3 \cap \ldots \cap X_n = \{x \mid x \in X_1 \wedge x \in X_2 \wedge \cdots \wedge x \in X_n\}$

உதாரணமாக, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 5\}$ $C = \{2, 5, 7\}$ என்றால் $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$ $A \cap B \cap C = \{2\}$

1·7 ஒரு கணத்தின் பிரிவினை (Partition of a Set)

S என்ற கணத்தின் சில உட்கணங்கள் $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ என்க.

S-ன் ஒவ்வோர் உறுப்பும் S-ன் தனித்தனி உட்கணங்களில் இருத்தல் வேண்டும், அதாவது, S-ன் ஓர் உறுப்பு ஓர் உட்கணத்திலும், மற்றோர் உறுப்பு வேறோர் உட்கணத்திலும் இருக்க வேண்டும் என்ற தன்மையை $X_1, X_2, \ldots, X_n$ பெற்றிருக்கட்டும். விளக்கமாக, எந்த இரண்டு X-களுக்கும் பொதுவான உறுப்பு இருக்கக்கூடாது; அதே நேரத்தில் S-ன் ஒவ்வோர் உறுப்பும் ஏதாவது ஒரு X-ல் இருக்கவேண்டும். இந்த நிலையில், $X_1, X_2, \ldots, X_n$ என்ற தொகுப்பு S-ன் பிரிவினையை அமைக்கின்றது என்கிறோம்.

S-ன் பிரிவினையாவது, S ஐப் பொது உறுப்பிலி உட்கணங்களாகப் பிரிக்கிறது.

1·7·1 வரை இலக்கணம்

கணத்தின் பிரிவினை

($\forall$ என்ற குறியீடு "எல்லா, ஒவ்வொரு" என்ற பொருளைக் குறிக்கும்.)

S என்ற கணத்தின் உட்கணங்கள் $X_1, X_2, \ldots, X_n$ என்க.

(i) $S = X_1 \cup X_2 \cup X_3, \ldots, \cup X_n$

(ii) $X_i \cap X_j = \emptyset, \forall i, j, i \neq j$ என்றால்,

$X_1, X_2, \quad X_n$ என்பவை S-ன் பிரிவினையை அமைக்கின்றன எனலாம்.

உதாரணங்கள்

(i) $S = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ என்க

$X_1 = \{a, d\}, X_2 = \{b, f, g, h\}, X_3 = \{i\},$

$X_4 = \{j, c, e\}$ என்றால், $\emptyset = X_1 \cap X_2 = X_1 \cap X_3$
$= X_1 \cap X_4 = X_2 \cap X_3 = X_2 \cap X_4 = X_3 \cap X_4$.

$X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup X_4 = S$. $\therefore$ X_1, X_2, X_3, X_4 என்பவை S-ன் பிரிவினையை அமைக்கின்றன. X_1, X_2, X_3, X_4 என்பவைகளை S-ன் பிரிவினை உறுப்புகள் எனலாம்.

2. S : {எல்லா முக்கோணங்கள்}

X_1 : {செங்கோண முக்கோணங்கள்}

X_2 : {90° இல்லாத முக்கோணங்கள்}

$X_1 \subset S$, $X_2 \subset S$. $S = X_1 \cup X_2$. $X_1 \cap X_2 = \emptyset$.

$\therefore$ S என்பது X_1, X_2 ஆல் பிரிவினையாக்கப்பட்டது.

3. Z : முழு எண்கள் கணம்.

X_1 : {3 ஆல் மீதியில்லாமல் வகுபடக்கூடிய முழு எண்கள்}

X_2 : {3 ஆல் வகுக்க மீதி 1 வரும் முழு எண்கள்}

X_3 : {3 ஆல் வகுக்க மீதி 2 வரும் முழு எண்கள்}

$X_1 \subset Z$, $X_2 \subset Z$, $X_3 \subset Z$. $X_1 \cup X_2 \cup X_3 = Z$.

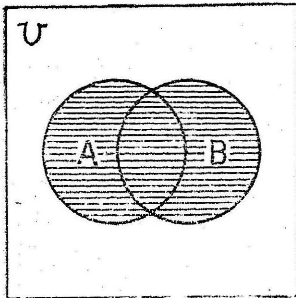
$\emptyset = X_1 \cap X_2 = X_2 \cap X_3 = X_3 \cap X_1$

$\therefore$ Z ஆனது மூன்று உட்கணங்களால் பிரிவினையாக்கப் பட்டுள்ளது.

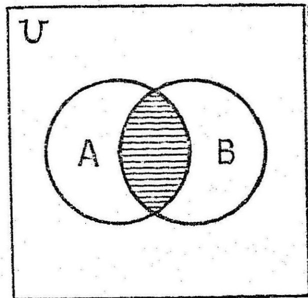
1·8 வென் விளக்கப்படங்கள் (Venn diagrams)

கணங்களின் கூட்டு, இடை வெட்டு, வேறுபாடு முதலியவற்றைப் படங்கள் மூலமாக விளக்கலாம். இம்முறையில் ஒரு கணத்தை, வட்டம் அல்லது மூடிய வளைவு (closed curve) குறிக்கும். வட்டத்தின் உள்ளேயுள்ள (Interior) புள்ளிகளாக, கணத்தின் உறுப்புகளைக் கருதலாம். வட்ட வரையின் மீதுள்ள புள்ளிகளைப் பற்றிக் கவலைப்படாதே! பெருங்கணம் செவ்வகத்தால் குறிக்கப்படும். ஒரு விவாதத்தில் காணும் கணங்கள் ஒரு பெருங்கணத்தின் உட்கணங்களாகையால், செவ்வகத்தின் உள்ளே வட்டங்கள் வரையப்படவேண்டும்.

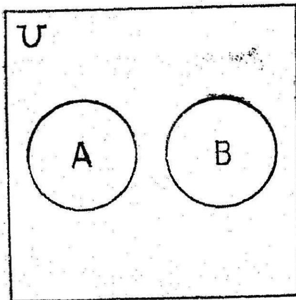
உதாரணங்கள்



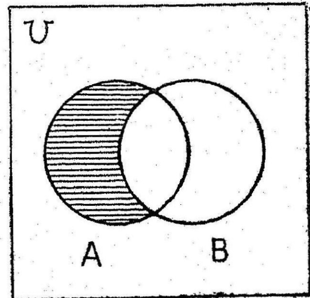
படம் 1. $A \cup B$
(கோடிட்ட பரப்பு)



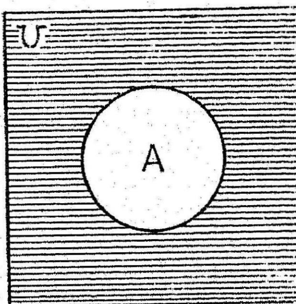
படம் 2. $A \cap B$
(கோடிட்ட பரப்பு)



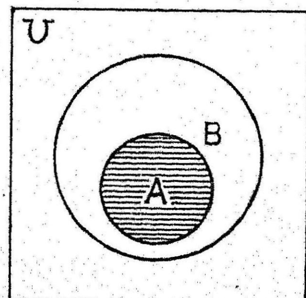
படம் 3.
$A \cap B = \emptyset$



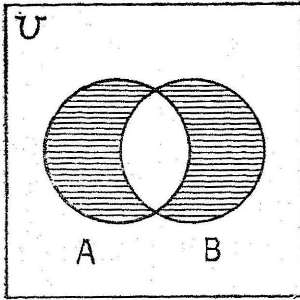
படம் 4.
$A - B$ (கோடிட்டது)



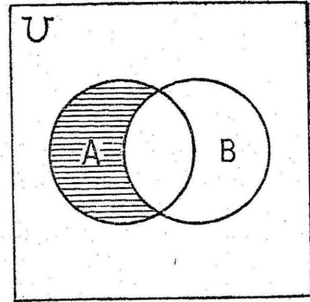
படம் 5. A' (கோடிட்டது)



படம் 6. $A \subset B$ (கோடிட்டது)



படம் 7.
$A \triangle B$ (கோடிட்டது)



படம் 8.
$A \cap B'$

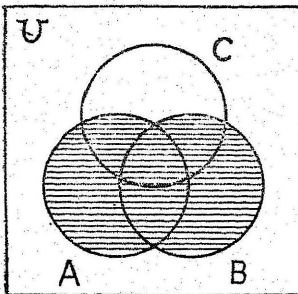
முக்கியமான குறிப்பு

கணங்களைப் பொறுத்த சமன்பாடுகள்; முற்றொருமைகளா என்பதைச் சரி பார்க்கவே வென் விளக்கப் படங்களைப் பயன் படுத்தலாமேயொழிய, அப்படங்கள் முறைமையான நிறுவலை (Formal proof) க் குறிப்பன அல்ல என்பதைத் தெளிவாய்த் தெரிந்துகொள்ள வேண்டும். வென் விளக்கப்படங்கள் கட்புலன் வழி நுண்ணறிவுக்குத் துணை செய்கின்றன; அவ்வளவுதான்.

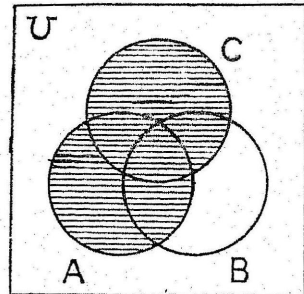
உதாரணங்கள்

A, B, C எவையேனும் சில கணங்கள்.

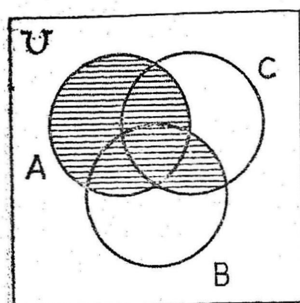
1. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$



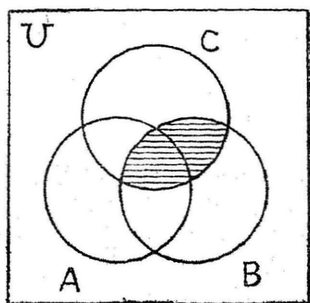
படம் 9. $A \cup B$



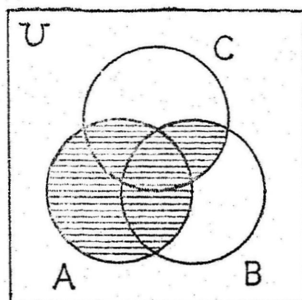
படம் 10. $A \cup C$



படம் 11.
$(A \cup B) \cap (A \cup C)$

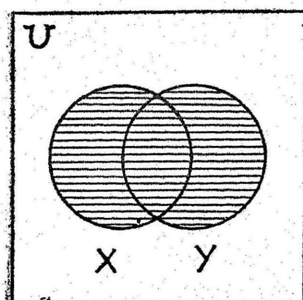


படம் 12.
$B \cap C$

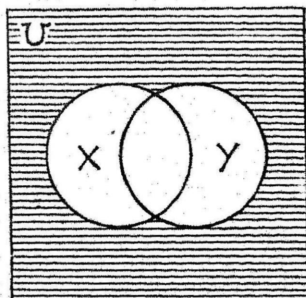


படம் 13. $A \cup (B \cap C)$

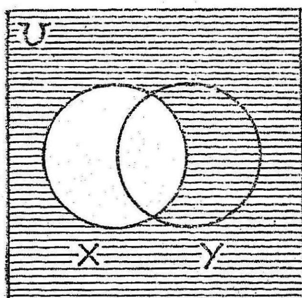
2. $(\bar{X} \cup Y)' = X' \cap Y'$



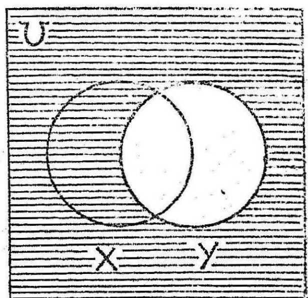
படம் 14. $X \cup Y$



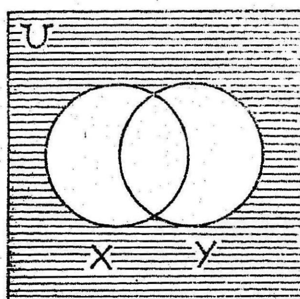
படம் 15. $(X \cup Y)'$



படம் 16. X'

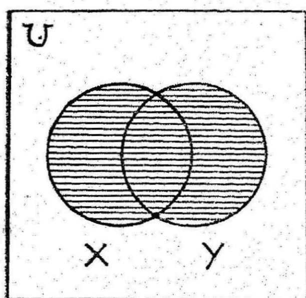


படம் 17. Y'

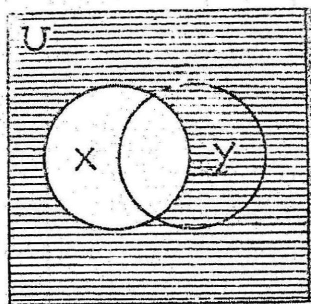


படம் 18. $X' \cap Y'$

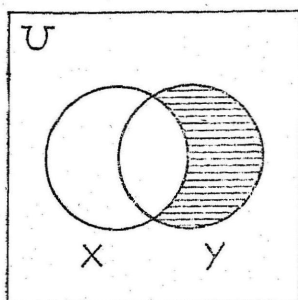
3: $X \cup (X' \cap Y) = X \cup Y$



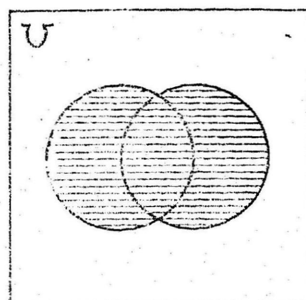
படம் 19. $X \cup Y$



படம் 20. X'



படம் 21. $X' \cap Y$



படம் 22. $X \cup (X' \cap Y)$

கணங்களையொட்டிய முற்ருருமைகளை முறைமையாக எவ்வாறு நிறுவலாம் என்பதற்குக் கீழே சில உதாரணங்கள் தரப்பட்டுள்ளன.

$A, B, C, \ldots$ என்ற கணங்கள் யாதேனுமொரு பெருங்கணம் U-ன் உட்கணங்கள் என்க.

உதாரணங்கள்

1. (அ) $A \cup B = B \cup A$

(ஆ) $A \cap B = B \cap A$. நிறுவுக.

நிறுவல்

(அ) $A \cup B$-ன் யாதேனுமோர் உறுப்பு x என்க.

$\therefore \; x \in A \;\vee\; x \in B$

$\Longrightarrow x \in B \vee x \in A$

$\Longrightarrow x \in B \cup A$. அதாவது $A \cup B$-ன் ஒ
உறுப்பும் $B \cup A$-ல் அடங்கியது.

$\therefore \; A \cup B \subset B \cup A$.

இந்த விவாதத்தில் A, B-ன் பாத்திரங்களை (F
பரிமாற்றினல், நமக்குக் கிடைப்பது, $B \cup A \subset A \cup B$

$\therefore A \cup B \subset B \cup A, B \cup A \subset A \cup B \Longrightarrow A \cup B =$

(ஆ) மேற்கண்டவாறு மாணவர் செய்தல் வேண்டுப்

2. $A \cap B \subseteq A \cup B$ என நிறுவுக.

நிறுவல்

யாதேனுமோர் உறுப்பு $x \in A \cap B$ என்க.

$x \in A \cap B \Longrightarrow x \in A \wedge x \in B.$

$\Longrightarrow x \in A \vee x \in B.$

$\Longrightarrow x \in A \cup B$

$\therefore A \cap B \subseteq A \cup B.$

3. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ என நிறுவுக.

நிறுவல்

யாதேனுமோர் உறுப்பு $x \in A \cap (B \cap C)$ என்க.

$x \in A \cap (B \cap C) \Longrightarrow x \in A \wedge x \in (B \cap C)$

$\Longrightarrow x \in A \wedge x \in B \wedge x \in C$

$x \in A \wedge x \in B \Longrightarrow x \in A \cap B.$

$x \in A \cap B \wedge x \in C \Longrightarrow x \in (A \cap B) \cap C$

$x \in A \cap (B \cap C) \Longrightarrow x \in (A \cap B) \cap C$

$\therefore A \cap (B \cap C) \subseteq (A \cap B) \cap C$

இப்பொழுது, $(A \cap B) \cap C$-ன் யாதேனுமோர்உறுப்பு y என்க.

$y \in (A \cap B) \cap C \Longrightarrow y \in A \cap B \wedge y \in C$

$\Longrightarrow y \in A \wedge y \in B \wedge y \in C$

$y \in B \wedge y \in C \Longrightarrow y \in B \cap C$

$y \in A \wedge y \in B \cap C \Longrightarrow y \in A \cap (B \cap C)$

$\therefore y \in (A \cap B) \cap C \Longrightarrow y \in A \cap (B \cap C)$

$\therefore (A \cap B) \cap C \subseteq A \cap (B \cap C)$

$\therefore A \cap (B \cap C) \subseteq (A \cap B) \cap C, (A \cap B) \cap C \subseteq A \cap (B \cap C)$

$\Longrightarrow A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

4. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ என நிறுவுக.

நிறுவல்

$A \cap (B \cup C)$-ன் யாதேனுமோர் உறுப்பு x என்க.

$x \in A \cap (B \cup C) \Longrightarrow x \in A \wedge x \in B \cup C$

$\Longrightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C).$

$\Longrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)$

$$x \in A \ \wedge \ x \in B \Longrightarrow x \in A \cap B$$
$$\Longrightarrow x \in ((A \cup B) \cup (A \cap C))$$
$$x \in A \ \wedge \ x \in C \Longrightarrow x \in A \cap C$$
$$\Longrightarrow x \in A \cap B \cup A \cap C$$
$$\therefore \ x \in A \cap (B \cup C) \Longrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$\Longrightarrow A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

இப்பொழுது, $(A \cap B) \cup (A \cap C)$-ன் யாதேனுமோர் உறுப்பு y என்க.

$$y \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \Longrightarrow y \in A \cap B \ \vee \ y \in A \cap C$$
$$y \in A \cap B \Longrightarrow y \in A \ \wedge \ y \in B$$
$$\Longrightarrow y \in A \ \wedge \ y \in B \cup C$$
$$y \in A \cap C \Longrightarrow y \in A \ \wedge \ y \in C$$
$$\Longrightarrow y \in A \ \wedge \ y \in B \cup C$$
$$\therefore \ y \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \Longrightarrow y \in A \cap (B \cup C)$$
$$\Longrightarrow (A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$$

முடிவாக, $A \cap (B \cup C) \Longrightarrow (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

5. $(A \cup B)' = A' \cap B'$. நிறுவுக. (தெமார்க்கன் விதி)

நிறுவல்

$(A \cup B)'$-ன் யாதேனுமோர் உறுப்பு x என்க.

$$x \in (A \cup B)' \Longrightarrow x \notin A \cup B$$
$$\Longrightarrow x \notin A \ \wedge \ x \notin B$$
$$\Longrightarrow x \in A' \ \wedge \ x \in B'$$
$$\Longrightarrow x \in A' \cap B'$$
$$\Longrightarrow (A \cup B)' \subseteq A' \cap B'$$

இப்பொழுது, $A' \cap B'$-ன் யாதேனுமோர் உறுப்பு y என்க.

$$y \in A' \cap B' \Longrightarrow y \in A' \ \wedge \ y \in B'$$
$$\Longrightarrow y \notin A \ \wedge \ y \notin B$$
$$\Longrightarrow y \notin A \cup B$$
$$\Longrightarrow y \in (A \cup B)'$$
$$\Longrightarrow A' \cap B' \subseteq (A \cup B)'$$
$$\therefore \ (A \cup B)' = A' \cap B'$$

6. $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$ என நிறுவுக.

நிறுவல்

யாதேனுமோர் உறுப்பு $x \in A \cap (B - C)$ என்க.

$$x \in A \cap (B - C) \Longrightarrow x \in A \quad \wedge \quad x \in (B - C)$$
$$\Longrightarrow x \in A \quad \wedge \quad (x \in B, x \notin C)$$
$$\Longrightarrow x \in A \wedge (x \in B, x \notin A \cap C)$$
$$\Longrightarrow x \in A \cap B, x \notin A \cap C$$
$$\therefore \quad A \cap (B - C) \subseteq (A \cap B) - (A \cap C)$$

$y \in A \cap B - A \cap C$ என்க.

$$\Longrightarrow y \in A \wedge y \in B, \quad y \notin A \cap C$$
$$\Longrightarrow y \in A \quad \wedge \quad y \in B, \quad y \notin C$$
$$\Longrightarrow y \in A, \quad y \in (B - C)$$
$$\Longrightarrow y \in A \cap (B - C)$$

$$\therefore \quad A \cap B - A \cap C \subseteq A \cap (B - C)$$
$$\therefore \quad A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$$

பயிற்சி 2

அ. (1) $A =$ நேர் முழு எண்கள் கணம், $B =$ ஒற்றை முழு எண்கள் கணம் எனில், $A \cup B$ எனக் காண்.

(2) $A = 2$-க்கு அதிகமான மெய்யெண்கள் கணம், $B = 5$-க்குக் குறைந்த மெய்யெண்கள் கணம் எனில் $A \cup B$ எனக் காண்.

(3) $A =$ ஒற்றை முழு எண்கள் கணம்; $B =$ இரட்டை முழு எண்கள் கணம் எனில் $A \cap B$ எனக் காண்.

(4) பெருங்கணம் $U = \{1, 2, 3, 4, 5, \}$, $A = \{2, 4, 5\}$ எனில் U ஐப் பொறுத்த நிரப்பியைக் காண்.

(5) $U = \mathbf{R}$, $A = \mathbf{R}^+$ (0 ஐச் சேர்த்து)., A' என்ன?

(6) $U = \mathbf{R}$, $A = \{0\}$, $B = \emptyset$, $C = \mathbf{U}$, எனில் A', B' C' என்பவைகளைக் காண்.

(7) $A = \mathbf{R}$, $B = \mathbf{R}^+$ எனில் $A \cap B$ எனக் காண்.

$U = \mathbf{R}$ என்றால் கீழ்க்கண்டவற்றை நிறுவுக.

(8) $\{2, 5, 8\} \cap \{5, 9, 11\}$

(9) $\{1, 5, 6, 7, 8, 12\} \cup \{1, 9, 10, 13, 7\}$

(10) $\{1, 2, 3\} \cup \emptyset$.

(11) $\{x \mid x$ முழு எண் $\} \cap \{x \mid x > 0\}$

(12) $\{x \mid x^2 - 9 = 0\} \cap \{x \mid x^2 + x + 1 = 0\}$

$U = \mathbf{R}$ என்றால், நிறுவுக.

(13) $\{x \mid x^2 - 4x + 3 = 0\} = \{x \mid x - 3 = 0\} \cup \{x \mid x - 1 = 0\}$

ஆ. U: பெருங்கணம், A, B, C என்பவை U-ன் உட்கணங்கள் எனில் கீழ்க்காணும் முற்றொருமைகளை வென் விளக்கப் படங்கள் மூலம் சரி பார்.

(1) $U \cup A = U$ (2) $U \cap A = A$ (3) $A \cup (A \cap B) = A$ (4) $(A \cap B)' = A' \cup B'$ (5) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (6) $A - B = A - A \cap B = (A \cup B) - B$ (7) $(A \cap C) \cup (B \cup C) = B \cup C$ (8) $A \subset A \cup B$ (9) $A \cap B \subset A$

இ. $A = \{0, 1, 3, 5\}$, $B = \{2, 3, 5, 8\}$, $C = \{2, 7, 8, 9\}$, $D = \emptyset$ என்றால் கீழ்க்கண்டவற்றை வரைக.

(1) $A \cap D$ (2) $B \cup C$ (3) $B \cap C$ (4) $C \cup D$ (5) $A \cup B$ (6) $A \cap C$ (7) $(B \cup C) \cap A$ (8) $(A \cap B) \cup C$.

(ஈ) A, B, C என்பவை U என்ற பெருங்கணத்தின் உட்கணங்கள் என்றும், $A \subseteq B$ என்றும் கொண்டால் கீழ்க்கண்டவற்றை நிறுவுக.

(1) $A \cap C \subseteq B \cap C$ (2) $A \cup C \subseteq B \cup C$

உ. முறைமையாக நிறுவுக:

U என்ற பெருங்கணத்தின் உட்கணங்கள், A, B, C எனில் (1) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (2) $(A \cap B)' = A' \cup B$ (3) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$ (4) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$ (5) $A \subseteq B \Longrightarrow -B \subseteq -A$ (6) $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - A \cap B$.

ஊ. $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{a, b, c, d, e, f\}$ எனில் கீழ்க்காணும் கணங்களை வரைக:

$A \triangle B$, $A \triangle A$, $(A \triangle B) \cup A$, $(A \triangle B) \cap B$.

1.9. பெருக்கல் கணங்கள் (Product Sets)

கணம் $\{a, b\}$ = கணம் $\{b, a\}$ என்று நாம் ஏற்கெனவே படித்தோம் அல்லவா? அதாவது ஒரு கணத்தின் உறுப்புகள் எந்த வரிசையிலும் இருக்கலாம். இந்த ஒரு குறிப்பிட்ட உறுப்பைத்தான் முதலில் எழுதவேண்டும்; அதன் பின் அந்த உறுப்பைத்தான் எழுதவேண்டும் என்ற கட்டுப்பாடு கிடையாது. ஒரு கணத்தைக் குறிக்க இரட்டை அடைப்புகள்தான் உபயோகிக்க வேண்டும் என்றோம்.

a, b என்ற இரு கணியங்களில். (quantities) குறிப்பிட்ட ஒன்றுதான் முதலில் வரவேண்டும் என்றால் அதை முதலில் எழுதி, காற்புள்ளி இட்டு, அடுத்து மற்றதை எழுதி, இவற்றைப் பிறை அடைப்புகளில் இடவேண்டும். உதாரணமாக, (a, b) என்றால், a-ஐ முதலிலும், b-ஐ இரண்டாவதாகவும்தான் வரிசைப் படுத்தல் (Ordering) வேண்டும் என்று பொருள். இப்பண்பினால் (a, b) ஐ 'வரிசைப்பட்ட ஜோடி' என்று அழைப்போம்.

$(a, b) \neq (b, a)$ என்பது தெளிவு. ஆனால் $\{a, b\} = \{b, a\}$

வரிசைப்பட்ட ஜோடிக்குக் கணக்கொள்கை வாயிலாக வரை இலக்கணம் கொடுப்போம். (a, b) ஐக் கணமாக நோக்கலாம்.

1.9.1. வரை இலக்கணம்

வரிசைப்பட்ட ஜோடி (Ordered pair) a-ஐ முதல் கூறு (Component) ஆகவும், b ஐ இரண்டாவது கூறாகவும் உள்ள வரிசைப்பட்ட ஜோடி (a, b) என்பது

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$ என்ற கணமாகும்.

குறிப்புகள்

1. $(a, b) = \{\{a, b\}, \{a\}\}$ என்பதும் சரியே. ஏனெனில் கணத்தில் உறுப்புகளை வரிசை மாற்றலாமே! a-ம், b-ம் வரிசைப்பட்ட ஜோடிகளின் கூறுகள் எனப்படுவன.

2. $a \neq b$ என்றால், $\{\{a, b\}, \{a\}\} \neq \{\{a, b\}, \{b\}\}$ அதாவது $(a, b) \neq (b, a)$.

ஒரு நல்ல முடிவு

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c,\ b = d.$$

நிறுவல் : பாகம் 1 $\Longrightarrow$

தற்கோள் : $(a, b) = (c, d)$

$$\therefore \left\{ \{a\}, \{a, b\} \right\} = \left\{ \{c\}, \{c, d\} \right\}$$

$$\Longrightarrow \{a\} \in \left\{ \{c\}, \{c, d\} \right\}$$

$\Longrightarrow \{a\} = \{c\}$ அல்லது $\{a\} = \{c, d\}$

$$\Longrightarrow c \in \{a\}$$

$$\Longrightarrow c = a$$

$$\therefore \left\{ \{a\}, \{a, b\} \right\} = \left\{ \{a\}, \{a, d\} \right\}$$

$$\Longrightarrow \{a, b\} = \{a, d\}$$

$$\Longrightarrow b = d$$

$$(a, b) = (c, d) \Longrightarrow a = c,\ b = d$$

பாகம் 2 $\Longleftarrow$

தற்கோள் : $a = c, \quad b = d$ என்க.

$$a = c,\ b = d \Longrightarrow (a, b) = (c, d)$$

பாகங்கள் 1-ம், 2-ம் உண்மையாவதால், $(a, b) = (c, d) \iff a = c,\ b = d.$

1·9·2. வரை இலக்கணம்

கார்டீசியன் பெருக்கம் (Cartesian product)

வெற்றற்ற கணம் S-ன் ஓர் உறுப்பை முதல் கூறுகவும், வெற்றற்ற கணம் T-ன் ஓர் உறுப்பை இரண்டாவது கூறுகவும் உள்ள எல்லா வரிசைப்பட்ட ஜோடிகளையும் உறுப்புகளாகக் கொண்ட கணம் குறியீட்டு முறையில்,

$$S \times T = \{ (s, t) \mid s \in S,\ t \in T \}$$

குறிப்பு : 'கார்டீசியன் பெருக்கத்தைச் சுருக்கமாக, 'பெருக்கம்' என்றே சொல்லலாம்.

உதாரணங்கள்

1. $S = \{1, 2\}$, $T = \{3, 4, 5\}$ எனில்

$$S \times T = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\}$$

$$T \times S = \{(3, 1), (4, 1), (5, 1), (3, 2), (4, 2), (5, 2)\}$$

2. $A_1 = \{c_0, c_1, c_2\}$, $A_2 = \{a_1, a_2,\}$ $A_3 = \{b_1, b_2\}$

எனில்

$$A_1 \times A_2 \times A_3 = \left\{\begin{matrix} (c_0,a_1,b_1), (c_0,a_1,b_2), (c_0,a_2,b_1), (c_0,a_2,b_2) \\ (c_1,a_1,b_1), (c_1,a_1,b_2), (c_1,a_2,b_1), (c_1,a_2,b_2) \\ (c_2,a_1,b_1), (c_2,a_2,b_1), (c_2,a_1,b_2), (c_2,a_2,b_2) \end{matrix}\right\}$$

பொதுவாக,

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{a_1, a_2 \ldots a_n) \mid a_i \in A_i, i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

3. $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ என்றால் $(E \triangle B) \times (E - A)$ ஐ வரை.

விடை: $E \triangle B = (E - B) \cup (B - E)$

$$= \{5\} \cup \emptyset$$

$$= \{5\}$$

$E - A = \{1, 2\}$. $\therefore (E \triangle B) \times (E - A) = \{(5,1), (5,2)\}$

பயிற்சி 3

1. $A = \{1, 2\}$, $A \times B = B \times A$ என்பவை தரப்பட்டிருக்கின்றன. B என்ன?

2. $B = \{-1, 1\}$, $C = \{(1, -1), (1, 1), (-1, 1) (-1, -1)\}$ என்க. $A \times B = C$ என்றால், A என்ன?

3. நிறுவுக : $A \times B = B \times A \Longleftrightarrow A = B$.

1·10 கோர்த்தல்கள் (Mappings)

பெண்கள் தலையில் சூடிக் கொள்ளும் மலர்க் கதம்பம் வாழை நாரினால் தொடுக்கப்பட்ட பல மலர்களால் ஆனது அல்லவா? மலர்கள் சிதறாமல் இருக்க, ஒரு மலரை அடுத்த மலரோடு வாழை நார் கோர்த்துக் கொண்டு இருக்கிறது. இந்த வாழை நார் செய்யும் வேலையைக் "கோர்த்தல்" என்கிறோம். நல்முத்துக் களைக் கோர்ப்பது தங்கக் கம்பி; வாழை நார் அல்ல. ஆக, கோர்ப்

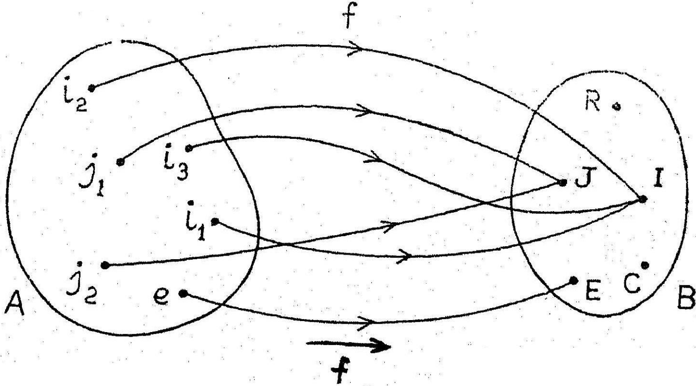
பதிலும் ஒரு விதி இருக்கிறது அல்லவா? இந்த உதாரணங்களின் சாரம் (abstraction) : ஒரு பொருளை மற்றொரு பொருளோடு கோர்த்தல். இதனுடன் சில நிபந்தனைகளை இணைத்து, வரை இலக்கணம் என்ற மெருகேற்றி கணிதத்தில் பயன்படுத்தி விட்டால் கணத்தின் சுவையான, அழகான எல்லா அம்சங்களையும் ஆழ்ந்து அநுபவிக்கலாம்.

1.10.1. உதாரணமாக, $A = \{j_1, j_2, i_1, i_2, i_3, e\}$
$B = \{J, I, E, R, C\}$ என்க.

இங்கே, j_1, j_2 ஜப்பானியரையும், i_1, i_2, i_3 இந்தியரையும் குறிப்பன. e என்பது ஆங்கிலேயனைக் குறிக்கட்டும்.

J, I, E, R, C என்பவை முறையே ஜப்பான், இந்தியா, இங்கிலாந்து, ரஷ்யா, சிலான் நாடுகளின் பிரதமர்கள் என்க.

''ஒரு நாட்டினருக்கு அந்த நாட்டுப் பிரதமர்'' என்ற விதியை (*Rule*)க் கொண்டு, A-லிருந்து B-க்கு ஒரு தொடர்பை உண்டாக்க முயலுவோம்.



படம் 23

ஒரு நாட்டினரை அந்த நாட்டுப் பிரதமரோடுதானே கோர்க்க முடியும்? அதுதானே விதி? விதியின்படி i_1, i_2, i_3 ஆகிய இந்தியரை I என்ற இந்தியப் பிரதமரோடு தொடர்புபடுத்தி விட்டோம். இந்தத் தொடர்பை i லிருந்து I-க்குச் செல்லும் கோடு உணர்த்துகிறது. இந்தக் கோடு நேராகவோ அல்லது வளைவாகவோ இருக்கலாம்.

விதியின்படி, எந்த ஒரு நாட்டினரும் அந்த நாட்டின் பிரதமரைத் தவிர, மேற்கொண்டு வேறு ஒரு பிரதமரோடு தொடர்பு வைத்துக் கொள்ளவில்லை. அதாவது, கொடுக்கப்பட்ட விதியின்படி, A-ன் எந்த ஓர் உறுப்பும் B-ல் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட உறுப்புகளோடு தொடர்பு வைத்துக் கொள்ளவில்லை. விளக்கமாக, A-ன் தனி ஓர் உறுப்புக்கு, B-ல் சரியாகத் தனி ஓர் உறுப்புத் தான் (unique element) உள்ளது.

உதாரணமாக, A-ல் j_2 என்ற உறுப்புக்கு ஏற்ப, சரியாக J என்ற ஓர் உறுப்புதான் B-ல் உள்ளது. A-ல், j_1-க்கு ஏற்ப, சரியாக J என்ற ஓர் உறுப்புதான் B-ல் உள்ளது. A-ல் e என்ற உறுப்புக்கு ஏற்ப சரியாக E என்ற ஓர் உறுப்புத்தான் B-ல் உள்ளது. இம் மாதிரி, A-ன் எந்த ஓர் உறுப்பும் B-ல் சரியாக ஓர் உறுப்புடன் தொடர்புப் பட்டால், இந்தத் தொடர்பை, "A-லிருந்து B-க்குக் கோர்த்தல்", அல்லது, "A-லிருந்து B-க்கு உள் கோர்த்தல்" (Mapping of A **into** B) என்கிறோம். இந்தத் தொடர்புக்குக் காரணமாயிருந்த விதியையே "கோர்த்தல்" (Mapping) என்பதும் உண்டு.

A-ன் பல உறுப்புகளுக்கேற்ப B-ல் ஓர் உறுப்பு இருக்கலாம். ஆனால் A-ன் ஓர் உறுப்புக்கு ஏற்ப B-ல் பல உறுப்புகள் இல்லை. இதுதான் கோர்த்தலின் முக்கியமான தன்மை. இல்லாவிட்டால், இந்தத் தொடர்பு "கோர்த்தல்" ஆகாது. ஓர் உறுப்புடன் வேறு ஓர் உறுப்பு கோர்க்கப் பட்டிருப்பதை $\longmapsto$ என்ற குறியால் தெரியப்படுத்தலாம்.

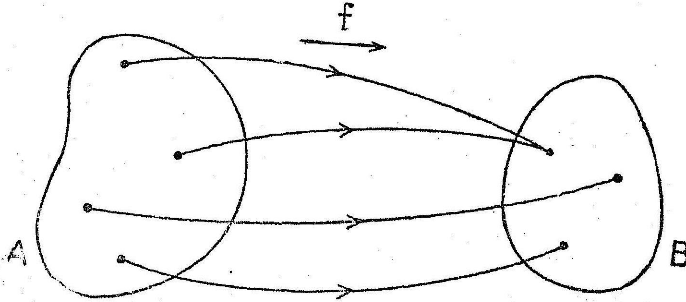
உதாரணமாக, $i_1 \longmapsto I$, $i_2 \longmapsto I$, $i_3 \longmapsto I$, $j_1 \longmapsto J$, $j_2 \longmapsto J$, $e \longmapsto E$. A-லிருந்து B-க்குச் செல்லும் அம்புக் கோட்டை அல்லது இந்தக் கோடு தெரிவிக்கும் விதியை, அதாவது கோர்த்தலை f, g, θ, φ, ψ ... போன்ற குறியீடுகளால் குறிப்பது வழக்கம். f என்ற விதியின் கீழ் A-லிருந்து B-க்குக் கோர்த்தலை $f : A \longmapsto B$ என்று குறிப்பர்.

1·10·2. வரை இலக்கணங்கள்

உள் கோர்த்தல் : (Into mapping)

A என்ற கணத்தின் ஒவ்வொரு தனி உறுப்பையும், B என்ற கணத்துள் சரியாக ஓர் உறுப்போடு தொடர்பு ஏற்படுத்தும் விதி (Rule) யை, **"A-லிருந்து B-க்கு உள் கோர்த்தல்" என்கிறோம்.**

குறியீட்டு முறையில் $f: A \longmapsto B$ என்பது உள் கோர்த்தலைக் குறிக்கும்.



படம் 24. உள் கோர்த்தல்

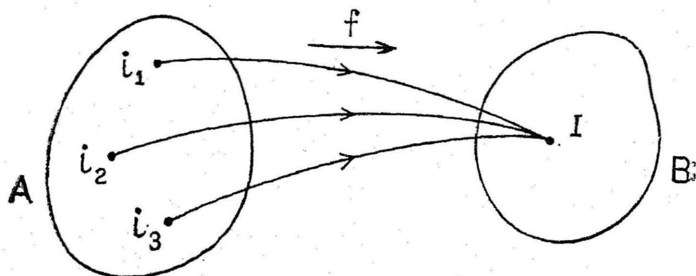
1·10·1-ன் உதாரணத்தில் I என்பது, i_1-ன் f கோர்த்தல் கீழமைந்த எதிர் உரு (Image) எனப்படும். இதையே $f(i_1) = I$ என்று எழுதலாம். சிலர் $i_1 f = I$ என்றும் எழுதுவர். I என்பது i_1-ன் எதிர் உரு என்றால் i_1 என்பது I-ன் மெய்யுரு (Pre-image) எனப்படும். j_1 என்பது J-ன் மெய்யுரு, e என்பது E.ன் மெய்யுரு முதலியன.

B-ல் E, C என்ற உறுப்புகளை எதிர் உருக்களாகக் கொண்ட உறுப்புகள் A-ல் இல்லை. B-ல் உள்ள எல்லா உறுப்புகளும் f-ன் கீழமைந்த எதிர் உருக்களாக இருக்கவேண்டிய அவசிய மில்லை. A-ன் எல்லா உறுப்புகளின், எதிர் உருக்கள் கணம் B முழுமையாகவும் இருக்கலாம்; அல்லது B-ன் உட்கணமாகவும் அமையலாம்.

A ஐ "வரையறை அரங்கம்" (Domain of definition) என்றும், எதிர் உருக்கள் கணத்தை "வீச்செல்லைக் கணம்" (Range Set) என்றும் அழைப்பர். வரையறை அரங்கத்தை dom f என்றும், வீச்செல்லைக் கணத்தை Ran f என்றும் குறியீட்டு முறையில் எழுதுவது வழக்கம்.

f-கோர்த்தலின் கீழ் A என்ற கணத்தின் எதிர் உருக் கணம் B ஆவது ஒருறுப்புக் கணமானால், f ஐ "மாறிலிக் கோர்த்தல்" **(constant mapping) என்போம்.**

f-ன் கீழ், A-ன் எதிர் உருக்கணம், அதாவது வீச்செல்லைக் கணம், B முழுமையாக இருந்தால் ; அதாவது B-ன் ஒவ்வோர்



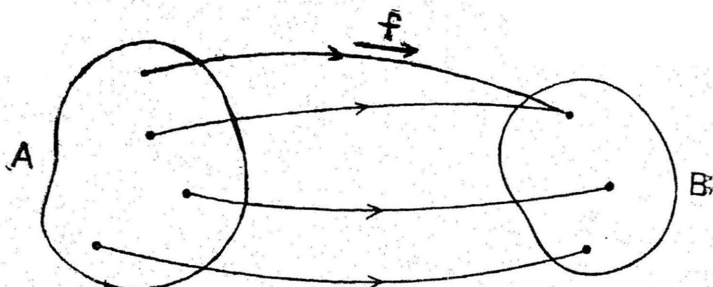
படம் 25. மாறிலிக் கோர்த்தல்.

உறுப்புக்கும் A-ல் மெய்யுரு இருந்தால், f ஐ "முழுக் கோர்த்தல்" (onto-mapping, Surjection) என்பார்கள்.

1·10·3. வரை இலக்கணம் :

முழுக் கோர்த்தல் (onto-mapping).

கணம் A-லிருந்து கணம் B-க்கு உள்கோர்த்தல் f-ன் கீழ் Ran $f = B$ ஆனால், f-க்கு முழுக் கோர்த்தல் என்பது பெயர்.



படம் 26. முழுக் கோர்த்தல்

B-ன் எல்லா உறுப்புகளுக்கும் A-ல் மெய்யுருக்கள் இருக்கின்றன என்றால் f ஒரு முழுக் கோர்த்தலாகும்.

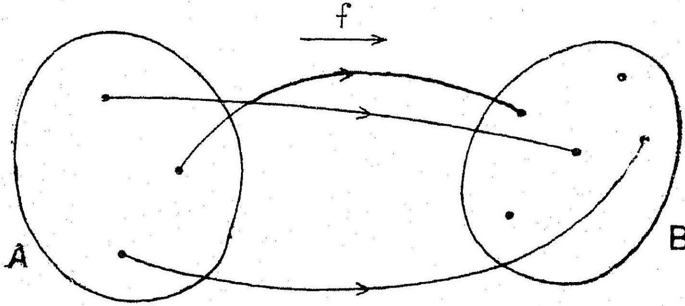
A-ன் பல உறுப்புகள், B-ன் ஓர் உறுப்புக்குக் கோர்க்கப்படலாம் என்றோம். அப்படியின்றி A-ன் வெவ்வேறு உறுப்புகளுக்கு ஏற்ப B-ல் வெவ்வேறு எதிர் உருக்கள்தாம் என்றால்

f-க்கு "ஒன்றுக் கொன்ருன கோர்த்தல்" (1-1 mapping, one-to-one mapping, injection) என்பது பெயர்.

1·10·4. வரை இலக்கணம்

ஒன்றுக்கொன்ருன கோர்த்தல்

A என்ற கணத்திலிருந்து B என்ற கணத்துக்கு உள் கோர்த்தல் f-ன் கீழ், A-ன் வெவ்வேறு உறுப்புகளுக்கு ஏற்ப, B-ல் வெவ்வேறு எதிர் உருக்கள் இருக்குமாளுல், f ஆனது "ஒன்றுக் கொன்ருன கோர்த்தல்" எனப்படும்.



படம் 27. ஒன்றுக்கொன்ருன கோர்த்தல்.

f ஆனது ஒன்றுக்கொன்ருகவும், முழுக் கோர்த்தலாகவும் இருப்பின், f-க்கு "ஒன்றுக்கொன்ருன முழுக் கோர்த்தல்" (1—Onto mapping) என்பது பெயர்.

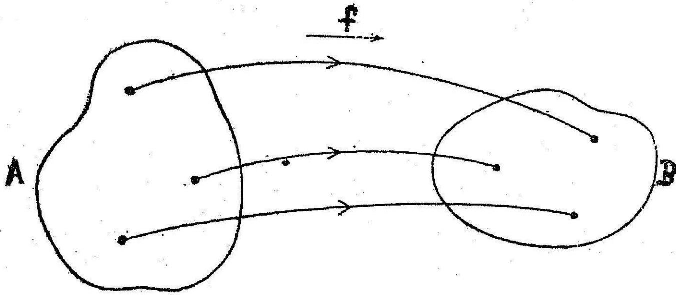
1·10·5. வரை இலக்கணம்.
(1 — 1, முழுக்கோர்த்தல்)

A என்ற கணத்திலிருந்து B என்ற கணத்துக்கு உள் கோர்த்தல் f-ன் கீழ்,

(i) $\text{Ran} f = B$

(ii) A-ன் வெவ்வேறு உறுப்புகளுக்கு ஏற்ப B-ல் வெவ்வேறு எதிர் உருக்கள் f-ன் கீழ் உள்ளன

என்ருல், f-க்கு "ஒன்றுக் கொன்ருன முழுக் கோர்த்தல்" எனப்படும்.



படம் 28. (1—1, முழுக்கோர்த்தல்)

குறிப்புகள்

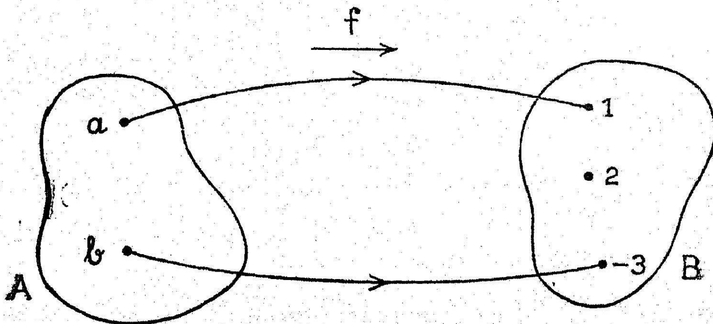
1. இந்த 1 — 1, முழுக் கோர்த்தலில், முடிவுள்ள வரையறை அரங்கத்தின் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையும், முடிவுள்ள எண்ணிக்கையுள்ள எதிர் உருக்களின் அதாவது முடிவுள்ள வீச்செல்லைக் கணத்தின் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையும் சமம்.

2. $A = \{a, b\}$, $B = \{1, 2, -3\}$,

$f : A \longrightarrow B :$ $a \longmapsto 1$, $b \longmapsto -3$ என்றால், $\text{Ran}\, f = \{1, -3\}$.

1, — 3 என்பவை மெய்யெண்கள்.

∵ Ran f ஆனது மெய்யெண்கள் கணம் என்றால் f-க்கு "மெய் சார்பு" (Real function, Real valued function) என்றும், இந்த மெய்யெண் எதிர் உருக்களுக்குச் "சார்பலன்கள்" (functional values) என்பன.

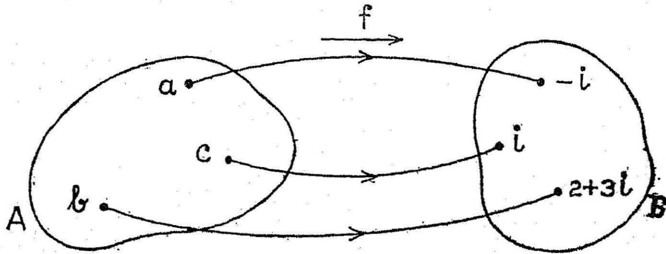


படம் 29. "மெய் சார்பு"

$A = \{a, b, c\}$, $B = \{-i, 2 + 3i, i\}$, $f : A \longrightarrow B$,

$a \overset{f}{\longmapsto} -i$, $b \overset{f}{\longmapsto} 2 + 3i$, $c \overset{f}{\longmapsto} i$ என்ருல்,

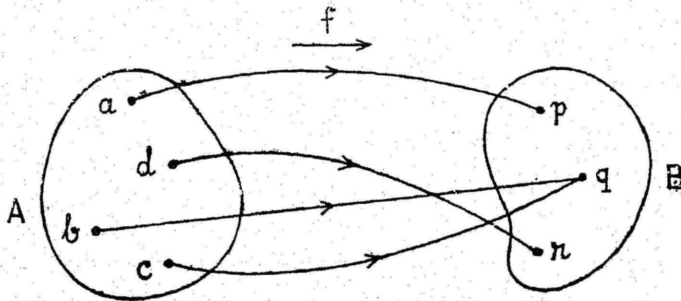
$\text{Ran} f = \{-i, 2 + 3i, i\}$.



படம் 30. கலப்பெண் சார்பு

Ran f ஒரு கலப்பெண் கணமென்பதால், f-க்குக் "கலப்பெண் சார்பு" (complex function, complex valued function) என்பது பெயர்.

4. சில ஆசிரியர்கள் கோர்த்தல் f ஐ, வரிசைப்பட்ட ஜோடிகளை உறுப்புகளாகக் கொண்ட கணமாகவும் எழுதுவது உண்டு. இந்த முறையில் f ஐ எழுதுவது நாகரீகமாகவுள்ளது. உதாரணமாக,



படம் 31.

இங்கே,

$f = \{(a, p), (b, q), (c, q), (d, r)\}$

$\text{dom} f = \{a, b, c, d\}$, $\quad \text{Ran} f = \{p, q, r\}$, $\quad f(a) = p$,
$f(b) = q$, $f(c) = q$, $f(d) = r$.

$a = d$ என்ருல், p-ம் r-ம் சமமாக வேண்டும்.

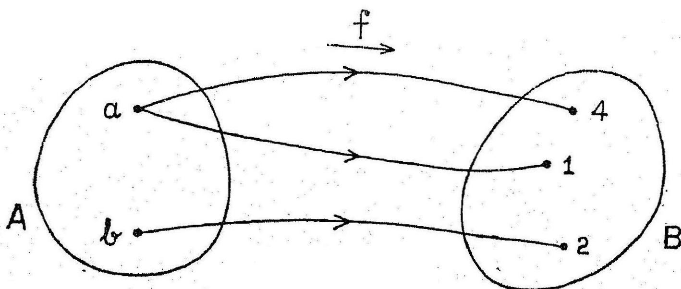
இல்லாவிடில், a-ன் எதிர் உரு p, மறுபடியும் a-ன் எதிர் உரு r என்ருகிவிடும்.

அப்படி ஆகிவிட்டால், A-ன் ஓர் உறுப்புக்கு, B ல் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட உறுப்புகள் என்பது பொருள் ஆகும். அப்பொழுது, f கோர்த்தல் ஆகாது.

பொதுவாக, $(x, y_1) \in f, (x, y_2) \in f \Longrightarrow y_1 = y_2$

1·10·6. உதாரணங்கள்

(1)



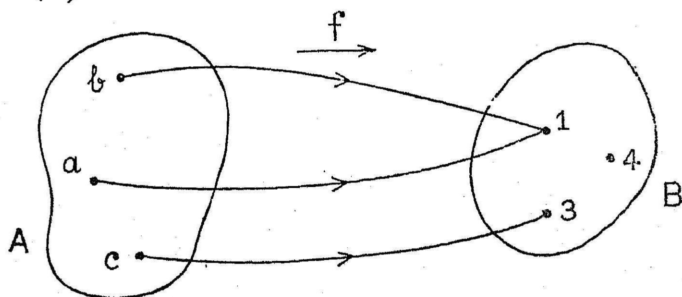
படம் 32. கோர்த்தல் அல்ல.

f என்பது கோர்த்தலாகாது. ஏன் ? வரை இலக்கணப்படி, A-ன் ஒவ்வோர் உறுப்புக்கும் B-ல் ஓர் உறுப்பு இருக்கவேண்டும் அல்லவா ? ஆனல் இங்கே a-க்கு $1 \in B$, $4 \in B$ என்று இரண்டு எதிர் உருக்கள் உண்டு.

$f = \{(a, 1), \ (a, 4), \ (b, 2)\}$

$\therefore$ f, கோர்த்தல் அல்ல.

(2)

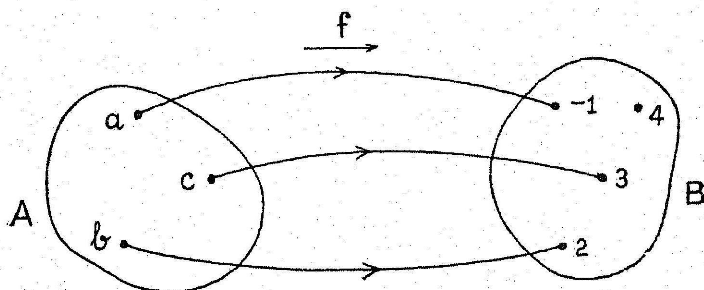


படம் 33. உள் கோர்த்தல் மட்டும்.

$a \longmapsto 1, \quad b \longmapsto 1, c \longmapsto 3.$

$f = \{ (a, 1), (b, 1), (c, 3) \}$ f-ல் வரிசைப்பட்ட ஜோடிகளின் முதல் கூறுகள் dom f ஆகவும், இரண்டாம் கூறுகள் Ran f ஆகவும் அமைந்திருப்பதைக் கவனி. B ஓர் எண்கள் கணமாதலால் f ஒரு மெய் சார்பு; ஆனால் முழுச் சார்பு அல்ல ஏனெனில் Ran $f \neq B$. a, b, c-க்களின் எதிர் உருக்கள் எல்லாம் வெவ்வேறானவை அல்ல. ∴ f, (1 — 1) அல்ல.

(3)



படம் 34. (1—1), ஆனால் "முழு" அல்ல

$f = \{ (a, -1), (b, 2), (c, 3) \}$

A-ன் ஒவ்வொரு தனி உறுப்புக்கும் B-ல் தனி எதிர் உரு இருக்கிறது. ∴ f ஓர் "உள் கோர்த்தல்"; (1 — 1) கோர்த்தலும் கூட ஆகும்.

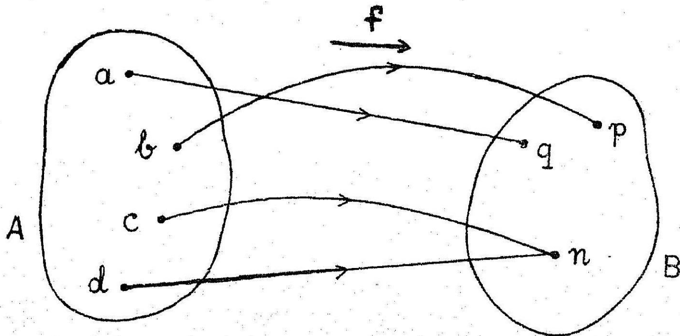
dom $f = A = \{a, b, c\}$

Ran $f = \{-1, 3, 2\}$ $B = \{1, 2, 3, 4\}$

Ran $f \neq B$.

∴ f ஒரு முழுக் கோர்த்தல் அல்ல.

(4)



படம் 35. முழு, ஆனால், (1 —1)அல்ல.

$f: \{(a, q), (b, p), (cn,), (dn,)\}$

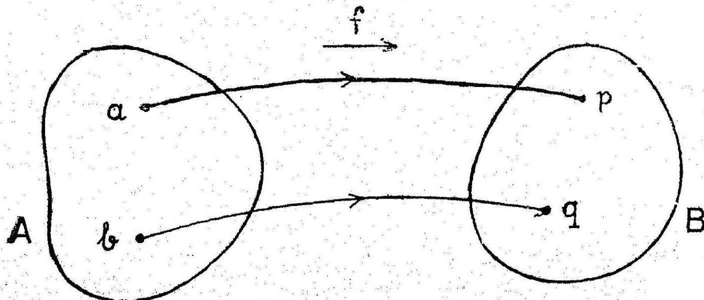
f ஒரு கோர்த்தல் என்பது வெளிப்படை.

dom $f = \{a, b, c, d\}$ Ran $f = \{p, q\ n\} = B$. Ran $B =$
⟹ f ஒரு முழுக் கோர்த்தல்.

c-க்கும் d-க்கும் வெவ்வேறு எதிர் உருக்கள் இல்லை.

∴ f, (1—1) அல்ல. f ஆனது (1—1) ஆகவேண்டும் என்றால் c-ம் d-ம் ஒன்றுபடவேண்டும் (coincide).

(5)



படம் 36. (1 —1), முழுக் கோர்த்தல்.

$f = \{(a, p), (b, q)\}$

A-ன் ஒவ்வோர் உருக்கும் ஏற்ப, f-ன் கீழ், B-ல் ஒரே ஒரு எதிர் உருதான் உண்டு.

$a \longmapsto p$, $b \longmapsto q$. ∴ f, ஒரு கோர்த்தல் ஆகும்.

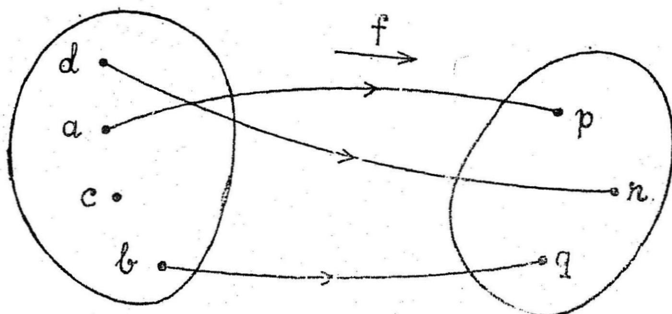
தனித்தனி உறுப்புகளுக்குத் தனித்தனி எதிர் உருக்கள் இருக்கின்றன.

∴ f, (1—1) கோர்த்தல் ஆகும்.

Ran $f = \{p, q\} = B$. ∴ f ஒரு முழுக் கோர்த்தலாகும்.

∴ f, (1—1), முழுக் கோர்த்தல்.

(6)



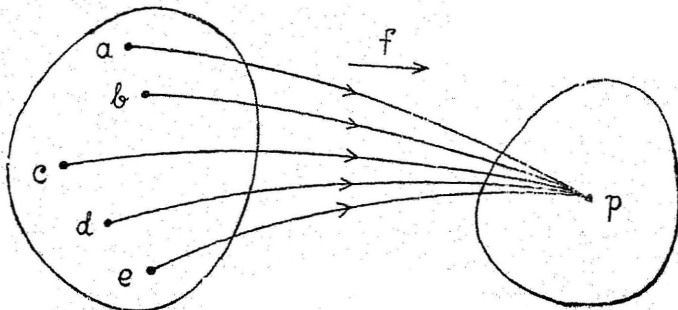
படம் 37. கோர்த்தல் அல்ல.

$f(a) = p$, $f(b) = q$, $f(d) = r$, $f(c) = ?$

c கோர்க்கப்படவில்லை. வரை இலக்கணப்படி, A ன் ஒவ்வோர் உறுப்பையும் அல்லவா f கோர்க்கவேண்டும் ?

∴ f கோர்த்தல் அல்ல.

(7)



படம் 38. "மாறிலி கோர்த்தல்"

A-ன் ஒவ்வோர் உறுப்புக்கும் B-ல் சரியாக ஓர் உறுப்பு எதிர் உருவாக உள்ளது.

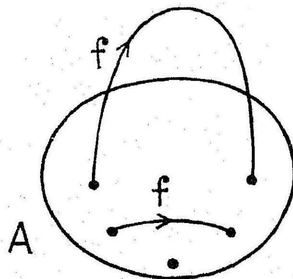
∴ f, ஒரு கோர்த்தல்.

$f = \{(a, p), \ (b, p), \ (c, p), \ (d, p), (e, p)\}$,

ஆனால் A-ன் எல்லா உறுப்புகளுக்கும் B-ல் ஒரே எதிர் உரு p தான் உள்ளது. வெவ்வேறு உறுப்புகளுக்கு f-ன் கீழ் அதே எதிர் உரு இருக்கிறது.

∴ f ஐ "மாறிலி கோர்த்தல்" (Constant mapping) என்பார்கள்.

(8)



படம் 39: "தன்னுள் கோர்த்தல்"

f (1—1) கோர்த்தல். Ran $f \subset A$, f முழுக் கோர்த்தல் அல்ல. கோர்த்தல் ஒரே கணத்துள் நிகழ்வதால், இந்தக் கோர்த்தலை "கணம் A ஐத் தன்னுள் கோர்த்தல்", அல்லது சுருக்கமாக, "தன்னுள் கோர்த்தல்" (mapping of A into itself) என்பதுண்டு.

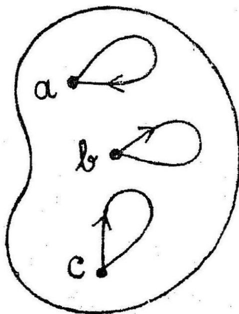
1·10·7· வரை இலக்கணம்

முற்றொருமைக் கோர்த்தல் (Identity Mapping)

ஒரு தன்னுள்கோர்த்தலின் கீழ் ஒரு கணத்தின் ஒவ்வோர் உறுப்பும் தன்னைத் தானே கோர்த்துக் கொண்டால் அதற்கு "முற்றொருமைக் கோர்த்தல்" என்பது பெயர்.

இந்தக் கோர்த்தலை i என்று குறியிடுவது வழக்கம்.

$\therefore i : A \longrightarrow A \implies x \in A \overset{i}{\longmapsto} x \in A$



படம் 40. முற்றொருமைக் கோர்த்தல்

i-ன் கீழ் ஒவ்வோர் உறுப்பின் எதிர் உரு அதுவேயாகும்.
அதாவது $a \overset{i}{\longmapsto} a, \quad b \overset{i}{\longmapsto} b, \ldots$

வெவ்வேறு உறுப்புகளுக்கு வெவ்வேறு எதிர் உருக்களாவதால், i, ஒரு 1—1 கோர்த்தல்.

எல்லா உறுப்புகளுக்கும் அவைகளே எதிர் உருக்களாவதால், dom i = Ran i = A.

$\therefore$ i ஒரு முழுக் கோர்த்தல். $\therefore$ i, (1 — 1), முழுக் கோர்த்தல்

மாற்று வரை

முற்றொருமைக் கோர்த்தல் $i : A \longrightarrow A$ ஆனது

(i) i ஆனது (1 — 1)

(ii) dom i = Ran i

(iii) $i = \{(x, y) \mid y = x\}$

என்ற இலக்கணங்களைக் கொண்டிருக்கும்.

1·10·8 மாதிரிக் கணக்குகள்

1. $f : \mathbf{Z}^+ \longrightarrow \mathbf{R}, \quad x \overset{f}{\longmapsto} \sqrt{x}$ என்றால் f கோர்த்தலாகுமா?

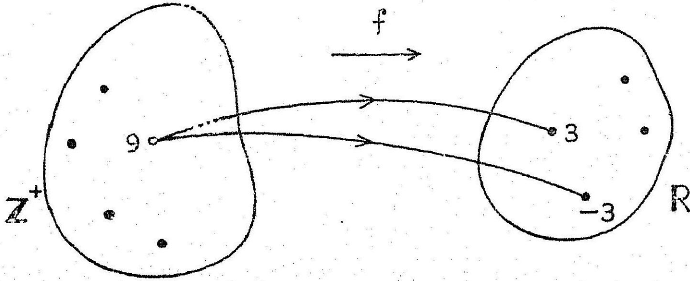
விடை

உதாரணமாக $9 \in Z^+$, $\sqrt{9} = \pm 3 \in R$

$$\therefore 9 \overset{f}{\longmapsto} 3, \quad 9 \overset{f}{\longmapsto} -3$$

அதாவது Z^+-ல் ஓர் உறுப்புக்கு R-ல் பல உறுப்புகள்.

$\therefore f$ கோர்த்தலாகாது.



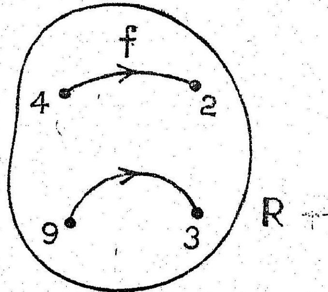
படம் 41

குறிப்பு : இந்தக் கணக்கில் $x \longmapsto +\sqrt{x}$ (நேர் வர்க்க மூலம் மட்டும்), அல்லது $x \longmapsto -\sqrt{x}$ என்றால் f கோர்த்தலாகும்.

2. $f : R^+ \to R^+, x \overset{f}{\longmapsto} \sqrt{x}$ என்றால் f கோர்த்தலாகுமா ?

விடை

உதாரணமாக, $9 \in R^+$ ஐ எடுத்துக்கொள்.



படம் 42

$\sqrt{9} = \pm 3$. $9 \overset{f}{\longmapsto} -3$ என்பது தவறு, ஏனெனில் $-3 \notin R^+$

$\therefore\ 9 \overset{f}{\longmapsto} 3$. $\therefore$ R^+-ல் ஒவ்வோர் உறுப்புக்கும் ஏற்ப R^+ லேயே சரியாக ஓர் எதிர் உருதான் உள்ளது.

$f: R^+ \to R^+$ ஒரு கோர்த்தல் ஆகும். மேலும் R^+-ன் வெவ்வேறு உறுப்புகளின் வர்க்க மூலங்கள் வெவ்வேருனவையே. $\therefore$ f ஒரு (1—1) கோர்த்தல் ஆகும்.

$\text{dom} f = R^+ = \text{Ran} f$ $\therefore$ f ஒரு முழுக் கோர்த்தல்.

$\therefore$ f, ஒரு (1 — 1), முழுக் கோர்த்தல்.

3. $f: Z^+ \ (>1) \to P,\ x \in Z^+ \longmapsto y \in P$ என்பதில் y ஆனது x-க்குக் குறைவில்லாத பகாவெண்களில் மீச்சிறியது என்ருல் f கோர்த்தலா ?

விடை

'குறைவில்லாத' என்ருல் 'சமமாகவும் அல்லது அதிகமாகவும்' என்ற பொருளுடையது.

$P = \{ 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \ldots\ldots \}$,

$Z^+ (>1) = \{ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, \ldots\ldots \}$

$2 \in Z^+$ என்ருல் 2 க்குக் குறைவில்லாத பகாவெண்கள் : 2, 3, 5, 7, ...

இவற்றுள் மீச்சிறியது 2

$\therefore\ 2 \overset{f}{\longmapsto} 2$

இதுபோல் $3 \overset{f}{\longmapsto} 3,\ 4 \overset{f}{\longmapsto} 5,\ 5 \overset{f}{\longmapsto} 5,\ 6 \overset{f}{\longmapsto} 7,\ 7 \overset{f}{\longmapsto} 7$
$8 \overset{f}{\longmapsto} 11,\ 9 \overset{f}{\longmapsto} 11$ ....

$\therefore$ $Z^+ (>1)$-ல் எந்த ஓர் உறுப்புக்கும் P-ல் சரியாக ஓர் எதிர் உரு இருக்கிறது.

$\therefore$ f ஓர் உள் கோர்த்தல். பகா எண்கள் கணம் முடிவில்லாதது. $\therefore$ P-ன் எல்லா உறுப்புகளுமே Z^+-ன் உறுப்புகளின் எதிர் உருக்களாகும். $\therefore$ f ஒரு முழுக் கோர்த்தல்.

$4 \overset{f}{\longmapsto} 5,\ 5 \overset{f}{\longmapsto} 5,\ 6 \overset{f}{\longmapsto} 7,\ 7 \overset{f}{\longmapsto} 7$

∴ Z^+-ன் தனித்தனி உறுப்புகளுக்கு P-ல் தனித்தனி எதிர் உருக்கள் கிடையாது. ஆகையால் f, (1—1) அல்ல.

∴ f என்பது (1—1) அல்லாத முழுக் கோர்த்தல்.

4. **Q**: விகிதமுறு எண்கள் கணம் (Set of rational numbers).

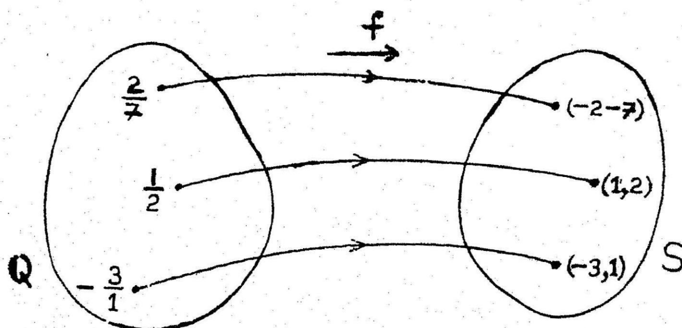
Z: முழு எண்கள் கணம்.

$S: \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} = \{ m, n) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \mid n \neq 0 \}$

விதி (Rule): $f: q \in Q =$ சுருக்கிய விகிதமுறு எண் $\frac{m}{n}$, m-க்கும் n-க்கும் பொதுவான காரணி கிடையாது.

$f: Q \to S$ கோர்த்தலா ? விளக்கு.

விடை



படம் 43

R-ன் ஒவ்வோர் உறுப்புக்கும், S-ல் சரியாக ஓர் உறுப்புத்தான் உள்ளது. ∴ f ஓர் உள் கோர்த்தல் ஆகும்.

(4, 14) $\in S$-க்கு ஏற்ற மெய்யுரு Q-ல் கிடையாது. (4, 14) ஐ $\frac{4}{14}$ என்று எழுதினால், 4 க்கும், 14-க்கும் பொதுவான காரணி, 2, உள்ளது. விதியின்படி Q-ல் இருப்பவைகளுக்கு; தொகுதிக்கும், பகுதிக்கும் பொதுக் காரணி கூடாது. ஆகையால் S-ல் பல உறுப்புகளுக்கு Q-ல் மெய்யுருக்கள் இல்லை.

∴ f ஒரு முழுக் கோர்த்தல் ஆகாது.

Q-ன் வெவ்வேறு உறுப்புகளுக்கு S-ல் வெவ்வேறு எதிர் உருக்கள் உள்ளன.

ஏனெனில் $(a, b) = (c, d) \Longrightarrow a = c;\ b = d$

$$\Longrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

∴ f, (1—1) கோர்த்தல்.

∴ f ஒரு (1—1), ஆனால் முழுக் கோர்த்தல் அல்ல.

5. $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R},\ x \overset{f}{\longmapsto} -x$ என்றால் f ஐ விவரி.

விடை

$-3 \longmapsto 3,\ -2 \longmapsto 2,\ -1 \longmapsto 1,\ 0 \longmapsto 0,\ 1 \longmapsto -1,$ ……… ஒரு மெய்யெண்ணுக்கு ஓர் எதிர்தான் உண்டு. ∴ ஒவ்வோர் உறுப்புக்கும் ஓர் எதிர் உருதான் உள்ளது. ∴ f ஓர் உள் கோர்த்தல்.

$p, q \in \mathbf{R},\ -p = -q \Longrightarrow p = q$

∴ தனித்தனி உறுப்புகளுக்குத் தனித்தனி எதிர் உருக்கள் உண்டு.

∴ f, (1—1) கோர்த்தல்.

$\mathbf{R}$-ன் ஒவ்வோர் உறுப்புக்கும் ஓர் எதிர் $\mathbf{R}$-ல் உண்டு.

$p \in \mathbf{R}$-ன் எதிர் $-p \in \mathbf{R}$; $-p \in \mathbf{R}$-ன் எதிர் உரு $p \in \mathbf{R}$

∴ f ஒரு முழுக் கோர்த்தல்.

∴ f ஒரு (1—1), முழுக்கோர்த்தல்

6. $f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z},\ z \longmapsto z + 1$ என்றால் f ஐ விவரி.

விடை

z என்பது முழு எண். ∴ $z \in \mathbf{Z}$.

$z + 1$-ம் முழு எண் ∴ $z + 1 \in \mathbf{Z}$.

∴ ஒவ்வொரு $z \in \mathbf{Z}$-க்கும் ஒரு $z + 1 \in \mathbf{Z}$ உள்ளது.

∴ f ஓர் உள் கோர்த்தல்.

ஏதேனுமோர் உறுப்பு $z \in \mathbf{Z}$ எனில், $(z - 1) + 1 = z$

அதாவது $f(z - 1) = z$ ∴ z-ன் எதிர் உரு $z - 1 \in \mathbf{R}$.

∴ எந்த ஓர் உறுப்புக்கும் மெய்யுரு இருக்கிறது.

∴ f ஒரு முழுக் கோர்த்தல்.

$z \neq z'$, $z, z' \in \mathbf{Z}$ என்க. ∴ $z + 1 \neq z' + 1$

∴ $f(z) \neq f(z')$

∴ f ஒரு (1—1) கோர்த்தல் ∴ f ஒரு (1 — 1), முழுக் கோர்த்தல்.

1·10·9. வரை இலக்கணம் (கோர்த்தல் வழி) :

முடிவில்லாக் கணம் (Infinite set)

ஒரு கணத்திலிருந்து அதனுடைய சரியான உட்கண (Proper Subset) த்திற்கே ஒரு (1—1) கோர்த்தலை அமைக்க முடியுமென்றால், அந்தக் கணம் முடிவில்லாக் கணமாகும்.

ஏற்கெனவே, முடிவில்லாக் கணத்தை, 'கடைசி உறுப்பு இல்லாத கணம்' என்று வரையறுத்தோம். ஆனால் அநேக கணங்களில் கடைசி உறுப்பு உள்ளதா, இல்லையா என்று அறிவது கடினம். இங்கே கொடுத்த வரை இலக்கணம் சந்தேகத்திற்கு இடம் தராதது.

உதாரணமாக

Z ஐ முடிவில்லாக் கணம் என நிறுவுவோம்.

$\mathbf{Z}_e$: இரட்டை எண்கள் கணம் என்றால், $\mathbf{Z}_e \subset \mathbf{Z}$.

விதி :

$x \in \mathbf{Z}$, $y \in \mathbf{Z}_e$; $y = 2x$, அதாவது, $x \overset{f}{\longmapsto} 2x$ என்றவாறு $f: \mathbf{Z} \Longrightarrow \mathbf{Z}_e$ ஐ வரையறு. ஒவ்வொரு முழுவெண்ணுக்கும் அதன் இரட்டை ஒரே ஒரு எண்தான். ஒவ்வோர் இரட்டை எண்ணும், ஒரே ஒரு முழு எண்ணின் இரட்டை ஆதலால் வெவ்வேறு முழு எண்களுக்கு, வெவ்வேறு எதிர் உருக்கள் உள்ளன. ∴ f, (1—1) $\mathbf{Z}$-ம்; $\mathbf{Z}_e$-ம், $f: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}_e$ என்ற (1—1) கோர்த்தலால் தொடர்புபட்டுள்ளன. மேலும் $\mathbf{Z}_e \subset \mathbf{Z}$ ∴ Z ஒரு முடிவில்லாக் கணம்.

1·10·10. வரை இலக்கணம்

சம கோர்த்தல்கள் (Equal mappings)

ஒரே கணம் A-ன் மீது இரு கோர்த்தல்கள் f, g ஆனவை

(i) $\text{dom}\, f = \text{dom}\, g$

(ii) $f(x) = g(x)$, $\forall\, x \in A$ என்றால் $f = g$, அதாவது f-ம், g-ம் சம கோர்த்தல்கள்.

கடைசியாக, இப்பிரிவை முடிக்குமுன், கோர்த்தலைப் பற்றிய வரை இலக்கணங்களைக் கணங்களைப் பொறுத்து வரையறுக்கலாம்.

1·10·11. வரை இலக்கணம் :

உள்கோர்த்தல் (Into-mapping)

S, T என்பவை இரு வெற்றற்ற கணங்களானால், $S \times T$-ன் ஓர் உட்கணம் f ஆனது, $s \in S$, $t_1, t_2 \in T$,

$(s, t_1) \in f$, $(s, t_2) \in f \Longrightarrow t_1 = t_2$ என்றால் f ஐ S-லிருந்து T-க்கு உள் கோர்த்தல் என்போம்.

1·10·12. வரை இலக்கணம் :

ஒன்றுக்கொன்றான கோர்த்தல் (1—1 mapping)

$f: S \to T$ என்ற உள்கோர்த்தலின் கீழ், $s_1, s_2 \in S$, $s_1 \neq s_2 \Longrightarrow f(s_1) \neq f(s_2)$ என்றாலும், $f(s_1) f(s_2) \Longrightarrow s_1 = s_2$ என்றாலும் f ஐ (1—1) கோர்த்தல் என்பார்கள்.

குறிப்பு : கோர்த்தலை, சிலர் மாற்றம் (Transformation) என்றும் செயலி (Operator) என்றும் அழைப்பர்.

பயிற்சி 4.

(அ) தொடர்பு $f \subseteq \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ என்றால் கொடுத்திருப்பவை கோர்த்தல்களா ?

1. $f = \{(x, x+1) \mid x \in \mathbf{R}\}$ 2. $f = \{(x, 3x) \mid x \in \mathbf{R}\}$

3. $f = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbf{R}\}$ 4. $f = \{x, \cos x) \mid x \in \mathbf{R}\}$

5. $f = \{(x, lx+m) \mid x \in \mathbf{R}\}$ 6. $f = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4\}$

7. $f = \{(x, y) \mid y^2 = x\}$ 8. $f = \{(x, \mid x) \mid x \in \mathbf{R}\}$

(ஆ) 1. $S = \{x_1, x_2, x_3\}$; $f(x_1) = x_2$, $f(x_2) = x_3$, $f(x_3) = x_1$ என்றால் f, முழுக் கோர்த்தல் என நிறுவுக ; (1—1) கோர்த்தலா என்று ஆய்க.

2. $S = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$, $T = \mathbf{Z}$; $f(m, n) = m + n$, $m, n \in \mathbf{Z}$ என்றால் f முழுக் கோர்த்தல் என நிறுவுக; (1—1) கோர்த்தலா என ஆய்க.

1·11. கோர்த்தல்கள் தொகுப்பு (Composition of Mappings)

சேர்க்கைக் கோர்த்தல் (Composite mapping)

கொடுக்கப்பட்ட இரு கோர்த்தல்களில், ஒன்றன் வரையறை அரங்கத்தையும், மற்றதன் வீச்செல்லைக் கணத்தையும் கொண்ட

ஒரு புதிய கோர்த்தலை உருவாக்கலாம். இதனையே கொடுத்த கோர்த்தல்களின் தொகுப்பு அல்லது சேர்க்கை என்போம்.

X, Y, Z என்ற மூன்று கணங்களை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$f: X \to Y$ என்பது $f = \{(x, y) \mid y = f(x)\}$ ஆகவும்,

$g: Y \to Z$ என்பது $g = \{y, z) \mid z = g(y)\}$ ஆகவும் இருக்கட்டும். கோர்த்தலின் வரை இலக்கணப்படி, f-கோர்த்தலில் யாதாவதோர் உறுப்பு $x \in X$-க்கு ஏற்ப ஒரே ஒரு எதிர் உரு $y = f(x) \in Y$ உள்ளதென்பதும், g கோர்த்தலில் யாதாவதோர் உறுப்பு $g \in Y$-க்கு ஏற்ப ஒரே ஒரு எதிர் உரு $z = g(y) = g[f(x)] \in Z$ உள்ளதென்பதும் தெளிவு.

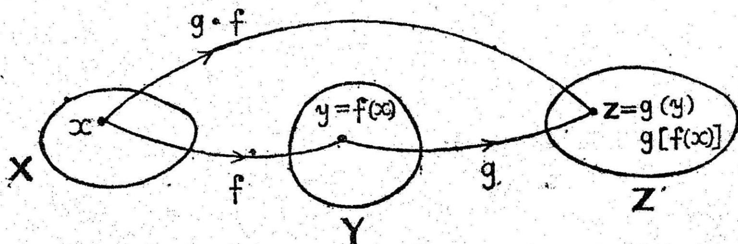
இதனால் X-க்கும் Z-க்கும் இடையே ஒரு தொடர்பை f-ம், g-ம் உண்டாக்குகின்றன. ஒவ்வொரு கட்டத்திலும், எதிர் உருவின் ஒரே முறையால் (Uniquenesss) இந்தப் புதிய தொடர்பு, X ஐ வரையறை அரங்கமாகவும், Z-ன் உட்கணத்தை வீச்செல்லையாகவும் உடைய கோர்த்தலாகும். இந்தப் புதிய கோர்த்தலைச் 'சேர்க்கைக் கோர்த்தல்' என்றும் அழைக்கலாம்.

1·11·1. வரை இலக்கணம்

சேர்க்கைக் கோர்த்தல்

இரண்டு கோர்த்தல்கள் $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ என்பவற்றின் சேர்க்கையான gof : $X \to Z$ என்ற கோர்த்தலின் வரையறை :

$\text{gof} = \{(x, z) \mid z = \text{gof}\ (x)\ g\ [f(x)]\}$, $x \in X, z \in Z$, dom gof $= X =$ dom f, Ran gof $\subseteq Z$



படம் 44. சேர்க்கைக் கோர்த்தல் gof : $X \to Z$.

முக்கியக் குறிப்பு : சேர்க்கைக் கோர்த்தலில் எந்த வரிசையில் சேர்க்கை உண்டாக்கப்படுகிறது என்பது முக்கியம். gof

என்பதில் முதலில் f கோர்த்தல், அதனைத் தொடர்வது g கோர்த்தல், அதாவது, 'g வரும் பின்னே, f வரும் முன்னே'.

மாதிரிக் கணக்கு

$f = \{(x, \sqrt{x}) \mid x \in \mathbf{R},\ X \geqq 0\}$

$g = \{(x, 3x + 5) \mid x \in \mathbf{R}.\}$ என்க.

இதனுல், $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = 3x + 5$ என்ருல் $(\text{fog})\ x$, $(\text{gof})\ x$ என்பவற்றைக் காண். fog-ம் gof-ம் சமமா ?

விடை

$(\text{fog})\ x = f[g(x)] = f(3x + 5) = \sqrt{3x + 5}$

$\text{dom fog} = \{ x \in \text{dom}\ g \mid g(x) \in \text{dom}\ f \}$

$= \{ x \in \mathbf{R} \mid 3x + 5 \in \text{dom}\ f \}$

$= \{ x \mid 3x + 5 \geqq 0 \}.$

ஆனுல் $(\text{gof})\ x = g[f(x)] = g(\sqrt{x}) = 3\sqrt{x} + 5$

$\text{dom gof} = \{ x \in \text{dom}\ f \mid f(x) \in \text{dom}\ g \}$

$= \{ x \geqq 0 \mid \sqrt{x} \in \mathbf{R} \} = \{ x \mid x \geqq 0 \}$

$\sqrt{3x + 5} \neq 3\sqrt{x} + 5$, அதாவது, $(\text{fog})\ x \neq (\text{gof})\ x$

$\text{dom fog} \neq \text{dom gof}$

ஆகையால் $\text{fog} \neq \text{gof}$.

1·12. வரை இலக்கணம் :

நேர்மாறு கோர்த்தல் (Inverse Mapping)

S, T வெற்றற்ற கணங்கள் என்றும்,

$f = \{ (s, t) \mid s \in S, t \in T \}$ என்ற கோர்த்தல் $f : S \to T$ (1-1) என்றும் கொண்டால் f-ன் நேர்மாறு கோர்த்தலை

$f^{-1} = \{ (t, s) \mid (s, t) \in f \}$ என்று வரையறுப்போம்.

பயிற்சி 5

$S = \{ 1, 2, 3 \}$, $T = \{ 1, 2, 3 \}$ என்க.

கீழே சில சார்புகள் தரப்பட்டுள்ளன. அவற்றிற்கு நேர்மாறுகள் உண்டானுல், பட்டியலமை.

1. $f = \{ (1, 1), (2, 2), (3, 3) \}$

   $f = \{ (1,2), (2, 1), (3, 1) \}$

3. $f = \{ (1, 3), (3, 2), (2, 1) \}$

4. $f = \{ (1, 1), (3, 1), (2, 1) \}$

1·13. சமநிலைத் தொடர்புகள் (Equivalence Relations)

$a = 2$ என்ற சமன்பாட்டில், $=$ குறியீடு a-க்கும், b-க்கும் ஒரு தொடர்பை ஏற்படுத்துகிறது. இந்தத் தொடர்பைச் சமத்துவம் அல்லது சமன்பாடு என்கிறோம். $a = 2$ என்பதை a ஆனது 2-க்குச் சமம் என்று படிக்கிறோம். இந்த $=$ தத்துவத்தைப் பொது நிலையாக்கினால் (generalize) நமக்குக் கிடைப்பது 'சமநிலைத் தொடர்பு' என்ற அழகிய கருத்து.

A ஒரு கணம் என்க. A-ன் உறுப்புகளால் வரிசைப்பட்ட ஜோடிகளை அமை. (a, b) என்பது வரிசைப்பட்ட ஜோடியின் உருமாதிரி என்க.

$a \sim b$ என்பது (i) அர்த்தமுள்ளதான (ii) உண்மையானதோ அல்லது பொய்யானதோ, ஆனால் உண்மையாயும், அதே நேரத்தில் பொய்யாவும் இல்லாத ஒரு கூற்று என்க.

ஒவ்வொரு வரிசைப்பட்ட ஜோடி (a, b)-லிருந்து $a \sim b$ என்ற கூற்றுக்கு அமைந்த கோர்த்தலுக்கு A-கணத்துள் தொடர்பு (Relation in the set A) என்போம். $a \sim b$ என்பதை aRb என்றும் எழுதுவதுண்டு.

1·13·1. வரை இலக்கணம்

சமநிலைத் தொடர்பு (Equivalance Relation)

A என்ற கணத்துள் தொடர்பு $\sim$

(i) $a \sim a \;\forall\; a \in A$ தானுதல் பண்பு (Reflexive Property),

(ii) $a \sim b \Longrightarrow b \sim a \;\forall\; a, b \in A$ சமச்சீர் பண்பு (Symmetric Property),

(iii) $a \sim b,\; b \sim c \Longrightarrow a \sim c \;\forall\; a, b, c \in A$ செல்லும் பண்பு (Transitive Property),

என்ற மூன்று பண்புகளையும் பெற்றிருந்தால், $\sim$-க்கு A-கணத்துள் சமநிலைத் தொடர்பு எனப்படும்.

$a \sim b$ ஐ 'a சமநிலை b' என்று படிக்கவும். a என்பது b-க்குச் சமநிலை இல்லை யென்றால் $a \nsim b$ என்று எழுதுவோம்.

1·13·2. உதாரணங்கள்

1. $<$: மெய்யெண்கள் கணத்துள் ஓர் எண் மற்றதை விடக் குறைந்தது என்பதைக் குறிக்கும் தொடர்பு.

உதாரணமாக, $2 < 2$ என்பது தவறு. ∴ $<$-க்குத் தானுதல் பண்பு இல்லை. ∴ $<$ சமநிலைத் தொடர்பு ஆகாது.

2. $\leqq$: மெய்யெண்களுள் தொடர்பு

$a \leqq a$ என்பது சரி. ∴ தானுதல் பண்பு உண்டு.

ஆனால் $1 \leqq 2$ என்றால் $2 \leqq 1$ என்பது தவறு. ∴ சமச்சீர் பண்பு இல்லை.

∴ $\leqq$ சமநிலைத் தொடர்பு ஆகாது.

3. $=$: மெய்யெண்களுள் தொடர்பு.

$\forall\, a, a = a$ ∴ தானுதல் பண்பு உண்டு.

$a = b \Longrightarrow b = a$ ∴ சமச்சீர் பண்பு உண்டு.

$a = b, b = c \Longrightarrow a = c$ ∴ செலுத்தும் பண்பு உண்டு.

∴ $=$ சமநிலைத் தொடர்பு ஆகும்.

4. $\equiv$: ஒரு மாறி இயற்கணிதக் கோவைகள் (Single valued algebraic expressions) கணத்துள் ஒரு கோவையும் மற்றொரு கோவையும் முற்றொருமை.

$\forall\, a(x), \quad a(x) \equiv a(x)$

∴ தானுதல் பண்பு உண்டு.

$a(x) \equiv b(x) \Longrightarrow b(x) \equiv a(x)$

∴ சமச்சீர் பண்பு உண்டு.

$a(x) \equiv b(x), b(x) \equiv c(x) \Longrightarrow a(x) \equiv c(x)$

∴ செலுத்தும் பண்பு உண்டு.

∴ $\equiv$ சமநிலைத் தொடர்பு ஆகும்.

மிகவும் முக்கியமான உதாரணம்

Z என்ற முழு எண்கள் கணத்துள் 'ஒருங்கிசைவு' (congruence) என்ற மிக முக்கியமான சமநிலைத் தொடர்பை இங்கே அறிமுகம் செய்வோம்.

$a, b, m \in Z$, $a - b$ என்ற முழு எண் m ஆல் மீதியில்லாமல் வகுபட்டால், அதாவது, $a - b$ என்பது m-ன் மடங்கு என்றால் a-க்கு ஒருங்கிசைவு b, மட்டு m என்போம்.

குறியீட்டு முறையில், $a \equiv b \pmod m$ என்று இந்தத் தொடர்பை எழுதுவோம். அதாவது, $a, b, m \in Z$, $a \equiv b \pmod m \Longleftrightarrow a - b = km$, என்றவாறு k என்ற முழு எண் இருக்கிறது.

இப்பொழுது, $\equiv$ தொடர்பு, ஒரு சமநிலைத் தொடர்பு என்று நிறுவுவோம்.

தானுதல் பண்பு

$k = 0$ என்றால், $a - a = 0 \cdot m$ $\therefore$ $a \equiv a \pmod m$
$\therefore$ தானுதல் பண்பு உண்டு.

சமச்சீர் பண்பு

$$\begin{aligned} a \equiv b \pmod m &\Longrightarrow a - b = km \\ &\Longrightarrow b - a = (-k)m \\ &\Longrightarrow b - a \text{ என்பது } m\text{-ன் மடங்கு} \\ &\Longrightarrow b \equiv a \pmod m \end{aligned}$$

$\therefore$ சமச்சீர் பண்பு உண்டு.

செலுத்தும் பண்பு

$a, b, c, m \in Z$, $a \equiv b \pmod m$, $b \equiv c \pmod m$ என்க.

$\therefore$ $a - b = k_1 m$, $b - c = k_2 m$, $k_1, k_2 \in Z$

$\therefore$ $a = k_1 m + b$, $b = k_2 m + c$

$\therefore$ $a = k_1 m + k_2 m + c = m(k_1 + k_2) + c \Longrightarrow a - c = (k_1 + k_2)m$

ஆனால், $k_1 \in Z, k_2 \in Z \Longrightarrow k_1 + k_2 \in Z$

$\therefore$ $a - c$ என்பது m-ன் மடங்கு.

$\therefore$ $a \equiv c \pmod m$

$\therefore$ $a \equiv b \pmod m$, $b \equiv c \pmod m \Longrightarrow a \equiv c \pmod m$

$\therefore$ செலுத்தும் பண்பு உண்டு.

$\therefore$ முழு எண்கள் கணத்துள் ஒருங்கிசைவுத் தொடர்பு ஒரு சமநிலைத் தொடர்பு ஆகும்.

1.13.3. சமநிலை இனம் (Equivalence class)

A என்ற கணத்துள் $\sim$ என்ற சமநிலைத் தொடர்பு இருப்பதாக வைத்துக் கொள்வோம். அதாவது $a \sim b$, $a, b \in A$ உண்மையானால் a என்பது b க்குச் சமநிலை என்பதாகும்.

A-ல் ஒரு குறிப்பிட்ட உறுப்பு a என்க.

$x \in A$, $a \sim x$ என்ற பண்புடைய x ஐப் போன்று, A-ல் உள்ள எல்லா உறுப்புகளையும் கொண்ட கணத்திற்கு "a-ன் சமநிலை இனம்" (Equivalence class of "a") அல்லது "a ஐயுடைய சமநிலைக் கணம்" (Equivalence set containing "a") என்பது பெயர். "a"-க்கு a-ன் சமநிலை இனத்தின் உரு மாதிரி (Representative) என்பது பெயர். a-ன் சமநிலை இனத்தின் குறியீடு : $[a]$

1.13.4. வரை இலக்கணம்

"a-ன் சமநிலை இனம்"

A என்ற கணத்துள் $\sim$ என்பது சமநிலைத் தொடர்பு என்க.

$\forall\, a \in A;\quad [a] = \{x \in A \mid x \sim a\}$ என்பது

"a-ன் சமநிலை இனம்" எனப்படும்.

a-என்பது இந்த இனத்தின் உருமாதிரி எனப்படும்.

கீழ்க்கண்ட உதாரணத்தை நன்குக ஆய்வோம். பல உண்மைகள் புலனாகும்.

Z-ல் $\equiv$ என்ற ஒருங்கிசைவு ஒரு சமநிலைத் தொடர்பு என்று நிறுவினோம். உதாரணமாக, Z-ல் $a \sim b$ என்றால் $a - b$ என்பது 5-ன் மடங்கு என்க. அதாவது, $a \sim b \Longrightarrow a \equiv b \pmod 5$.

இந்தச் சமநிலைத் தொடர்புடன் இயைந்த சமநிலை இனங்கள் யாவை ? $[3]$-ன் உறுப்புகள் யாவை ?

வரை இலக்கணப்படி, $[3] = \{x \in \mathbf{Z} \mid x \sim 3\}$

அதாவது $x - 3$ என்பது 5-ன் மடங்கு.

$\therefore\ x = 3 + 5k,\quad k \in \mathbf{Z}$.

$k = \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$ என்ற மதிப்புகளுக்கு x-ன் மதிப்புகளைக் காண்.

$k = -3.\qquad x = 3 + 5(-3) = -12$

$k = -2,\qquad x = 3 + 5(-2) = -7$

$k = -1,\qquad x = 3 + 5(-1) = -2$

$k = 0. \qquad x = 3+5(0) = 3$

$k = 1, \qquad x = 3+5(1) = 8 \ldots \ldots$

$\therefore \quad [3] = \{\ldots, -12, -7, -2, 3, 8, 13, 18, \ldots\}$

இதுபோல்,

$[0] = \{\ldots, -15, -10, -5.\ 0, 5, 10, 15. \ldots\}$

$[1] = \{\ldots, -14, -9, -4, 1, 6, 11, 16, \ldots\}$

$[2] = \{\ldots, -13, -8, -3, 2, 7, 12, 17, \ldots\}$

$[3] = \{\ldots, -12, -7, -2, 3, 8, 13, 18, \ldots\}$

$[4] = \{\ldots, -11, -6, -1, 4, 9, 14, 19, \ldots\}$

$[5] = \{\ldots, -10, -5, 0, 5, 10, 15, 20, \ldots\}$

$[6] = \{\ldots, 11, 16, 21; \ldots\}$

இங்கு $[0] = [5]$; $[6] = [1] \ldots$ என்பதைக் கவனிக்க.

இது போல், $[0] = [5] = [10] = \ldots, \quad$ (I)

$[1] = [6] = [11] = \ldots, \quad$ (II)

$[2] = [7] = [12] = \ldots \quad$ (III)

$[3] = [8] = [13] = \ldots \quad$ (IV)

(I)-ல் $0 \sim 5$, அதாவது $0 \equiv 5 \pmod 5$, $5 \sim 10$, $0 \sim 10, \ldots$ என்பதையும், (II)-ல் $2 \sim 7$, $7 \sim 12, \ldots$ என்பதையும் கவனி. இது போன்ற அமைப்பை, (III), (IV) ஆகியவற்றிலும் காணலாம்.

I-ல் யாதாவதோர் உருமாதிரி, உதாரணமாக 5 ஐயும், *II*-ல் யாதாவதோர் உருமாதிரி 11 ஐயும் எடுத்துக்கொள். $5 \not\equiv 11 \pmod 5$; அதாவது $5 \nsim 11$.

இதேபோல் *I, II, III, IV*...ஆகிய சமநிலைத் தொடர்களில், ஒரு தொடரின் யாதாவதோர் உருமாதிரியும், பிறிதொரு தொடரின் யாதாவதோர் உருமாதிரியும் சமநிலையில் அமைவதில்லை.

ஆனால் அதே தொடரில் எந்த இரு உருமாதிரிகளும் சமநிலைத் தொடர்பில் அமைகின்றன.

$[0] \neq [1]$ அல்லவா? ஒன்றில் உள்ள உறுப்புகளுள் எவையும் மற்றொன்றில் இல்லை. ஆகவே $[0]$-ம், $[1]$-ம் பொது உறுப்பிலிக் கணங்கள்.

இதேபோல் சமமில்லாத சமநிலை இனங்களின் எந்த ஜோடியும் பொது உறுப்பிலிக் கணங்கள். அதாவது, $[0], [1]; [0], [2]; \ldots, [1], [2],; [2], [3], \ldots \ldots [3], [4] \ldots$ என்பவை பொது உறுப்பிலிக் கணங்கள்.

$[a] \neq [b]$, $[a] \cap [b] = \emptyset$. என்று பொதுவாக எழுதலாம்.

மேலும், $[0], [1], [2], [3], [4]$ என்ற சமமில்லாத கணங்கள் Z-ன் உட்கணங்களாய் இருப்பதுடன் இந்தக் கணங்களின் உறுப்புகள் அனைத்தும், Z-ன் உறுப்புகளாய் இருக்கின்றன. அதாவது, $[0] \cup [1] \cup [2] \cup [3] \cup [4] = Z$.

ஆகையால், Z-ன் உட்கணங்களான $[0], [1], [2], [3], [4]$ என்பவை

(i) $[0] \cup [1] \cup [2] \cup [3] \cup [4] = Z$,

(ii) $[0], [1], [2], [3], [4]$-களின் ஜோடிகள் அனைத்தும் பொது உறுப்பிலிக் கணங்கள்.

என்ற பண்புகளை உடையனவாகையால், இந்த உட்கணங்கள் Z-ன் பிரிவினையை அமைக்கின்றன.

இந்த அழகிய உதாரணத்தின் அம்சங்களைத் திரட்டிக் கீழ்க் கண்ட தேற்றமாகப் பொதுநிலையாக்குவோம்.

1·13·5· தேற்றம்

$\sim$ என்பது A என்ற கணத்துள் சமநிலைத் தொடர்பு என்க. $a, b, c, d \in A$ என்றால்

1. $a \in [b] \Longrightarrow [a] = [b]$
2. $[a] = [b] \Longleftrightarrow a \sim b$
3. $[a] \cap [b] \neq \emptyset \Longrightarrow a \sim b$
4. $[a] \cap [b] = \emptyset \Longleftrightarrow a \nsim b$
5. $c \in [a], d \in [b], [a] \neq [b] \Longrightarrow c \nsim d$

நிறுவல்

1. $a \in [b]$

சமநிலை இனத்தின் வரை இலக்கணப்படி $a \sim b$

$x \in [a]$ என்க. $\therefore x \sim a$.

$x \sim a, a \sim b \implies x \sim b$ (செலுத்தும் பண்பு)

$\implies x \in [b]$

$\therefore \; x \in [a] \implies x \in [b]$ என்றால் $[a] \subseteq [b]$.

இப்பொழுது, $y \in [b]$ என்க.

சமநிலை இனத்தின் வரை இலக்கணப்படி, $y \sim b$

$a \sim b, \implies b \sim a$ (சமச்சீர்ப் பண்பு)

$y \sim b, b \sim a \implies y \sim a$ (செலுத்தும் பண்பு)

$\implies y \in [a]$

$\therefore \; y \in [b] \implies y \in [a]$.

$\therefore \; [b] \subseteq [a]$

$\therefore \; [a] \subseteq [b], [b] \subseteq [a] \implies [a] = [b]$.

2. **பாகம் 1** $\implies$

$x \in [a]$ என்க. சமநிலை இனத்தின் வரை இலக்கணப்படி,

$x \in [a] \implies x \sim a$

$\implies a \sim x$ (சமச்சீர்ப் பண்பு)

$[a] = [b] \implies x \in [b]$

$\implies x \sim b$ (சமநிலை இனத்தின் வரை இலக்கணம்)

$a \sim x, x \sim b \implies a \sim b$ (செலுத்தும் பண்பு)

$\therefore [a] = [b] \implies a \sim b$

பாகம் 2 $\impliedby$

$a \sim b$ என்க.

$a \sim b \implies a \in [b]$ சமநிலை இனத்தின் வ. இ.

$\implies [a] = [b]$ (1)-ல் நிறுவியபடி

$\therefore [a] = [b] \iff a \sim b$.

3. $x \in [a] \cap [b] \Longrightarrow x \sim a \quad \wedge \; x \sim b$

$\Longrightarrow a \sim x \quad \wedge \; x \sim b$

$\Longrightarrow a \sim b$ செலுத்தும் பண்பு.

$\Longrightarrow [a] = [b]$ (2)-ல் நிறுவியபடி

4. பாகம் 1 $\Longrightarrow$

$[a] \cap [b] = \emptyset \Longrightarrow x \in [a] \;\wedge\; x \notin [b]$

$\Longrightarrow x \sim a \quad \wedge \quad x \nsim b$

$\Longrightarrow a \sim x \quad \wedge \quad x \nsim b$

$\Longrightarrow a \nsim b$ (செலுத்தும் பண்பு மீறப்பட்டது).

பாகம் 2 $\Longleftarrow$

$[a] \cap [b] \neq \emptyset \Longrightarrow a \sim b$ என்று நிறுவினேம்.

$\therefore \; a \nsim b \Longrightarrow [a] \cap [b] = \emptyset$.

5. $c \in [a], \; d \in [b] \Longrightarrow [c] = [a], [d] = [b]$

$[a] \neq [b] \Longrightarrow [c] \neq [d]$

(2)-ல் நிறுவியபடி, $c \sim d \Longrightarrow [c] = [d]$

$\therefore \; [c] \neq [d] \Longrightarrow c \nsim d$

$\therefore$ (5) நிறுவப்பட்டது.

1.13.6. முக்கியமான தேற்றம்

A என்ற கணத்துள் $\sim$ என்பது சமநிலைத் தொடர்பு என்றல், $\sim$-ன் சமநிலை இனங்களைக் கொண்ட கணம் A-ன் பிரிவினையை அமைக்கும்.

நிறுவல்

ஒவ்வோர் உறுப்பு $a \in A$-ம், $a \sim a$ என்ற தானுதல் பண்பு உடையது.

$\therefore$ சமநிலை வரை இலக்கணப்படி, $a \in [a]$.

ஆகையால் A-ன் ஒவ்வோர் உறுப்பும் குறைந்த பட்சம் ஒரு சமநிலை இனத்திலாவது இருக்க வேண்டும். அதாவது சமநிலை இனங்களின் கூட்டுக் கணம் $= A$. முன் தேற்றத்தில், இரண்டு

வெவ்வேறு சமநிலை இனங்களுக்குப் பொதுவான உறுப்பு A-ல் இல்லை என்று (2), (3)-ல் நிறுவினோம். (இங்கே நிறுவுக !) இதனால் சமநிலை இனங்களின் ஜோடிகள் பொது உறுப்பிலிக் கணங்கள் என்று அறிகிறோம்.

∴ சமநிலை இனங்களின் கணம் A-ன் பிரிவினையை அமைக்கும்.

1.13.7. ஈரிணைச் செயலிகள் (Blnary Operations)

மெய்யெண்களைப் பொறுத்த வழக்கமான கூட்டல், கழித்தல் பெருக்கல், வகுத்தல் ஆகிய செயலிகள், குறிப்பாக ஈரிணைச் செயலிகள், நமக்கு ஏற்கெனவே அறிமுகமானவை. கண இயல் கணிதத்தில் நாம் இப்பொழுது படித்த கணங்களின் கூட்டு, கணங்களின் இடைவெட்டு - இவற்றைப் பொறுத்த $\cup$, $\cap$ ஆகியவையும் ஈரிணைச் செயலிகளே. முழு எண்களைப் பொறுத்த $\equiv$ என்கிற ஒருங்கிசைவு ஒரு சமநிலைத் தொடர்பு என்று படித்தோம் அல்லவா? $\equiv$-ம் ஓர் ஈரிணைச் செயலியே. இப்பொழுது மேற்கண்ட செயலிகளெல்லாம் செயல்படும் கணத்துள் எவையேனும் இரண்டு உறுப்புகளை இணைத்து, அந்தக் கணத்துள்ளேயே ஒரு புதிய உறுப்பை உண்டாக்க வல்லவை.

உதாரணமாக, $a, b \in Z$ என்றால் $a+b \in Z$.

$3, 7 \in Z$ என்றால், $3+7 \in Z$, அதாவது $10 \in Z$.

$+$ என்ற செயலி, Z-ன் உறுப்புகளான a ஐயும் b ஐயும் இணைத்து, Z-ல் $a+b$ என்ற உறுப்பை ஏற்படுத்துகிறது.

∴ $+$ ஐ Z-ன் மீதுள்ள ஈரிணைச் செயலி என்போம்.

இந்த உதாரணத்தில் $+$ என்பதற்குப் பதிலாக, $*, 0, \cdot$, முதலிய குறியீடுகளையும் பயன்படுத்தலாம் என்பதுடன், பயன்படுத்தப்பட்ட குறியீடு என்ன செயலி என்றும் சொல்லவேண்டும்.

இதே உதாரணத்தில் $*$ வழக்கமான கூட்டல் என்றால், $3 * 7 = 10$. செயலி என்ன என்று விளக்கிவிட்டால் அதை எப்படிக் குறித்தால் என்ன?

மற்றோர் உதாரணத்தை ஆராயலாம்.

$A = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5 \}$ என்க.

A-ல், $5 + 4 = 3$; $4 + 2 = 0$, $3 + 3 = 0$, ... என்க.

திகைக்கக் கூடாது. $+$ எப்பொழுதும் "வழக்கமான கூட்ட" லைத்தான் குறிக்க வேண்டுவதில்லை. இங்கே, $+$-ன் செயல் என்ன வெனில், A-ன்எவையேனும் இரு உறுப்புகளை வழக்கமாகக் கூட்டி, கிடைத்த தொகையை 6ஆல் வழக்கமாக வகுத்தால் வரும் மீதியைத் தருவது. இதன்படி; 5 ஐயும், 4 ஐயும் வழக்கமாகக் கூட்ட வரும், தொகை 9 அல்லவா? 9 ஐ 6 ஆல் வழக்கமாய் வகு. மீதி $3.3 \in A$ ∴ $+$ ஆனது ஈரிணைச் செயலி.

∴ $5 + 4 = 3$.

மீதியாக வரும் எண் A-ல் இல்லை யென்றால், $+$ ஐ ஈரிணைச் செயலி என்று சொல்ல மாட்டோம்.

Aஐ 'முழு எண்கள், மட்டு' கணம் (Set of integers modulo 6) என்று சொல்வது வழக்கம்.

$+$ ஐ 'A-ன் மீதுள்ள ஈரிணைச் செயலி' என்று சொல்லுவோம்.

1.13.8. வரை இலக்கணம்
ஈரிணைச் செயலி

A ஒரு வெற்றற்ற கணமானல், A-ன் மீதுள்ள ஈரிணைச் செயலி $*$ என்பது A-ன் உறுப்புகளான ஒவ்வொரு வரிசைப் பட்ட ஜோடி (a,b), $a \in A$, $b \in A$ யுடன், Aயினுள் **சரியாக** ஒரு உறுப்புடன் இணைக்கும் இணைப்பு விதி (Rule of correspodence) ஆகும். உருவாக்கப்பட்ட உறுப்பை $a * b$ என்று எழுதுவோம்.

குறிப்புகள்

மேற்கண்ட வரை இலக்கணத்தில் கோடிட்ட சொற்களைச் சற்று ஆராயுங்கள்.

$*$ என்பது A மீதுள்ள ஈரிணைச் செயலியாக இருக்க வேண்டுமானல், A-ன் ஒவ்வொரு ஜோடி உறுப்புகள் a, b-க்கு ஏற்ப $a * b$ என்ற உறுப்பை $*$ உருவாக்கவேண்டும். அதாவது, $*$ ஆல் இணைக்க முடியாத உறுப்புகள் A-ல் இருக்கக் கூடாது. இந்த கருத்தைத்தான், ஒவ்வொரு என்ற சொல் குறிக்கிறது.

ஒவ்வொரு ஜோடி உறுப்புகள் $a; b \in A$-க்களை, $*$ ஆல் இணைக்க, $a * b$ என்பது ஒரே ஓர் உறுப்பாய்த்தான் நமக்குக் கிடைக்க வேண்டும். இதுவே, சரியாக ஒரு என்பதன் அழுத்தம். உதாரணமாக, $a_1, a_2; b_1, b_2, \in A$, $a_1 = a_2, b_1 = b_2$
$\Longrightarrow a_1 * a_1 = a_2 * b_2$.

விவாதத்தில் எடுத்துக் கொள்ளப்பட்ட ஒரு செயலி 'சரியாக ஒரு', அதாவது, 'ஒரே ஒரு' உறுப்பை உருவாக்குவதால், அதை 'நல்வறையறை'யுடைய (Well defined) செயலி என்போம்.

கடைசியாக, 'உள்' என்று கோடிட்ட சொல்லின் முக்கியத்துவம் என்ன? செயலி $*$, ஈரிணைச் செயலியாக வேண்டுமானால், $a * b$, A-னுள் இருத்தல் வேண்டும். அதாவது, ஒவ்வொரு $a, b \in A$-க்கும். $a * b$, A-ன் உறுப்பாக வேண்டும். $*$-ன் இந்தப் பண்புக்கு அடைப்புப் பண்பு (Closure property) என்பது பெயர்.

1·13·9. வரை இலக்கணம் :

அடைப்பு, பரிமாற்று, சேர்ப்புவிதிகள்

1. S என்ற கணத்தில், ஈரிணைப்புச் செயலி $*$-ன் கீழ், $x, y \in S \Longrightarrow x + y \in S$ என்றால், S என்பது $*$-ன் கீழ் அடைக்கப்பட்டது என்போம்.

2. கணம் S-ன் மீது ஈரிணைச் செயலி $*$-ன் கீழ்,

$\forall\, x, y \in S, x * y = y * x$ என்றால், $*$ என்பது பரிமாற்று விதிக்கு (Commutative law) உட்பட்டது என்போம்.

3. கணம் S-ன் மீது ஈரிணைச் செயலி $*$ ன் கீழ்

$\forall\, x, y, z \in S, (x * y) * z = x * (y * z)$ என்றால்,

$*$ என்பது சேர்ப்பு விதி (Associative law)-க்கு உட்பட்டது என்போம்.

Z-ன் மீது வழக்கமான வகுத்தல் ஈரிணைச் செயலி ஆகாது. ஏன்? 4 ஐ 5 ஆல் வழக்கமாக வகுத்தால் வருவது முழு எண் ஆகுமா?

அதாவது, $4 \in Z, 5 \in Z \not\Longrightarrow \frac{4}{5} \in Z$. $\frac{4}{5} \notin Z$.

$\therefore$ Z ஆனது வழக்கமான வகுத்தலால் அடைக்கப்படவில்லை.

$\therefore$ Z மீது வழக்கமான வகுத்தல், ஈரிணைச் செயலி ஆகாது.

Z மீது வழக்கமான கூட்டல், பெருக்கல் ஈரிணைச் செயலிகள். இவை பரிமாற்று, சேர்ப்புப் பண்புகள் உடையன. ஏன் ?

4. S என்ற கணத்தின் மீது ஈரிணைச் செயலிகள் $*, \cdot$ என்க.

(i) $\forall\, x, y, z \in S;\ x * (y \cdot z) = (x * y) \cdot (x * z)$ என்றால் $\cdot$ மீது $*$-க்கு இடது பங்கீட்டு விதி உண்டு என்றும்,

(ii) $\forall\, x, y, z \in S;\ (x \cdot y) * z = (x * z) \cdot (y * z)$ என்றால் $\cdot$ மீது $*$-க்கு வலது பங்கீட்டு விதி உண்டு என்றும் சொல்லுவோம்.

உதாரணம்

கணங்களில் $\cap, \cup$ என்ற செயலிகள் ஒன்றின் மீது வலது, இடது பங்கீட்டு விதிகள் உடையவை.

$$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$$
$$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$$

1·14. அட்டவணை

கொடுக்கப்பட்ட கணம் குறைவான எண்ணிக்கையுள்ள உறுப்புகளைக் கொண்டதாயிருந்தால் இந்தக் கணத்தின் மீது ஈரிணைச் செயலியினால் ஏற்படும் விளைவுகளை அட்டவணைப்படுத்தலாம்.

கணம் S என்றால், அதன் உறுப்புகளைக் கிடையாகவும் (horizontally), நிலைக்குத்தாகவும் (vertically) எழுதவும். $a, b \in S$, $*$ என்பது S-ன் மீது ஈரிணைச் செயலி என்க. அட்டவணையில் a-ன் தலைமையில் அமைந்த நிரையும் (Row), b-ன் தலைமையில் அமைந்த நிரலும் (Column) வெட்டுமிடத்தில் $a * b$ ஐ அமை. முதலில் நிரை, பிறகு தான் நிரல் என்பதைக் கவனி. இப்படியே அட்டவணையை நிரப்பி விடலாம்.

S-ன் ஒவ்வொரு ஜோடி உறுப்புகளையும் $*$ ஆல் இணைப்பதன் விளைவு இந்த அட்டவணையில் எங்கோ ஓரிடத்தில் இருக்குமாகையால் இந்த அட்டவணையே இணைப்பு விதியை வரையறுக்கும்.

இந்த அட்டவணையைப் பெரும்பாலும் 'பெருக்கல் அட்டவணை' (Multiplication table), அல்லது, 'செயலி அட்டவணை' (Operation table) என்போம். 'பெருக்கல் அட்டவணை' என்றவுடனே, செயலியானது, வழக்கமான பெருக்கலாகத்தான் இருக்க வேண்டும் என்பதில்லை. எந்தச் செயலியாயிருந்தாலும் கிடைக்கும் அட்டவணையைப் 'பெருக்கல் அட்டவணை' என்று சொல்லுவது வழக்கம்.

உதாரணம் 1

$S = \{ 0, 1, 2, 3, 4 \}$ என்க.

ஈரிணைச் செயலி $+$: S-ன் எவையேனும் இரு உறுப்புகளின் வழக்கமான கூட்டுத் தொகையை 5 ஆல் வழக்கமாய் வகுத்து மீதியைக் கண்டுபிடித்தல். இந்தக் குறிப்பிட்ட கணத்தை எச்ச இனம், மட்டு 5 என்பர்.

$3 \in S$, $4 \in S$ என்றால் 3, 4-ன் வழக்கமான கூட்டுத்தொகை $= 7$. 7 ஐ 5 ஆல் வகுக்க, மீதி 2.

$\therefore$ 3, 4 ன் மீது $+$-ன் விளைவு $= 2$

குறியீட்டு முறையில் $3 + 4 = 2$

இந்த விளைவுகளைக் கீழ்க்கண்டவாறு அட்டவணைப் படுத்தலாம்.

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

அட்டவணை 1

இந்த அட்டவணையைப் படிப்பது எப்படி? உதாரணமாக,

+	0	1	2	3	4
0					
1					
2					
3					
4			1		

$4 + 2$ என்பது என்ன? 4-ன் நிரையும், 2-ன் நிரலும் வெட்டுமிடம் 1.

$\therefore \quad 4 + 2 = 1$.

இந்த அட்டவணையின் மூலமாய், $+$-ன் பண்புகளை ஆராயலாம்.

1. S-ன் மீதான $+$-ன் விளைவுகள் S-ல் அடங்கியுள்ளன.

$\therefore$ $+$-ன் கீழ் S அடைக்கப்பட்டது. $\therefore$ $+$-க்கு அடைப்புப் பண்பு உண்டு.

2. $4 + 1 = 0 \quad 1 + 4 = 0 \quad \therefore \; 4 + 1 = 1 + 4$

$2 + 4 = 1 \quad 4 + 2 = 1 \quad \therefore \; 2 + 4 = 4 + 2$

$3 + 1 = 4 = 1 + 3$ முதலியன, முதலியன.

$\therefore$ $+$-க்குப் பரிமாற்றுப் பண்பு உண்டு.

3. $(1 + 2) + 0 = 3 + 0 = 3$

$1 + (2 + 0) = 1 + 2 = 3$

$\therefore \quad (1 + 2) + 0 = 1 + (2 + 0)$

$\therefore$ $+$-க்குச் சேர்ப்புப் பண்பு உண்டு.

4. $1 + 0 = 0 + 1 = 1; \quad 2 + 0 = 0 + 2 = 2;$

$0 + 0 = 0$ ..., ..., பொதுவாக, $\forall x \in S, \; 0 + x = x + 0 = x$

அதாவது S-ன் எந்த உறுப்பும், S-ன் 0 என்ற உறுப்புடன், செயல்பட்டால், அந்த உறுப்பு மாற்றம் அடைவதில்லை. இந்த 0 ஐ, S-ன் 'முற்றொருமை' (Identity element) அல்லது '$+$-ன் முற்றொருமை' (Identity for the operation) என்போம்.

1·14·1. வரை இலக்கணம்

முற்றொருமை உறுப்பு

S என்ற கணத்தின் e என்ற உறுப்பு, S-ன் x என்ற எந்த உறுப்புடனும் ஈரிணைச் செயலி $*$-ன் கீழ்; $x * e = e * x = x$ என்று அமைந்தால், e என்பது S-ன் முற்றொருமை உறுப்பு எனப்படும். முற்றொருமை உறுப்பு என்பதற்கு முற்றொருமை என்றும் சுருக்கமாகக் கூறலாம்.

5. $3+2=0=2+3$, $4+1=0=1+4$ ... ...

1 என்பது 4-ன் நேர்மாறு எனப்படும். இதுபோல் 4 என்பது 1-ன் நேர்மாறு (Inverse) எனப்படும். 3 என்பது 2-ன் நேர்மாறு ஆகும். 2 என்பது 3-ன் நேர்மாறு, முதலியன. S-ன் ஏதாவதோர் உறுப்பு x எனில், $x+y=0=y+x$ என்றவாறு அமைந்த உறுப்பு y என்பது, x-ன் நேர்மாறு எனப்படும்.

1·14·2. வரை இலக்கணம்

ஓர் உறுப்பின் நேர்மாறு (Inverse of an element)

S என்ற கணத்தில் ஈரிணைச் செயலி $*$-ன் கீழ் e என்பது முற்றொருமையானால், S-ன் உறுப்புகள் x, y ஆகியவை $x * y = y * x = e$ என்றவாறு இருந்தால் $*$-ன் கீழ் x ஐ y-ன் நேர்மாறு எனவும், y ஐ x-ன் நேர்மாறு எனவும் சொல்லுவோம்.

குறியீடு : x^{-1} என்பது x-ன் நேர்மாற்றைக் குறிக்கும்.

மேற்கண்ட உதாரணத்தில், $+$-ன் கீழ்,

1. S அடைக்கப்பட்டது.

2. S-ன் எந்த இரு உறுப்புகளும் பரிமாற்றுப் பண்பு உடையன.

3. S-ன் எந்த மும்மைகளும் (Triplets) சேர்ப்புத் தன்மையன.

4. S-ல் முற்றொருமை உண்டு.

5. S-ல் ஒவ்வோர் உறுப்புக்கும் S-ல் சரியாக ஒரு நேர்மாறு உண்டு. அடுத்த அத்தியாயத்தில், மேற்கண்ட பண்புகளுடைய S ஐக் குலம் என்போம்.

மேற்கண்ட உதாரணத்தில் உள்ள உறுப்புகள் எல்லாம் முழு எண்களாக அமைந்து விட்டன. மேலும், நமக்குத் துவக்கப்பள்ளி முதல் வழக்கப்பட்ட கூட்டலும், 5 ஆல் வழக்கமாக வகுத்தலும் ஆகிய செயலிகள் இந்த உதாரணத்தில் அமைத்துள்ளன. இந்த அட்டவணையில் முழு எண்களுக்குப் பதில் குறியீடுகளையும் எழுதலாம். மேற்கண்ட அட்டவணையைக் கீழ்க்கண்டவாறும் எழுதலாம்.

	e	a	b	c	d
e	e	a	b	c	d
a	a	b	c	d	e
b	b	c	d	e	a
c	c	d	e	a	b
d	d	e	a	b	c

அட்டவணை 2

இந்த அட்டவணை 2-ல் காணப்படும் $*$-க்கு, 'இவற்றைக் கூட்டி, இதால் வகுத்து' என்று நமக்குத் தெரிந்த வழக்கமான மொழியில் வரை இலக்கணம் இல்லை. அட்டவணையே $*$-ன் வரை இலக்கணம்; வேறு திட்டவட்டமாகக் கொள்கை வடிவில் $*$-க்கு வரை இலக்கணம் இல்லை. இதனுல் இந்த அமைப்பைச் 'சாரம்' (abstract) அல்லது 'அருவம்' எனலாம்.

இருப்பினும், 'அட்டவணை 1-ன் பண்புகளும், அட்டவணை 2-ன் பண்புகளும் முற்றிலும் ஒன்ருனவையே. (Identical).

அட்டவணைகள் 1, 2 — இவற்றின் அடிப்படை அமைப்புகள் (Basic structures) முற்றிலும் ஒன்ருனவையே.

அட்டவணை 1-ல், S-ம் $+$-ம் சேர்ந்து 'கணித முறை' (Mathematical system) எனப்படும். இந்தக் கணித முறையை $(S, +)$ என்று குறியீட்டு முறையில் எழுதலாம். அட்டவணை 2-ல் $T = \{a, b, c, d, e\}$ என்ருல், $(T, *)$ என்பது ஒரு கணித முறை. ஆகவே ஒரு கணமும், அதன் மீது வரையறுக்கப்பட்ட ஈரிணைச் செயலியும் சேர்ந்து ஒரு கணித முறையாகும். $(T, *)$ ஐ 'அருவமான கணித முறை' (abstract mathematical system) எனலாம்.

1·15. கணித முறைகள் (Mathematical systems)

1·15·1. வரை இலக்கணம்

இயற்கணித முறை (Algebraic system)

ஒரு வெற்றற்ற கணமும், அதன் மீது வரையறுக்கப்பட்ட ஒன்ருே அல்லது ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட பல ஈரிணைச் செயலிகளும்

சேர்ந்திருக்கும் அமைப்புக்குக் கணித முறை (mathematical system) அல்லது இயற் (algebraic) கணித முறை என்பது பெயர்.

பல கணித முறைகளை அவற்றின் பண்புகளுக்கு ஏற்ப வகுப்பாக்கம் (classification, இனப்பிரிவினை) செய்வது தான் 'அருவமான இயற்கணிதத் (Abstract Algebra) திற்கு வழி அமைப்பது அல்லது வழி கோலுவதாகும்.

மேற்கண்ட $(T, *)$ அருவமான கணித முறைக்கான அட்டவணை 2-ல் a, b, c, d, e-க்களுக்கு முறையே, 1, 2, 3, 4, 0 என்ற மதிப்புகள் கொடுத்தால் நமக்குக்கிடைப்பது அட்டவணை' ல் கண்ட $(S, +)$ என்ற கணித முறை. அருவமான கணித முறைககு உருவம் கொடுத்தபின் திட்டவட்டமான கணித முறை கிடைத்தது. $(S,+)$-க்கு $(T, *)$-ன் மாதிரி (model) என்பது பெயர். இதுபோல் $(T, *)$-ல் a,b,c, d, e-க்குக் குறிப்பிட்ட பொருள்களுடன் பல்வேறு 'மாதிரி'களை அமைக்கலாம்.

அருவமான கணித முறையும், அதன் மாதிரிக்கணித முறையும் முற்றிலும் ஒன்றுனவையே (அமைப்புகள் வரையில்).

அதிமுக்கியமான கணித முறைகள்

இனி வரப்போகும் அத்தியாயங்களில் கீழ்க்கண்ட கணித முறைகள் வெகுவாகக் கையாளப்படுவதால் இவற்றை நன்கு ஆழ்ந்து படிப்போம்.

1·15·2. முழு எண்கள் முறை

முழு எண்களின் கணத்தின் குறியீடு Z என்றும், முடிவில்லாத கணம் (பார்க்க : 1·10·9) என்றும் பார்த்தோம்.

Z-ன் மீது வழக்கமான கூட்டலும் $(+)$, வழக்கமான பெருக்கலும் $(\cdot)$ அடிப்படையான ஈரிணைச் செயலிகளாவன. இந்தச் செயலிகள் சேர்ப்பு, பரிமாற்று, $+$-ன் மீது $\cdot$ க்கு இடது, வலது பங்கீட்டு விதிகளையுடையன.

யாதாவதொரு $x \in Z$, $0 + x = x + 0 = x$

$\therefore$ Z-ல், $+$-க்கு 0 என்பது முற்றொருமை உறுப்பு ஆகும்.

யாதாவதொரு $x \in Z$, $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$

$\therefore$ Z-ல், $\cdot$-க்கு 1 என்பது முற்றொருமை உறுப்பு ஆகும்.

Z-ல், x, y என்ற உறுப்புகள், $x + y = 0 = y + x$ என்றவாறு இருந்தால், x-ஐ y-ன் நேர்மாறு என்றும், y ஐ x-ன் நேர்மாறு என்றும் வரையறுப்போம். ஈரிணைச் செயலி $+$ என்றால் இந்த நேர்மாற்றை, கூட்டலின் (additive) நேர்மாறு என்றும், எதிர் என்றும் அழைப்பர். x-ன் எதிர் உறுப்பை (negative) $-x$ என்று குறியிடுவோம்.

$$\therefore \quad x + (-x) = (-x) + x = 0$$

Z-ல் ஒவ்வொரு முழு எண்ணுக்கும் ஓர் எதிர்தான் உண்டு. நேர்மாறுகள் இருப்பதற்கு முற்றொருமை அவசியம்.

Z-ல் எந்த உறுப்புக்கும் வழக்கமான பெருக்கல் $\cdot$-ன் கீழ் நேர்மாறு கிடையாது. ஏன் ? விடை : 1·13·9 ஐப் பார்க்க.

கூட்டலுக்கு அடித்தல் விதி (cancellation law for addition) யாவது $a, b, x \in Z, \quad a + x = b + x \Longrightarrow a = b$

பெருக்கலுக்கு அடித்தல் விதி : $a, b, x \in Z, x \neq 0$, $ax = bx \Longrightarrow a = b$.

கவனிக்க : $a \cdot x$ ஐ ax என்றும், $a + (-b)$ ஐ $a - b$ என்றும் எழுதுவோம்.

முழு எண்களின் முப்பாக விதி (Law of Trichotomy) :

m, n என்பவை எவையேனும் இரு முழு எண்கள் எனில், $m = n$ என்றோ, $m < n$ என்றோ, $m > n$ என்றோ, ஏதாவது ஒன்றாக இருக்கவேண்டும்.

1·15·3. 2 × 2 அணிகள் (2 × 2 Matrices)

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ என்ற வடிவில், a, b, c, d ஆகிய உறுப்புகளைக் கொண்ட ஒரு வரிசை அமைப்பு (array)க்கு 2 × 2 அணி (Matrix) என்பது பெயர். 2 × 2 என்பதை '2-க்கு 2' என்று படிக்கவும்.

2 × 2 அணியில் 2 நிரைகளும் (rows), 2 நிரல்களும் (columns) உள்ளன. முதல் நிரையில் a-ம், b-ம்; இரண்டாவது நிரையில் c-ம், d-ம் ; முதல் நிரலில் a-ம், c-ம், இரண்டாவது நிரலில் b-ம், d-ம் உள்ளன. இந்த அணியின் 4 உறுப்புகள் a, b, c, d என்பன

மெய்யெண்களாகவோ, கலப்பெண்களாகவோ, வேறெந்த குறியீடுகளாகவோ இருக்கலாம்.

வரை இலக்கணம்

சம அணிகள் (Equal matrices)

இரண்டு 2×2 அணிகளில், ஓர் அணியின் ஒவ்வோர் உறுப்பும், மற்ற அணியின் ஒத்த உறுப்பும் சமமானால் அவ்விரு அணிகளும் சமம் என்போம்.

குறியீட்டு முறையில், $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \iff \begin{matrix} a = p, & b = q, \\ c = r, & d = s. \end{matrix}$

வரை இலக்கணம்

இரு அணிகளின் கூட்டல்

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + p & b + q \\ c + r & d + s \end{pmatrix}$$

1·15·4. மெய்யெண்களை உறுப்புகளாகக் கொண்ட எல்லா 2×2 அணிகளையும் உறுப்புகளாகக் கொண்ட கணத்தை S என்க.

(i) இரண்டு மெய்யெண்களைக் கூட்டினால் ஒரு மெய்யெண் கிடைக்கிறது.

∴ S-ன் இரண்டு அணிகளைக் கூட்டினால் வரும் அணியின் உறுப்புகளும் மெய்யெண்களே. ∴ இரண்டு அணிகளின் கூட்டுத்தொகையும் S-ல் உள்ளது.

∴ S-ன் மீது வழக்கமான கூட்டல் என்பது ஈரிணைச் செயலியாகும்.

∴ S ஆனது $+$ ஆல் அடைக்கப்பட்டது.

(ii) எவையேனும் இரண்டு மெய்யெண்களின் வழக்கமான கூட்டல் பரிமாற்றுப் பண்புடையது.

$$a, b, c, d, p, q, r, s \in R, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + p & b + q \\ c + r & d + s \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} p + a & q + b \\ r + c & s + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

∴ S-ல் $+$-க்குப் பரிமாற்றுப் பண்பு உண்டு.

(iii) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix} \in S$ என்றால்,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix} \right]$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p+w & q+x \\ r+y & s+z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a+(p+w) & b+(q+x) \\ c+(r+y) & d+(s+z) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (a+p)+w & (b+q)+x \\ (c+r)+y & (d+s)+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+p & b+q \\ c+r & d+ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix}$$

$$= \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix}$$

∴ அணிகளின் கூட்டலுக்குச் சேர்ப்புத் தன்மை உண்டு.

பூச்சியமும் மெய்யெண்தானே? ஆகவே $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in S$.

இந்த 2×2 அணியை S-ன் பூச்சிய உறுப்பு (zero element) என்பர். இதனைப் பூச்சிய அணி என்றும் சொல்லுவார்கள். இதன் குறியீடு 0 அல்லது [0].

(iv) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in S$ என்றால்,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+a & 0+b \\ 0+c & 0+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+0 & b+0 \\ c+0 & d+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

∴ S-ன் பூச்சிய அணிதான் + -க்கு முற்றொருமை உறுப்பு ஆகும்.

(v) $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-a & b-b \\ c-c & d-d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$\therefore$ S-ல் $+$ -ன் கீழ் $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$-ன் நேர்மாறு $\begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$ என்பதாகும்.

பொதுவாக, S-ன் ஒவ்வோர் அணி A-க்கும் சரியாக ஒரு கூட்டலின் நேர்மாறு $-A$ ஆகும்.

$\therefore$ மெய்யெண்களை உறுப்புகளாகக் கொண்ட 2×2 அணிகள் அனைத்தையும் உடைய கணம் S-ன் மீது வழக்கமான கூட்டல் $+$ ஈரிணைச் செயலியாகும்.

தவிர, $+$ -க்குப் பரிமாற்று, சேர்ப்புப் பண்புகள் உள்ளன.

மேலும் $+$ -க்கு முற்றொருமை உறுப்பும், நேர்மாறும் உண்டு.

1·15·5. வரை இலக்கணம்

2 × 2 அணிகளின் பெருக்கம்

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ என்றால்,

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{pmatrix}$$

என்று வரையறு.

இதற்கு நிரை-நிரல் பெருக்கல் (row by column multiplication) என்பது பெயர்.

1·15·6. மெய்யெண்களை உறுப்புகளாகக் கொண்ட 2×2 அணிகளையுடைய கணத்தை S என்போம்.

(i) இரண்டு மெய்யெண்களைக் கூட்டினாலும் பெருக்கினாலும் வருவது மெய்யெண். S-ன் அணிகள் பெருக்கலில், மெய்யெண்கள் கூட்டலும், பெருக்கலும் சம்பந்தப்பட்டுள்ளன. இரு அணிகளின் பெருக்குத் தொகையின் உறுப்புகள் மெய்யெண்களே.

$\therefore \quad A \in S,\ B \in S \Longrightarrow AB \in S.$

$\therefore$ S-ல் $\cdot$-க்கு அடைப்புப் பண்பு உண்டு.

அதாவது S-ன் மீது, $\cdot$ ஆனது ஈரிணைச் செயலியாகும்.

(ii) பொதுவாக, $A, B \in S$, $AB \neq BA$.

உதாரணமாக, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

என்றால்,

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix},\ BA = \begin{pmatrix} 5 & -10 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$AB \neq BA.$

ஆகையால் $\cdot$ -க்குப் பரிமாற்றுப் பண்பில்லை.

(iii) $\cdot$-க்கு S-ல் முற்றொருமை உறுப்பு உண்டு.

அதுதான் $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

ஏனெனில் $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cdot 1 + b\cdot 0 & a\cdot 0 + b\cdot 1 \\ c\cdot 1 + d\cdot 0 & c\cdot 0 + d\cdot 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

இந்த முற்றொருமை உறுப்பு $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ஆனது, I என்ற குறியீட்டால் வழங்கப்படும்.

$\therefore \quad \forall A \in S,\ IA = AI = A$

(iv) பொதுவாக, சில அ
நேர்மாறுகள் உண்டு.

$ad - bc \neq 0$ என்றால்தான் $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$-க்குப் பெருக்கலின் நேர்மாறு உண்டு. இம்மாதிரி அணிகளுக்குச் சிறப்பில்லா அணிகள் என்பது பெயர்.

இந்த நிபந்தனையின் கீழ், $\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}$-ன்பெருக்கலின் நேர்மாறு

$$\begin{vmatrix} \frac{d}{\triangle} & -\frac{b}{\triangle} \\ -\frac{c}{\triangle} & \frac{a}{\triangle} \end{vmatrix}, \quad \triangle = ad - bc \neq 0 \text{ என்பதாகும்.}$$

இது எப்படி வந்தது என்பதைப் பிறிதோர் அத்தியாயத்தில் காண்போம்.

(v) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix}$ என்றால்,

$$AB = \begin{pmatrix} ap + br & aq + bs \\ cp + dr & cq + ds \end{pmatrix}, BC = \begin{pmatrix} pw+qy & px+qz \\ rw+sy & rx+sz \end{pmatrix}$$

$$(AB)\,C = \begin{pmatrix} ap + br & aq + bs \\ cp + dr & cq + ds \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} apw+brw+aqy+bsy & apx+brx+aqz+bsz \\ cpw+drw+cqy+dsy & cpx+drx+cqz+dsz \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a(pw+qy)+b(rw+sy) & a(px+qz)+b(rx+sz) \\ c(pw+qy)+d(rw+sy) & c(px+qz)+d(rx+sz) \end{pmatrix}$$

$$= A\,(BC)$$

$\therefore$ S-ல் $\cdot$-க்குச் சேர்ப்புப் பண்பு உண்டு.

1·15·7. முழு எண்கள், (மட்டு, பகா எண் 5)

5-க்குப் பதிலாக எந்தப் பகா எண்ணையும் எடுத்துக் கொள்ளலாம். ஓர் உதாரணமாக; 5 ஐ எடுத்துக் கொண்டோம்; வேறொன்றுமில்லை. இந்தக் கணித முறையில் அமைந்த கணத்தை Z_5 என்று குறிக்கலாம்.

Z_5 ஆனது 0, 1, 2, 3, 4 என்ற உறுப்புகளைக் கொண்ட கணம்.
$Z_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Z_5-ன் மீது $+, \cdot$ ஆகிய இரு ஈரிணைச் செயலிகளை வரையறுப்போம்.

$+$ -ன் வரையறை : Z_5-ன் இரு உறுப்புகளையும் வழக்கமாகக் கூட்டி, வந்த தொகையை 5 ஆல் வழக்கமாக வகுக்க, மீதியைக் காண்.

உதாரணமாக, $3 + 4$ என்பது யாது ?

3, 4-ன் வழக்கமான கூட்டுத் தொகை 7.

7 ஐ 5 ஆல் வழக்கமாய் வகுக்க, மீதி $2 \in Z_5$.

$\therefore \quad 3 + 4 = 2 \in Z_5$.

இதுபோல், $0 + 1 = 1;\ 0 + 2 = 2;\ 0 + 3 = 3;\ 0 + 4 = 4$

$1 + 2 = 3;\ 1 + 3 = 4;\ 1 + 4 = 0;\ 2 + 3 = 0$

$2 + 4 = 1;\ 3 + 4 = 2;\ 0 + 0 = 0;\ 1 + 1 = 2$

$2 + 2 = 4;\ 3 + 3 = 1;\ 4 + 4 = 3$ முதலியன.

$+$ -ன் விளைவுகளெல்லாம் Z_5-ன் உறுப்புகளே.

$\therefore \quad +$ ஆனது Z_5-ன் மீது ஈரிணைச் செயலியே.
இந்த $+$ ஐ, வழக்கமான கூட்டலினின்று வேறுபடுத்த, $+_5$ என்று குறியிடுவோம்.

Z_5-ன் கூட்டல். மட்டு 5

$+_5$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

இந்த அட்டவணையை, எச்ச இனம், கூட்டல் மட்டு 5 (Residue class, addition mod 5) என்பர். $+_5$-ல் முழு எண்களின்

வழக்கமான கூட்டல் சம்பந்தப்பட்டிருக்கிறது அல்லவா? முழு எண்களின் வழக்கமான கூட்டலுக்குச் சேர்ப்பு, பரிமாற்றுப் பண்புகள் உள்ளன.

∴ கூட்டல், மட்டு 5-ம் சேர்ப்பு, பரிமாற்றுப் பண்புகள் உடையது.

உதாரணமாக,

$$2 + (3 + 4) = 2 + 2 = 4$$

$$(2 + 3) + 4 = 0 + 4 = 4$$

$$+ (3 + 4) = (2 + 3) + 4$$ $+_5$-க்குச் சேர்ப்புப் பண்பு உண்டு.

$$3 + 4 = 4 + 3 = 2$$ $+_5$-க்குப் பரிமாற்றுப் பண்பு உண்டு.

$\forall\, x \in Z_5$. $x + 0 = x$ (அட்டவணையில் பார்) என்பதால் 0 என்பது Z_5-ன் முற்றொருமை உறுப்பாகும்.

$1 + 4 = 4 + 1 = 0$ ∴ 1-ன் நேர்மாறு 4; 4 ன் நேர்மாறு 1;

$2 + 3 = 3 + 2 = 0$ ∴ 2-ன் நேர்மாறு 3; 3-ன் நேர்மாறு 2. முதலியன. நியாயமாக, எல்லா உறுப்புகளுக்கும் நேர்மாறுகள் உண்டா என்று சரி பார்க்கவேண்டும்.

∴ Z_5-ல் $+_5$-ன் கீழ் எந்த ஓர் உறுப்புக்கும் சரியாக ஒரு நேர்மாறு Z_5-ல் உண்டு.

பெருக்கல், மட்டு 5-ன் வரையறை

Z_5-ன் எந்த இரு உறுப்புகளையும் வழக்கமாகப் பெருக்கி, வந்த தொகையை 5 ஆல் வழக்கமாக வகுத்து மீதியைக் காண்.

உதாரணமாக, $2 \cdot 4$ எவ்வளவு? 2 ஐயும் 4 ஐயும் வழக்கமாய்ப் பெருக்க, வருவது 8. 8 ஐ 5 ஆல் வழக்கமாய் வகுக்க, வரும் மீதி 3.

$$\therefore\ 2 \cdot 4 = 3 \in Z_5$$

இதுபோல் Z_5-ன் மற்ற ஜோடி உறுப்புகளை எடுத்துக்கொண்டு, $\cdot$ ஆல் இணைக்க, வருவது Z_5-ன் ஓர் உறுப்பேயாகும் என்பதைச் சரி பார்.

∴ $\cdot$ என்பது Z_5-ன் மீது ஈரிணைச் செயலி. இந்தப் பெருக்கல் செயலியை $\cdot_5$ என்றும் குறியிடலாம்.

Z_5-ல் பெருக்கல், மட்டு 5-ன் அட்டவணை

$\cdot_5$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

மேற்கண்ட அட்டவணைக்கு எச்ச இனம், பெருக்கல் மட்டு 5 (Residue class, multiplication modulo 5) என்றும் பெயரிடலாம். பெருக்கல் மட்டு 5-ல் மெய்யெண்களின் வழக்கமான பெருக்கல் சம்பந்தப்பட்டிருக்கிறது.

மெய்யெண்களில், வழக்கமான பெருக்கலானது பரிமாற்று, சேர்ப்புப் பண்புகள் உடையதாயிருப்பதுடன், வழக்கமான கூட்டல் மீது பங்கீட்டு விதிகளையும் உடையது. ஆதலால் $\cdot_5$-ம் இந்தப் பண்புகளை உடைத்தாயுள்ளது.

உதாரணமாக,

$2 \cdot 3 = 1 = 3 \cdot 2$ (பரிமாற்றுப் பண்பு சரி பார்க்கப்பட்டது).

$3 \cdot (4 \cdot 2) = 3 \cdot 3 = 4$

$(3 \cdot 4) \cdot 2 = 2 \cdot 2 = 4$

$\therefore 3 \cdot (4 \cdot 2) = (3 \cdot 4) \cdot 2$ (சேர்ப்புப் பண்பு உடையது)

$3 \cdot 1 = 3, \quad 3 \cdot 4 = 2, \quad 3 \cdot 2 = 1.$

$+_5$ அட்டவணையின்படி, $4 + 2 = 1, \quad 2 + 1 = 3$

$$3 \cdot (4 + 2) = 3 \cdot 1 = 3$$

$$(3 \cdot 4) + (3 \cdot 2) = 2 + 1 = 3$$

$\therefore 3 \cdot (4 + 2) = (3 \cdot 4) + (3 \cdot 2)$ (இடது பங்கீட்டு விதி உடையது)

$\cdot_5$-ன் பரிமாற்றுப் பண்பினுல், $(4 + 2) \cdot 3 = 4 \cdot 3 + 2 \cdot 3$ (வலது பங்கீட்டு விதி உண்டு)

அட்டவணையிலிருந்து, Z_5-ல் $\cdot_5$-க்கு 1 என்பது முற்றொருமை உறுப்பு என்று அறிகிறோம்.

அட்டவணையிலிருந்து,

$2 \cdot 3 = 1 = 3 \cdot 2$ ∴ 2 என்பது 3-ன் பெருக்கலின் நேர்மாறு. இதையே அருவமான இயற்கணிதத்தில் $3^{-1} = 2$ என்று குறியீடுவோம். இதுபோல் $2^{-1} = 3$

ஆனால் 0-க்கு Z_5-ல் $\cdot_5$-ன் நேர்மாறு இல்லை.

மேற்கண்ட விவாதத்தில் பகா எண் 5-க்குப் பதில் p ஐப் பயன்படுத்தினால், $Z_p = \{0, 1, 2, \ldots\ldots, p-1\}$.

$+_5$, $\cdot_5$ ஐப் போன்று, $+_q$, $\cdot_p$-க்களையும் வரையறை செய்தால் இப்பிரிவில் கண்ட உண்மைகள் Z_p-க்கும் உண்மையே என்பது புலனாகும்.

1·15·8. முழுஎண்கள், மட்டு 4

இப்பிரிவில் மட்டு பகா எண் அல்ல.

$Z_4 = \{0, 1, 2, 3\}$ என்க.

1·15·7-ல் உள்ளதுபோல் $+_4$ ஐயும், $\cdot_4$ ஐயும் வரையறை செய். முன்போல் கூட்டலுக்கும், பெருக்கலுக்குமான அட்டவணைகள் அமைப்போம்.

எச்ச இனம், கூட்டல் மட்டு 4

$+_4$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

எச்ச இனம், பெருக்கல் மட்டு 4

$\cdot_4$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

Z_5-ல் கண்டதுபோல்; Z_4-லும் $+_4$-ம், $\cdot_4$-ம் பரிமாற்று, சேர்ப்பு, பங்கீட்டுப் பண்புகள் உள்ளன. $0 \in Z_4$ என்பது கூட்டலின் முற்றொருமை. $+_4$-ன் கீழ் Z_4-ன் ஒவ்வோர் உறுப்புக்கும் ஓர் எதிர் உண்டு, அதாவது கூட்டலின் நேர்மாறு உண்டு. உதாரணமாக, $-1 = 3$, $-2 = 2$, $-3 = 1$.

$1 \in Z_4$ என்பது பெருக்கலின் முற்ளுருமை உறுப்பு; 2-க்கும், 0-க்கும் Z_4-ல் பெருக்கலின் நேர்மாறுகள் இல்லை.

அட்டவணைப்படி, $2 \cdot 1 = 2 = 2 \cdot 3$ என்பதால், $2 = 3$ என்பது சரியா? இல்லை. $2 \neq 3$ ஆதலால் பெருக்கலில் அடித்தல் விதி உண்மை.

1·15·9. *n* **குறியீடுகளின் வரிசை மாற்றம்** (Permutation of *n* symbols)

இந்தக் கணித முறையை *n* பிரதியீடுகள் (*n* substitutions) முறை என்றும் சொல்லுவதுண்டு. இந்தக் கணித முறையை நன்ருய் ஆழ்ந்து படித்துத் தெரிந்து கொள்ளவேண்டும்.

வரை இலக்கணம்

n **குறியீடுகளின் வரிசை மாற்றம்**

n குறியீடுகள் அமைக்கும் கணத்தின் தன்னுள் (1—1), முழுக் கோர்த்தலுக்கு *n* குறியீடுகளின் வரிசை மாற்றம் என்பது பெயர்.

இந்தக் குறியீடுகளை வழக்கமாக 1, 2, 3. ......, *n* என்ற நேர் முழு எண்களால் குறிப்பது வழக்கமாகி விட்டது. வேண்டுமானல் வேறெந்தக் குறியீடுகளையாவது எடுத்துக் கொள்ளலாம்; தவறில்லை. ஆனல், $\{1, 2, 3, \ldots\ldots, n\}$ என்ற கணத்தை எடுத்துக்கொள்ளுவது நியமமாகி விட்டது.

வரிசை மாற்றத்தின் பொதுக் குறியீடு : $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \ldots\ldots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 \ldots\ldots & i_n \end{bmatrix}$

இதன் விளக்கம், வரிசை மாற்றத்தின்கீழ்,

$$1 \longmapsto i_1$$
$$2 \longmapsto i_2$$
$$3 \longmapsto i_3$$
$$\vdots$$
$$n \longmapsto i_n$$

அதாவது, $\{1, 2, 3, \ldots\ldots, n\}$ என்ற கணத்தின் ஒவ்வோர் உறுப்பின் எதிர் உருவும் அதற்கு நேர்க் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

குறியீடு

நேர் முழு எண்கள் 1, 2, ... n-ன் வரிசை மாற்றங்கள் அனைத்தும் கொண்ட கணத்தை S_n என்க.

உதாரணமாக, 1, 2, 3, 4 என்ற நான்கு முழு எண்களின் எல்லா வரிசை மாற்றங்களும் அடங்கிய கணத்தை S_4 என்க.

S_4-ன் ஒவ்வோர் உறுப்பும் 1, 2, 3, 4-ன் ஒரு வரிசை மாற்றம். இந்த வரிசை மாற்றங்களை $\alpha, \beta, \gamma, \ldots\ldots, \epsilon, \ldots\ldots$ என்று குறிக்கலாம்.

உதாரணமாக, $1 \overset{\alpha}{\longmapsto} 2,\ 2 \overset{\alpha}{\longmapsto} 4,\ 3 \overset{\alpha}{\longmapsto} 1,\ 4 \overset{\alpha}{\longmapsto} 3$.

அதாவது $\alpha(1) = 2,\ \alpha(2) = 4,\ \alpha(3) = 1,\ \alpha(4) = 3$. இந்த α வரிசை மாற்றத்தை எழுதும் முறை :

$$\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

S_n என்ற வரிசை மாற்றங்கள் கணத்தில் α, β என்பவை எவையேனுமிரு வரிசை மாற்றங்கள் என்க.

$i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ என்றால், $\alpha\beta(i) = \alpha(\beta(i)),\ \forall\, i = 1, 2, \ldots, n$

$\beta(i) \in \{1, 2, \ldots, n\}$ $\therefore\ \alpha(\beta(i)) \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

$\therefore$ $\alpha\beta$ என்பது $\{1, 2, \ldots, n\}$-ன் ஒரு வரிசை மாற்றம்.

$\therefore$ $\alpha\beta \in S_n$

$\alpha\beta$ ஐ, α, β-க்களின் பெருக்கம் என்று சொல்லுவது வழக்கம். இம்மாதிரி α ஐயும், β ஐயும் இணைக்கும் செயலிக்கு 'வரிசை மாற்றப் பெருக்கல்' என்பது பெயர்.

வரிசை மாற்றங்களும் கோர்த்தல்கள் ஆகையால், வரிசை மாற்றப் பெருக்கல் என்பது 'கோர்த்தலின் சேர்க்கை' யாகும்.

$\alpha \in S_n,\ \beta \in S_n \Longrightarrow \alpha\beta \in S_n$ $\therefore$ வரிசை மாற்றப் பெருக்கலுக்கு அடைப்புப் பண்பு உள்ளது.

$\therefore$ 'வரிசை மாற்றப் பெருக்கல்' S_n-ன் மீது ஓர் ஈரிணைச் செயலியாகும்.

உதாரணமாக,

$$\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

என்றால் $\alpha\beta$ ஐக் காண்.

என்ன செய்ய வேண்டும்? 1 லிருந்து 4 முடிய எல்லா முழு எண்களுக்கும் தனித்தனியே $\alpha\beta$ கண்டுபிடி.

$$\alpha\beta\,(1) = \alpha\,(\beta\,(1)) = \alpha\,(2) = 4$$
$$\alpha\beta\,(2) = \alpha\,(\beta\,(2)) = \alpha\,(3) = 1$$
$$\alpha\beta\,(3) = \alpha\,(\beta\,(3)) = \alpha\,(4) = 3$$
$$\alpha\beta\,(4) = \alpha\,(\beta\,(4)) = \alpha\,(1) = 2$$

$$\alpha\beta = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\beta\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\alpha\beta \neq \beta\alpha.$$

வரை இலக்கணம்

'சம வரிசை மாற்றங்கள்'.

கொடுக்கப்பட்ட ஒரு கணத்தின் இரு வரிசை மாற்றங்கள் ஒவ்வொன்றின் கீழ், அந்தக் கணத்தின் ஒவ்வோர் உறுப்புக்கும் அதே எதிர் உரு அந்தக் கணத்துள் அமையுமானால், எடுத்துக் கொண்ட இரு வரிசை மாற்றங்களும் சமம் என்போம்.

மேற்கண்ட உதாரணத்தில், இந்த வரையிலக்கணத்தின் உதவியைக் கொண்டே, $\alpha\beta \neq \beta\alpha$ என்றும் சொல்லிவிடலாம்.

ஆகையால், வரிசை மாற்றப் பெருக்கலுக்குப் பரிமாற்றுப் பண்பு இல்லை.

$$\forall\, i \in \{1, 2, \dots, n\},\ \alpha, \beta, \gamma \in S_n,$$

$$\alpha\,(\beta\gamma)\,(i) = \alpha\,(\beta\gamma\,(i)) = \alpha\,(\beta\,(\gamma\,(i)))$$

$$(\alpha\beta)\,\gamma\,(i) = \alpha\beta\,(\gamma\,(i)) = \alpha\,(\beta\,(\gamma\,(i)))$$

∴ சம வரிசை மாற்றங்களின் வரை இலக்கணப்படி, $\alpha(\beta\gamma) = \alpha\beta(\gamma)$

∴ வரிசை மாற்றப் பெருக்கலுக்குச் சேர்ப்புப் பண்பு உண்டு.

(1—1), முழு, தன்னுள் கோர்த்தலில், ஒவ்வோர் உறுப்பின் எதிர் உரு, தானே என்றால் அந்தக் கோர்த்தலை முற்றொருமைக் கோர்த்தல் என்றோம் (காண்க: 1·10·7).

வரிசை மாற்றமும் ஒரு (1—1), முழு, தன்னுள் கோர்த்தல்.

ஆகவே முற்றொருமை வரிசை மாற்றத்தை

$$\in = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{bmatrix}$$

என்றவாறு எழுதலாம்.

ஈரிணைச் செயலி வரிசை மாற்றப் பெருக்கலின் கீழ் S_n-க்கு $\in$ முற்றொருமை உறுப்பு ஆகும்.

யாதாவதொரு உறுப்பு $\alpha \in S_n$ என்றால்

$$\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_n \end{bmatrix} \text{ என்க.}$$

$$\in = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{bmatrix}$$

$\alpha \in (1) = \alpha(\in(1)) = \alpha(1) = i_1$ முதலியன.

$\alpha \in (n) = \alpha(\in(n)) = \alpha(n) = i_n$

$$\therefore \ \alpha \in = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_n \end{bmatrix}$$

$\in \alpha(1) = \in(\alpha(1)) = \in(i_1) = i_1 \ \because i_1 \in \{1, 2, \dots, n\}$ முதலியன.

$\in \alpha(n) = \in(\alpha(n)) = \in(i_n) = i_n \ \because i_n \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$\therefore \ \in \alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & i_n & \dots & i_n \end{bmatrix} = \alpha$$

$\therefore \; \alpha \in = \in \alpha = \alpha$

$\because \; \in$ என்பது S_n-ன் முற்றொருமை உறுப்பாகும்.

$\alpha \in S_n$ ஆனது (1—1), முழுக் கோர்த்தல் ஆகையால்,

α-ன் நேர்மாறு வரிசைமாற்றம் α^{-1}, S_n-ல் உள்ளது.

பொதுவாக, $r \overset{\alpha}{\longmapsto} i_r$ என்றால் $i_r \overset{\alpha^{-1}}{\longmapsto} r, \;\; \forall r, i_r \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$\therefore \; \alpha \alpha^{-1} (i_r) = \alpha (\alpha^{-1} (i_r)) = \alpha (r) = i_r$

$\alpha^{-1} \alpha (r) = \alpha^{-1} (\alpha (r)) = \alpha^{-1} (i_r)$
$= r, \;\; \forall r \in \{1, 2, \ldots, n\}$

அதாவது $\alpha^{-1} \alpha$ என்பது முற்றொருமை வரிசை மாற்றம்.

$\because \; \in (r) = r, \; \forall r \in \{1, 2, \ldots, n\},$

$\because \; \alpha^{-1}\alpha = \alpha\alpha^{-1} = \in.$

$\therefore$ α-ன் நேர்மாறு வரிசை மாற்றம் α^{-1} என்பது S_n-ல் 'வரிசை மாற்றப் பெருக்கலின்' கீழ் α-ன் நேர்மாறு உறுப்பு ஆகும்.

உதாரணமாக,

$$\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$1 \overset{\alpha}{\longmapsto} 3, \; 2 \overset{\alpha}{\longmapsto} 4, \; 3 \overset{\alpha}{\longmapsto} 2, \; 4 \overset{\alpha}{\longmapsto} 1$

$3 \overset{\alpha^{-1}}{\longmapsto} 1, \; 4 \overset{\alpha^{-1}}{\longmapsto} 2, \; 2 \overset{\alpha^{-1}}{\longmapsto} 3, \; 1 \overset{\alpha^{-1}}{\longmapsto} 4$

$$\therefore \; \alpha^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

α^{-1} ஐச் சுலபமாக எழுத வழி: α-ல் கீழிருந்து மேலே படித்து, அதாவது 3-ன் கீழ் 1, 4-ன் கீழ் 2, 2-ன் கீழ் 3, 1-ன் கீழ் 3 என்பதை முறைப்படுத்தி α^{-1} ஐ எழுதிவிடு.

$\alpha, \beta, \gamma \in S_n, \; \alpha \gamma = \beta \gamma$ என்றால் $\alpha = \beta$.

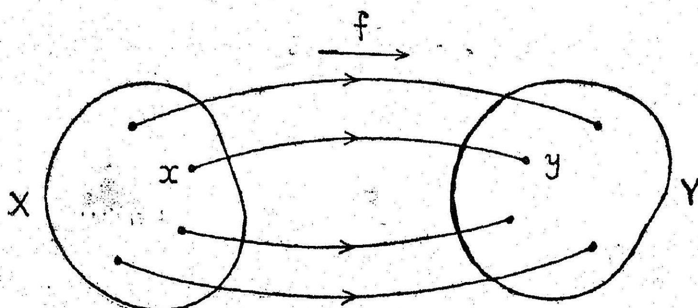
எப்படியெனில்,

$$\alpha\gamma = \beta\gamma$$
$$\Longrightarrow \alpha(\gamma\gamma^{-1}) = \beta(\gamma\gamma^{-1})$$
$$\Longrightarrow \alpha\in = \beta\in, \text{ (} \in \text{ முற்றொருமை உறுப்பு } \in S_n\text{)}$$
$$\Longrightarrow \alpha = \beta$$

இதனுல் பெறப்படுவது : 'S_n-ல் பெருக்கலின் நேர்மாறுகள் உள்ளதால், வரிசை மாற்றங்களுக்குப் பெருக்கலின் அடித்தல் விதி உண்டு',

S_n-ல் பூச்சிய உறுப்பு கிடையாது.

1·15·10. சதுரத்தின் சமச்சீர்கள் (Symmetries of a square) சதுரத்தின் சுழற்சிகள் (Rotations of a square)



படம் 45

ஓர் அட்டையில் சதுரத்தை வரைந்து வெட்டி எடுத்துக் கொள். தளத்தில் OX என்ற கிடைக் கோட்டையும், OY என்ற நிலைக் குத்துக் கோட்டையும் வரை. வெட்டிய சதுரத்தின் மையம் O மீது பொருந்துமாறும், சதுரத்தின் பக்கங்கள் X-, Y- அச்சுகளுக்கு இணையாக இருக்குமாறும், தடையின்றிச் சுழலுமாறும் சதுரத்தைத் தளத்தின் மீது வை. சதுரத்தின் சுழற்சியில் O, X-, Y-அச்சுகள், a, b நேர்க்கோடுகள் பங்கு பெரு.

சதுரத்தின் அனுமதிக்கப்பட்ட இயக்கங்களும், குறியீடுகளும் வருமாறு :

R_0 : சுழற்சியே இல்லை. (அதாவது, தளத்தில் 0° இடஞ் சுழியான சுழற்சி)

R_1 : தளத்தில் 90° இடஞ்சுழியான சுழற்சி

R_2 : தளத்தில் 180° இடஞ்சுழியான சுழற்சி

R_3 : தளத்தில் 270° இடஞ்சுழியான சுழற்சி

X : x அச்சுள் எதிர் உரு (அதாவது, x ஐ அச்சாகக் கொண்டு 180° தளத்தினின்று வெளியில் சுழற்சி)

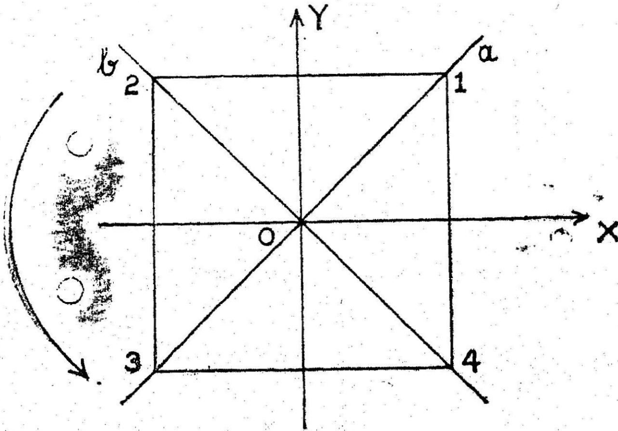
Y : y அச்சுள் எதிர் உரு (y ஐ அச்சாகக் கொண்டு 180° தளத்தினின்று வெளியில் சுழற்சி)

D_1 : முதல் மூலைவிட்டம் a யுள் எதிர் உரு (a ஐ அச்சாகக் கொண்டு 180° தளத்தினின்று வெளியில் சுழற்சி)

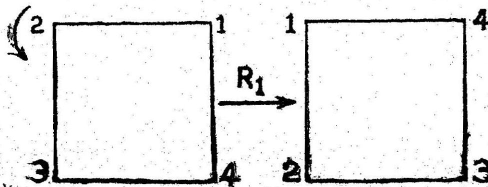
D_2 : இரண்டாவது மூலைவிட்டம் b யுள் எதிர் உரு (b ஐ அச்சாகக் கொண்டு 180° தளத்தினின்று வெளியில் சுழற்சி)

சதுரத்தை ஒரே நிலைக்குக் கொண்டு நிறுத்தும் இரு இயக்கங்களைச் சமமான இயக்கங்கள் என்போம்.

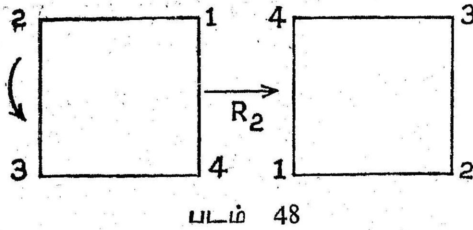
விளக்கப்படங்கள்



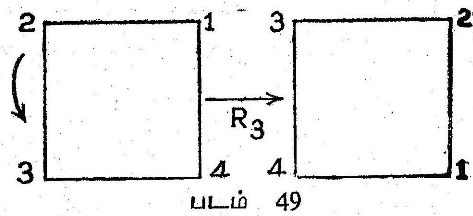
படம் 46



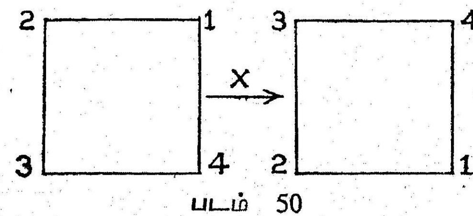
படம் 47



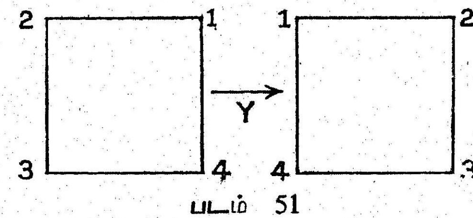
படம் 48



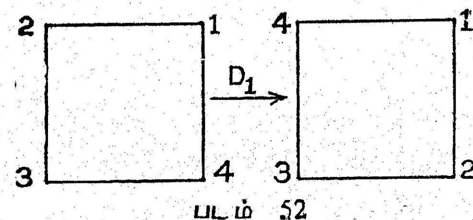
படம் 49



படம் 50



படம் 51



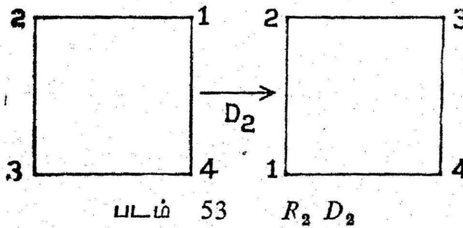
படம் 52

$S = \{ R_0, R_1, R_2, R_3, X, Y, D_1, D_2 \}$ என்ற கணத்தின் மீது கீழ்க் கண்டவாறு ஒரு பெருக்கல் செயலியை வரையறுப் போம்.

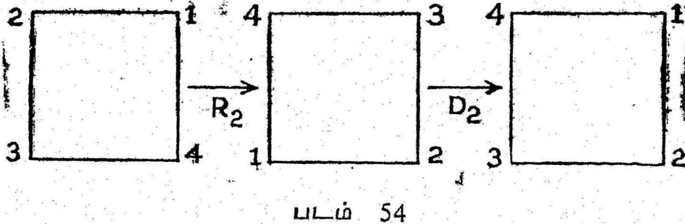
S-ன் மீது பெருக்கல் செயலி : கொடுத்த வரிசையில் ஓர் இயக்கத்தைப் பின் தொடர்ந்து மறு இயக்கம் செயல்படல், அதாவது, p, q என்பவை இரு இயக்கங்களானல், pq என்பது, 'முதலில் p ஐ இயக்கு, அதனை அடுத்து q ஐ இயக்கு' என்ற செயலாகும்.

உதாரணமாக R_2 D_2 என்ருல், முதலில் தளத்தில் 180° இடஞ்சுழியாகச் சுழற்றி, தொடர்ந்து இரண்டாவது மூலை விட்டத்துள் எதிர் உரு அமைத்தலாகும்.

விளக்கப்படம்.



படம் 53 R_2 D_2



படம் 54

$\therefore \; R_2 D_2 = D_1 \in S.$

இதுபோல், இயக்கங்களின் பெருக்கல் விளைவுகளை அட்ட வணைப் படுத்தலாம்.

.	R_0	R_1	R_2	R_3	X	Y	D_1	D_2
R_0	R_0	R_1	R_2	R_3	X	Y	D_1	D_2
R_1	R_1	R_2	R_3	R_0	D_2	D_1	X	Y
R_2	R_2	R_3	R_0	R_1	Y	X	D_2	D_1
R_3	R_3	R_0	R_1	R_2	D_1	D_2	Y	X
X	X	D_1	Y	D_2	R_0	R_2	R_1	R_3
Y	Y	D_2	X	D_1	R_2	R_0	R_3	R_1
D_1	D_1	Y	D_2	X	R_3	R_1	R_0	R_2
D_2	D_2	X	D_1	Y	R_1	R_3	R_2	R_0

இந்த அட்டவணையிலுள்ளவை அனைத்தும் S-ன் உறுப்புகளே.

ஆகவே, பெருக்கல், செயலியின் கீழ் S அடைக்கப்பட்டது.

அதாவது, பெருக்கல் செயலிக்கு அடைப்புப் பண்பு உண்டு.

அதாவது, பெருக்கல் செயலி, S-ன் மீது ஈரிணைச் செயலியாகும்.

R_0 என்பது S-ன் முற்றொருமை உறுப்பு ஆகும்.

S-ன் ஒவ்வோர் உறுப்புக்கும் பெருக்கல் செயலியின் கீழ் ஒரு நேர்மாறு S-ல் உண்டு. $R_1^{-1} = R_3$, $R_2^{-1} = R_2$, $R_3^{-1} = R_1$ $X^{-1} = X$ $Y^{-1} = Y$, $D_1^{-1} = D_1$, $D_2^{-1} = D_2$.

பெருக்கல் விதி சேர்ப்புப் பண்புடையது.

உதாரணமாக, $R_1 (D_2 X) = R_1 R_1 = R_2$

$$(R_1 D_2) X = YX = R_2$$

$$\therefore \quad R_1 (D_2) X = (R_1 D_2) X$$

இப்படியாக, இரண்டு அல்லது மூன்று மும்மைகளைச் சரி, பார்த்தால் போதும். 216 மும்மைகளைச் சரிபார்த்தல் என்பது ஆகக் கூடியதா ?

$$R_1 D_2 = Y$$
$$D_2 R_1 = X$$
$$\therefore \quad R_1 D_2 \neq D_2 R_1$$

∴ பெருக்கல் விதிக்குப் பரிமாற்றுப் பண்பு கிடையாது.

1.16. முழு எண்களுக்கு வகுத்தல் கணக்கு (Division algorithm for the Integers)

நல்வரிசைப் படுத்தும் பண்பு (Well ordering property) :

'எந்தக் குறையற்ற முழு எண்கள் (non negative integers) கணத்திலும் ஒரு மீச்சிறிய உறுப்பு உண்டு'. இந்தப் பண்புக்கு 'நல்வரிசைப் படுத்தும் தத்துவம்' (Well-ordering principle) என்றும் பெயர்.

அதாவது, S என்பது குறையற்ற முழு எண்கள் கணமானுல், S-ல் 0 இருந்தால், 0 ஆனது S-ன் மீச்சிறிய உறுப்பாகும்.

$0 \notin S$ என்ருல், S-ல் மீச்சிறிய நேர் முழு எண் உண்டு.

வகுத்தல் கணக்கு முறைக்கு இந்தத் தத்துவம் மிக அவசியமாகிறது.

1.16.1. தேற்றம்

a, b நேர் முழு எண்கள் என்ருல்

$a = bq + r, 0 \leqq r < b$ என்றவாறு,

ஒரே முறை குறையற்ற முழு எண்கள் q, r இருக்கின்றன.

நிறுவல்

பாகம் 1 : குறையற்ற முழு எண்கள் q, r இருக்கின்றன என நிறுவுவோம்.

x முழு எண்ணுனுல் $a - bx$ உரு மாதிரியுள்ள நேர் முழு எண்கள் அமைக்கும் கணம் S என்க.

அதாவது, $S = \{ a - bx \mid x \in \mathbf{Z}, a - bx \geqq 0 \}$ என்க.

a-ம், b-ம் முழு எண்கள்.

∴ S-ன் உறுப்புகள் $a - bx$ என்பவை, x ஐச் சார்ந்துள்ளன.

$x = 0$ என்ருல் $a - bx = a$, $\therefore$ $a \in S$ $\because$ $a \geqq 0$

$\therefore$ S கணம் வெற்றற்றது.

குறையற்ற முழு எண்களின் நல்வரிசைப்படுத்தும் பண்புப் படி, S-ல் மீச்சிறிய உறுப்பு உண்டு. இந்த மீச்சிறிய உறுப்பு $r = a - bq$ என்க.

S-ன் எல்லா உறுப்புகளும் நேர் முழு எண்கள் என்பதால்,

$r \geqq 0$. $\therefore$ $0 \leqq r$

இப்பொழுது $r < b$ என்று நிறுவவேண்டும்.

முடியுமாஞல், $r \geqq b$ என்று வைத்துக்கொள்.

$\therefore$ $r - b \geqq 0$.

மேலும் $r - b = (a - bq) - b = a - b(q + 1)$

S-ன் யாதாவதொரு உறுப்பு $a - bx$-ல், $x = q + 1$ என்ருல் $r - b$ கிடைக்கிறது.

$\therefore$ $r - b \in S$.

தேற்றத்தின்படி $b > 0$. $\therefore$ $r - b < r \in S$

அதாவது S-ன் மீச்சிறிய உறுப்பான r ஐ விடக் குறைந்த உறுப்பு $r - b$-ஐக் கிடைக்கப் பெற்ருேம். தெளிவாக இது ஓர் எதிர் மறுப்பு.

$\therefore$ $r \geqq b$ என்பது தவறு.

$\therefore$ $r < b$ என்பதுதான் சரி.

$a = bq + r, 0 \leqq r < b$ என்றவாறு குறையற்ற முழு எண்கள் a, b இருக்கின்றன.

பாகம் 2 : நிறுவ வேண்டியது : q-ம், r-ம் ஒரே முறை முழு எண்களே.

நிறுவல் : முடியுமாஞல், $a = bq_1 + r_1, 0 \leqq r_1 < b$ என்ற வாறு q_1, r_1 என்ற முழு எண்கள் இருக்கட்டும்.

$q \geqq q_1$ என்க.

$\therefore \quad b > 0 \Longrightarrow b\,(q - q_1)$ குறையற்றது. ......(i)

$a = bq + r, \quad a = bq_1 + r_1 \Longrightarrow bq + r = bq_1 + r_1$

$\Longrightarrow b\,(q - q_1) = r_1 - r$ ...(ii)

$\Longrightarrow r_1 - r$ குறையற்றது ((i)-ன்படி)

$r < b, \quad r_1 < b \Longrightarrow b > r, \quad b > r_1$

$\Longrightarrow b > r_1 - r$ ......(iii)

$q - q_1 \neq 0 \quad \Longrightarrow q - q_1 \geqq 1$

$\Longrightarrow r_1 - r = b\,(q - q_1) \geqq b$

$\Longrightarrow b \leqq r_1 - r$ ..... (iv)

இது (iii)-க்கு எதிர் மறுப்பு.

$\therefore \quad q - q_1 = 0. \quad \therefore \quad q = q_1 \quad \therefore \quad (ii) \Longrightarrow r = r_1$

$\therefore$ q-ம், r-ம் ஒரே முறை முழு எண்களே.

1·17 கணிதத் தொகுத்தறி முறை (Mathematical Induction)

1·17·1 துணைத்தேற்றம் (Lemma)

Q என்ற நேர் முழு எண்கள் கணமாவது

(1) $1 \in Q$

(2) $k \in Q$ என்றவாறு நேர் முழு எண் k இருந்தால், $k + 1 \in Q$ என்ற பண்புகளைப் பெற்றிருந்தால் Q ஆனது எல்லா நேர் முழு எண்களையும் கொண்டது.

நிறுவல்

Q-ல் எல்லா நேர் முழு எண்களும் இல்லை என்று வைத்துக் கொள்வோம், அப்படியானல் Q-ல் இல்லாத நேர் முழு எண்கள் R என்ற கணத்தை அமைக்கட்டும். நல்வரிசைப் பண்புப்படி R-ல் மீச்சிறிய உறுப்பு இருக்கிறது. இதை r என்க. $\therefore \; r \in R$ $\therefore \; r \notin Q$ (1)

நிபந்தனை (1)-ன் படி $r \neq 1$. $\therefore \; r - 1$ ஒரு நேர் முழு எண்.

$\therefore \quad r - 1 \notin R$; R-ன் மீச்சிறிய உறுப்பு r.

$\therefore \quad r - 1 \in Q$.

நிபந்தனை (2) ஐப் பயன்படுத்தினால், $k = r - 1$ என்றால்,

$k + 1 = r \in Q$. இது (i)-ன் எதிர் மறுப்பு.

$\therefore$ துணைத் தேற்றம் நிறுவப்பட்டது.

1.17·2 கணிதத் தொகுத்தறி முறையின் தத்துவம்

" ஒவ்வொரு நேர் முழு எண் n-க்கு, S_n என்ற ஒரு கூற்று (Statement) அல்லது கொள்கை தொடர்பு உடையது என்க.

(1) S_1 உண்மை;

(2) S_k உண்மை என்றவாறு நேர் முழு எண் k இருந்தால் S_{k+1} உண்மை என்றால், எல்லா நேர் முழு எண்கள் n-க்கும் S_n உண்மை".

நிறுவல்

S_n உண்மை என்றவாறு நேர் முழு எண்கள் n, Q என்ற கணத்தை அமைக்கட்டும். தேற்றத்தின் முதல் நிபந்தனைப்படி, S_1 உண்மையென்பதால் $1 \in Q$.

தேற்றத்தின் இரண்டாவது நிபந்தனைப்படி, நேர் முழு எண் n-க்கு S_n உண்மை யென்றால், S_{n+1}-ம் உண்மையென்பதால்,

$n \in Q \Longrightarrow n + 1 \in Q$.

$\therefore$ Q கணம் 1·17·1-ன் துணைத் தேற்றத்தின் நிபந்தனைகளை நிறைவேற்றுகிறது.

$\therefore$ Q கணத்தில் **எல்லா** நேர் முழு எண்களும் இருக்கின்றன.

$\therefore$ எல்லா நேர் முழு எண்கள் n-க்கும் S_n உண்மை.

உதாரணம்

x, y முழு எண்கள்; m,n நேர் முழு எண்கள் என்றால் $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$ என்பதைக் கணிதத் தொகுத்தறி முறையால் நிறுவுக.

நிறுவல்

n-க்குக் கணிதத் தொகுத்தறி முறையைப் பயன்படுத்துவோம். கூற்று $S_n : x^m \cdot x^n = x^{m+n}$ என்க.

$n = 1$-க்கு $S_1 = x^m \cdot x^1 = x^{m+1}$

நேர் முழு எண் அடுக்குகளின் வரை இலக்கணப்படி, $x^m \cdot x^1 = x^{m+1}$ $\therefore$ S_1 உண்மை.

$n = k$-க்கு, S_k; $x^m x^k = x^{m+k}$ என்பது உண்மையென்று வைத்துக்கொள். இதற்குத் தொகுத்தறி முறையின் எடுகோள் (Induction Hypothesis) என்பது பெயர்.

எடுகோளின் சமன்பாட்டின் இரு பக்கங்களையும் xஆல் பெருக்கு.

$\therefore$ $(x^m x^k) x^1 = x^{m+k} \cdot x^1$

$x^m (x^k x^1) = x^{m+k} \cdot x^1$ (எண்களுக்குப் பெருக்கலின் சேர்ப்பு விதி)

$x^m \cdot x^{k+1} = x^{m+k+1}$ (நேர் முழு எண்களின் அடுக்குகள் கொள்கை)

$\therefore$ $n = k + 1$-க்கு S_n உண்மை.

அதாவது, S_k உண்மையென்றால் S_{k+1}-ம் உண்மை.

$\therefore$ கணிதத் தொகுத்தறி முறைப்படி எல்லா இயற்கை எண்கள் nக்கும் S_n உண்மை.

1·18 பியானோவின் அடிகோள்கள் (Peano's Postulates)

இயற்கை எண்கள் முறையை, இயன்ற வரை குறைந்த எண்ணிக்கையுள்ள தற்கோள்களைக் கொண்டு, அமைக்க முயல்வோம். இதனை முன்னிட்டுச் சில அடிகோள்களையும், சரியான வரை இலக்கணங்களையும் அமைத்துக் கொண்டு, எண்களின் ஒரு முறையை அடைவோம் இதனை $\{1, 2, \ldots\}$ என்கிற இயற்கை எண்களின் முறை என்போம். இயற்கை எண்களின் முறையின் அடிப்படையாக, 'பியானோ அடிகோள்கள்' எனப்படும் அடிகளை வரைவோம். இந்த அடிகோள்கள் அமைத்தவர் 'கையுஸெப்பே பியானோ' (1858-1932) என்ற இத்தாலிய கணித நிபுணர். இவ்வடிகோள்களை நிறைவேற்றும் ஒரு கணம் ந்தால் அதை இயற்கை எண்கள் கணம் என்போம்.

அடிகோள் 1. 1 ஆனது இயற்கை எண்.

அடிகோள் 2. ஒவ்வோர் இயற்கை எண் n-க்கும் சரியாக ஒரே ஓர் இயற்கை எண் n^* இருக்கிறது. n^* ஐ n-ன் அடுத்த எண் என்போம்.

அடிகோள் 3. எந்த இயற்கை எண்ணுக்கும் அடுத்த எண் 1 அல்ல.

அடிகோள் 4. $n' = m' \Longrightarrow m = n$

அடிகோள் 5. $S \subseteq N$ என்க.

(i) $1 \in S$

(ii) $n \in S \Longrightarrow n' \in S$ என்ருல் $S = N$.

இந்த ஐந்து அடிகோள்களுக்கும் காரணமாயிருந்தவர் பியானோ. ஆதலால் இவை பியானோ அடிகோள்கள் எனப் படுகின்றன. அடிகோள் (5)க்குத் 'தொகுத்தறி முறை அடிகோள் (Induction Axiom) என்பது பெயர். உள்ளுணர்வின்படி (Intuitively), n^* ஐ $n + 1$ ஆகக் கருதலாம்.

1·18·1. வரை இலக்கணம்

செயலி + (கூட்டல்)

$\forall\, m, n \in N, n^* = n + 1, n + m^* = (n + m)^*$ என்றவாறு அமைந்த + செயலி, N-ன் மீதான ஒரே முறை ஈரிணைச் செயலியாகும்.

1·18·2. வரை இலக்கணம்

செயலி × (பெருக்கல்)

$\forall\, m, n \in N,\ n \cdot 1 = n,\ n \cdot m^* = n \cdot m + n$ என்றவாறு அமையும். . செயலி, N-ன் மீதான ஒரே முறை ஈரிணைச் செயலி ஆகும்.

குறிப்பு: இயற்கை எண் $m.\, n$ ஐ $m\, n$ என்றே, குறியில்லாமல் எழுதலாம்.

1·18·3. தேற்றம்

N என்பது இயற்கை எண்கள் முறையென்ருல்,

(i) $p + (m + n) = (p + m) + n \quad \forall\, p, m, n \in N$ அதாவது +-க்குச் சேர்ப்பு விதி உண்டு.

(ii) $p + m = m + p \quad \forall\, p, m, n \in N$; அதாவது +-க்குப் பரிமாற்றுப் பண்பு உண்டு.

நிறுவல்

(i) $+$ க்குச் சேர்ப்பு விதியின் நிறுவல் :

$S = \{ n/n \in N, p + (m + n) = (p+m) + n, \forall p, m \in N\}$ என்க.

$1 \in S$ என்றும், $n \in S \Longrightarrow m^* \in S$ என்றும் காண்பித்தால், அடிகோள் (5)-ன் படி, $S = N$ என்று அடைவோம். அதனுல் கூட்டலுக்குச் சேர்ப்பு விதி நிறுவப்பட்டுவிடும்.

நிறுவல் : $1 \in S$:

இப்பொழுது $= p + (m + 1) = p + (m^*)$, $(p + m) + 1$
$(p + m)^*$ (1·18·1 வ.இ.)

மேலும் $p + (m^*) = (p + m)^*$ (1·18·1 வ.இ.).

$\therefore p + (m + 1) = (p + m) + 1$

$\therefore 1 \in S$.

இப்பொழுது $n \in S$ என்று வைத்துக்கொள்வோம்.

1·18·1-ன் படி, $p + (m + (n^*)) = p + (m + n)^*$
$= (p + (m + n))^*$,

$(p + m) + (n^*) + ((p + m) + n)^*$.

$\therefore n \in S$, ∘° $(p + (m + n))^* = ((p + m) + n)^*$

$\therefore p + (m + (n^*)) = (p + m) + (n^*)$

$\therefore n^* \in S$.

$\therefore$ அடிகோள் (5)-ன் படி, $S = N$, ∘° $+$-ன் சேர்ப்புப் பண்பு நிறுவப்பட்டது. இப்பொழுது கண்ட நிறுவல், n-ன் மீது தொகுத்தறி முறை பயன்படுத்தப்பட்டது.

நிறுவல்

(ii) $+$-க்குப் பரிமாற்றுப் பண்பின் நிறுவல் :

$S = \{ m \mid m \in N, p + m = m + p \quad \forall p \in N \}$

முன்போல் $1 \in S$ என்றும், $m \in S \Longrightarrow m^* \in S$ என்றும் காண்பிக்கலாம்.

∘° m-ன் மீது தொகுத்தறி முறையைப் பயன்படுத்தலாம்.

$1 \in S$ என்பதை நிறுவ, $p+1 = 1+p$ என்று நிறுவ வேண்டும். இது உடனே தெளிவு அல்ல. p-ன் மீது தொகுத்தறி முறையைப் பயன்படுத்துவோம்.

$T = \{p \mid p \in N, \ p+1 = 1+p\}$.

$\therefore \ 1+1 = 1+1, \ \therefore 1 \in T$

$p \in T$: தொகுத்தறி முறையின் தற்கோள் என்க.

$\therefore \ (p^*)+1 = (p+1)+1 = (p+1)^* = (1+p)^*$

$= 1+(p^*)$, (1·18·1-ன் படி, $p \in T$)

$\therefore \ T = N; \ 1+p = p+1 \quad \forall p \in N$

$\therefore \ 1 \in S$.

$m \in S$ என்று வைத்துக்கொள்.

$\therefore \ p+(m^*) = (p+m)^* = (m+p)^* = m+(p^*)$

$= m+(p+1) = m+(1+p) = (m+1)+p$

$= (m^*)+p$ (கூட்டலின் சேர்ப்பு விதி, 1·18·1, $m \in S$)

$\therefore \ m \in S \Longrightarrow m^* \in S$ $\therefore$ அடிகோள் (5)-ன் படி $S = N$.

$\therefore$ (ii) நிறுவப்பட்டது.

2. குலங்கள்

(GROUPS)

முன்னுரை : 19 ஆம் நூற்றுண்டில், சில ஐந்து அடுக்குச் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க முடியாமல் கணித மேதைகள் தத்தளித்துக் கொண்டிருந்தபோது, 'குலம்' என்ற அழகிய கருத்து பிறந்தது. **'கால்வா'** என்ற பிரான்சு நாட்டின் கணித மன்னனின் அற்புதக் கருத்துதான் 'குலம்'. நவீன இயற்கணிதத்தின் தற்போதைய உன்னத நிலை 'கால்வா'யையே சாரும். வரை கணிதத்தில், சில மாற்றங்களின் குலங்களின் கீழ், குறிப்பிட்ட வரை கணிதப் பண்புகள் மாறுவதில்லை; அம்மாதிரி வரை கணிதத்தின் பிரிவுகளை 1870-ல் வகுப்பாக்கம் செய்தார் ஜெர்மானிய கணித விஞ்ஞானி **'க்ளீன்'** (Klein) என்பார். இப்படியாகக் குல இயலை வளர்த்தார் க்ளீன். கீழ்க்கண்ட 2·1-ல் உள்ள குலத்திற்கான வரை இலக்கணத்தை 1902-ல் தொகுத்துத் தந்தவர் **ஈ. வீ. ஹன்டிங்டன்** (E. V. Huntington) என்ற கணித மேதை ஆவார். இருபதாம் நூற்றுண்டில், கணிதத்தின் எல்லாப் பிரிவுகளையும், ஏன், விஞ்ஞானத்தில் பரந்த பிரிவுகளையும் குல இயல் தழுவியது. பொதுச் சார்ச்சித் தத்துவத்தில் (General Theory of Relativity). கணிய நிலை இயக்க இயலில் (Quantum mechanics), படிக இயலில் (Crystallography), அணு இயலில் (Atomic Theory) —இன்னும் இவைபோன்ற பலப்பல இடங்களில் 'குலம்' பயன் தருகிறது. இது மட்டுமல்லாமல், புதிய புதிய கருத்துகளை, கொள்கைகளை, கோட்பாடுகளைக் கச்சிதமாகவும், அழுத்தமாகவும் வடிக்கக் குலம் உதவுகிறது.

இத்தகைய அருமையான குலத்தைப் பற்றித் தெரிந்து கொள்ள நாம் பேறு பெற்றவராவோம்.

2·1. வரை இலக்கணம்

குலம் (Group)

ஒரு வெற்றற்ற கணம் G-ம், அதன் மீது வரையறுக்கப்பட்ட ஈரிணைச் செயலி $*$-ம் சேர்ந்த $(G, *)$ என்ற கணித முறையானது,

$G1$. G-ன் ஒவ்வொரு வரிசைப்பட்ட ஜோடி a, b-க்கும், $a * b$ என்பது G-ன் உறுப்பு ஆகவேண்டும். (அடைப்பு விதி)

$G2$. G-ன் ஒவ்வொரு மும்மை a, b, c-க்கும், $(a * b) * c = a * (b * c)$ என்பது உண்மையாக வேண்டும். (சேர்ப்பு விதி)

$G3$. G-ன் எந்த உறுப்பு a-க்கும், $a * e = e * a = a$ என்றவாறு e என்ற உறுப்பு G-ல் இருக்க வேண்டும். (முற்றொருமை உண்டு)

$G4$. G-ன் ஒவ்வோர் உறுப்பு a-க்கும்; $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ என்றவாறு a^{-1} என்ற உறுப்பு G-ல் இருக்கவேண்டும் (நேர்மாறு உண்டு)

என்ற இந்நான்கு அடிகோள்கள் அனைத்தையும் நிறைவேற்றுமானால், $(G, *)$ ஆனது குலம் எனப்படும்.

குலம் $(G, *)$ ஐ, வெறுமனே குலம் G என்று எழுதுவதும் உண்டு. e என்பது $(G, *)$ குலத்தின் முற்றொருமை உறுப்பு (Identity element) என்றும், a^{-1} ஐ, a-ன் நேர்மாறு என்றும் அழைப்போம்.

$*$ என்பது ஈரிணைச் செயலி என்றாலே, G என்ற கணம், $*$-ன் கீழ் அடைக்கப்பட்டது என்றுதானே பொருள்? ஆகையால் $G1$ மிகையாகும். இருப்பினும், ஈரிணைச் செயலியின் அடைப்புப் பண்பை உறுதிப்படுத்தவே $G1$ ஐ வரை இலக்கணத்தில் ஓர் அடிகோளாகச் சேர்த்துக் கொள்ளுவது மரபு ஆகிவிட்டது, G-ன் எல்லா உறுப்புகளுடன் செயல்படுவது ஏதோ ஒரு e, G-ல் உள்ளது என்று $G3$ கூறுகின்றது.

e ஐப் போன்று செயல்படும், அதாவது $G3$ ஐ உறுதிப்படுத்தும் வேறு உறுப்புகள் G-ல் உண்டா, என்பதை $G3$, வெளிப் படையாகச் சொல்லவில்லை. G-ன் ஒவ்வோர் உறுப்பு a-க்கும், $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ என்றவாறு a^{-1} என்ற ஓர் உறுப்பு G-ல்

உள்ளது என்று G4 கூறுகிறது. அதாவது G-ல், a^{-1} என்ற உறுப்பு G4 ஐ உறுதிப்படுத்துமாறு ஒன்றே ஒன்றுதானா, அல்லது பலவா என்று G4 திட்டவட்டமாகக் கூறவில்லை.

G1, G2, G3, G4 என்ற இன்றியமையாத பண்புகளைத் தவிர, மிகையான ஒரு பண்பும் $*$-க்கு உண்டு. அதுதான் பரிமாற்றுப் பண்பு. எல்லாக் குலங்களும் பரிமாற்றுப் பண்புடையன என்றுதே!

2·2. வரை இலக்கணம்

(பரிமாற்றுப் பண்பு) அபீலியன் குலம் (Abelian Group)

$(G, *)$ என்ற குலத்தில்,

$\forall a, b \in G, a * b = b * a$ என்பது உண்மையானால்,

$(G,*)$ ஐப் 'பரிமாற்றுக் குலம்' (Commutative group) அல்லது, அபீலியன் குலம் (Abelian Group) என்போம்.

'நீயல்ஸ் ஹென்றிக் அபெல்' (Niels Henrik Abel 1802—1829) என்ற நார்வீஜியன் கணித மேதையின், நினைவாக, 'அபீலியின் குலம்' என்கிறோம்.

முக்கியக் கணக்குகள்

1, எல்லாக் குலங்களும் அபீலியனாகஇருக்கவேண்டுவதில்லை. ஏனெனில் குலத்தின் வரை இலக்கணத்தில், $*$-க்குப் பரிமாற்றுப் பண்பு இருக்க வேண்டிய நிபந்தனை இல்லை. $*$-க்குப் பரிமாற்றுப் பண்பு இல்லையானால், $*$ஐப் பொறுத்த குலத்தை 'அபீலியனல் லாத குலம்' (non abelian, non commutative group) என்போம்.

2. எல்லாக் குலங்களுக்கும் பொதுவான நிபந்தனைகள்

$$\left.\begin{array}{l} G3\text{-ன் படி}, a * e = e * a = a, \\ G4\text{-ன் படி}, a * a^{-1} = e = a^{-1} * a \end{array}\right\}$$

என்பதால் $*$-க்குப் பரிமாற்றுப் பண்பு உண்டு என முடிவு கட்டாதே!

2·3. வரை இலக்கணம்

குலத்தின் பரிமாண வரிசை (Order of a group)

$(G,*)$ குலத்தின் G கணத்தின் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கைக்குக் 'குலத்தின் பரிமாண வரிசை' என்பது பெயர்.

இதன் குறியீடு : $0(G)$

G என்பது முடிவுள்ள கணமானால், $(G, *)$ குலத்தை 'முடிவுள்ள குலம்' என்றும்; அப்படி இல்லாவிட்டால், 'முடிவில்லாத குலம்' என்றும் வரையறுப்போம்.

2.4. உதாரணங்கள்

1. $G = Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$,

$*$: வழக்கமான கூட்டல், $+$

$(G, *)$ குலமா என்று ஆராய்க.

விடை

ஒரு கணித முறையானது குலமா என்று உறுதிப்படுத்த, குலத்தின் நான்கு நிபந்தனைகளுக்கு, $*$ கட்டுப்பட்டதா என்று சரி பார்.

(i) எந்த இரு முழு எண்களையும் வழக்கமாய்க் கூட்ட, கிடைப்பது முழு எண். அதாவது $\forall a, b \in Z, \quad a + b \in Z$.

$\therefore$ Z-ன் மீது, $+$ ஓர் ஈரிணைச் செயலி.

$\therefore$ ($G1$ அடைப்பு விதி உறுதிப்பட்டது)

(ii) முழு எண்களுக்கு வழக்கமான கூட்டலின் சேர்ப்புப் பண்பு உண்டு.

$\forall a, b, c \in Z, \ a + (b + c) = (a + b) + c$ ($G2$ சேர்ப்பு விதி உறுதிப்பட்டது).

(iii) $0 \in Z$. 0 உடன் எந்த முழு எண்ணையும் வழக்கமாய்க் கூட்டக் கிடைப்பது அதே முழு எண்தான்.

$\forall a \in Z, \ a + 0 = 0 + a, \ 0 \in Z$.

$\therefore$ 0 ஆனது Z-ன் முற்றொருமை உறுப்பு.

($G3$ முற்றொருமை உண்டு—சரி)

(iv) Z-ன் ஒவ்வொரு முழு எண்ணிற்கும், Z-ல் ஓர் எதிர் உண்டு.

($G4$ நேர்மாறு உண்டு—சரி)

$\therefore$ (Z, +) ஒரு குலம்.

மேலும், $\forall\, a, b \in \mathbf{Z},\ a + b = b + a$

$\therefore$ +-க்குப் பரிமாற்றுப் பண்பு உண்டு.

(Z, +) என்பது அபீலியன் குலம்.

Z என்பது முடிவில்லாத கணம். $\therefore$ (Z, +) என்பது 'முடிவில்லாத அபீலியன் குலம்'. இதனை, '+ ஐக் குறித்த கூட்டல் அபீலியன் குலம்' என்போம்.

2. $G = \mathbf{R} - \{0\}$.

• வழக்கமான பெருக்கல்

$(G, \cdot)$ முடிவில்லாத அபீலியன் குலம் என நிறுவுக.

விடை

(i) எந்த இரு மெய்யெண்களை வழக்கமாய்ப் பெருக்கினாலும் வருவது ஒரு மெய்யெண்.

$\therefore$ வழக்கமான பெருக்கலின் கீழ் $\mathbf{R} - \{0\}$ அடைக்கப் பட்டது.

$\therefore$ • ஓர் ஈரிணைச் செயலி.

(G1 அடைப்பு விதி உறுதிப்பட்டது)

(ii) எந்த மூன்று மெய்யெண்களும் சேர்ப்பு விதியில் அடங்குவன. (G 2 சேர்ப்பு விதி உறுதிப்பட்டது).

(iii) $1 \in \mathbf{R} - \{0\}$. எந்த மெய்யெண்ணையும் 1 ஆல் வழக்கமாய்ப் பெருக்க, கிடைப்பது அதே மெய்யெண்தான்.

$\forall\, a \in \mathbf{R} - \{0\},\ a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

ஆகையால், 1 என்பது $\mathbf{R} - \{0\}$-ன் முற்றொருமை உறுப்பு.

(G3 முற்றொருமை உண்டு—சரி)

(iv) a என்பது $\mathbf{R} - \{0\}$-ன் யாதாவதொரு உறுப்பு என்றால்,

$a \cdot \frac{1}{a} = 1 = \frac{1}{a} \cdot a,\ \frac{1}{a} \in \mathbf{Z}$ ($\mathbf{R} - \{0\}$-ல் 0 இல்லை.

$\therefore\ a \neq 0$)

அதாவது, $R - \{0\}$-ன் ஒவ்வோர் உறுப்புக்கும்,

$\cdot$-ன் கீழ் ஒரு நேர்மாறு உண்டு.

$$a \in R - \{0\}\text{-ன் நேர்மாறு} = \frac{1}{a} \in R - \{0\}$$

(G 4 நேர்மாறு உண்டு—சரி)

$\therefore$ $(R - \{0\}, \cdot)$ என்ற கணித முறை குலம்.

மேலும் $\forall\, a, b \in R - \{0\}$, $a \cdot b = b \cdot a$

$\therefore$ $\cdot$ என்பது பரிமாற்றுப் பண்பு உடையது.

$\therefore$ $(R - \{0\}, \cdot)$ என்பது அபீலியன் குலம்.

0 $(R - \{0\}, \cdot)$ ஒரு முடிவிலி.

$\therefore$ இந்தக் குலம் முடிவில்லாத குலம்.

3. **R** : மெய்யெண்கள் கணம்,

$\cdot$ வழக்கமான பெருக்கல்

$(R, \cdot)$ ஐ ஆய்க.

விடை

$(R, \cdot)$ குலமாகாது. ஏனெனில் $(R, \cdot)$-ல் முற்றொருமை உறுப்பு 1. ஒரு கணித முறையானது குலமாக வேண்டுமானால், குலத்திற்கான வரையிலக்கண நிபந்தனைகள் நான்கினையும் அது நிறைவேற்ற வேண்டும். ஒரு நிபந்தனையைக்கூட மீறக்கூடாது. மீறினால் குலமாகாது. நான்காவது நிபந்தனைப்படி, **R**-ன் ஒவ்வோர் உறுப்புக்கும் ஒரு நேர்மாறு **R**-ல் இருக்கவேண்டும். அப்படியானால், $\forall\, a \in R, a \cdot a^{-1} = e = a^{-1} \cdot a$. ஆனால் $a = 0 \in R$-க்கு, $0 \cdot a^{-1} = 1 = a^{-1} \cdot 0$ என்றவாறு **R**-ல் a^{-1} இல்லையே! 0 உடன் எதை வழக்கமாகப் பெருக்கினால் 1 வரும்? ஏதுமில்லை. $\therefore$ குலத்தின் நான்காவது நிபந்தனை ஆல் மீறப்பட்டது. ஆதலால் $(R, \cdot)$ குலமல்ல.

4. **சதுரத்தின் சமச்சீர்கள்** (Synmetries of a Square)

முதல் அத்தியாயத்தில் 1·15·10-ல் கண்டபடி

$$G = \{ R_0, R_1, R_2, R_3, X, Y, D_1, D_2 \}$$

• முதல் இயக்கத்தைத் தொடர்ந்து அடுத்த இயக்கத்தைச் செய்.

(i) அட்டவணையில் உள்ளவை அனைத்தும் G-ன் உறுப்புகளே.

∴ G ஆனது • -ன்கீழ் அடைக்கப்பட்டது. (அடைப்புப் பண்பு : சரி)

(ii) $R_1 (D_2 X) = R_1 R_1 = R_2$

$(R_1 D_2) X = Y X = R_2$

∴ $R_1 (D_2 X) = (R_1 D_2) X$

$D_1 (X R_3) = D_1 D_2 = R_2$

$(D_1 X) R_3 = R_3 R_3 = R_2$

∴ $D_1 (X R_3) = (D_1 X) R_3$ முதலியன, முதலியன.

• ஆனது சேர்ப்புப் பண்பு உடையது.

(iii) $R_0 * R_1 = R_1 * R_0 = R_1$ முதலியன.

∴ • -க்கு முற்றொருமை உறுப்பு R_0 ஆகும்.

(iv) $R_1 * R_3 = R_3 * R_1 = R_0$ முதலியன.

∴ R_1 ன் நேர்மாறு R_3

R_2 ……,, …… R_2

R_3 ……,, …… R_1

X ……,, …… X

Y ……,, …… Y

D_1 ……,, …… D_1

D_2 ……,, …… D_2

∴ $(G, \cdot)$-ல் நேர்மாறுகள் உண்டு.

∴ $(G, \cdot)$ என்பது குலம்.

$R_1 X = D_2$

ஆனால் $X R_1 = D_1$ ∴ $R_1 X \neq X R_1$

∴ $(G, \cdot)$ அபீலியனல்லாத குலம்.

மேலும் $0(G) = 8$. இந்தக் குலத்தை " எண்ணியக்கக் குலம் " (Octic group) என்போம்.

5. " க்ளின் நாற்குலம் " (Klein 4-group)

4-group ஐ, ஜெர்மானிய மொழியில் viergruppe, அதாவது, ஃபியர்க்ருப்பே, என்பர். இந்த ஜெர்மானியச் சொல்லின் முதல் எழுத்து V ஐயே இந்தக் குலத்திற்குப் பெயரிடுவர்.

$\cdot$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

$\cdot$ -ன் வரைஇலக்கணம் வெளிப்படையாகத் தரவில்லை

இந்த அட்டவணையின் உறுப்புகள் அனைத்தும் V-ன் உறுப்புகளே !

$\therefore$ $\cdot$-ன் கீழ் V அடைக்கப்பட்டது.

மேலும்,

$$\left.\begin{array}{l} a \cdot (b \cdot c) = a \cdot a = e \\ (a \cdot b) \cdot c = c \cdot c = e \end{array}\right\} \Longrightarrow a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

$$\left.\begin{array}{l} a \cdot (c \cdot b) = a \cdot a = e \\ (a \cdot c) \cdot b = b \cdot b = e \end{array}\right\} \Longrightarrow (a \cdot c) \cdot b = a \cdot (c \cdot b)$$

முதலியன, முதலியன.

$\therefore$ $\cdot$ சேர்ப்புப் பண்புடையது.

V-ன் முற்றொருமை உறுப்பு e ; ஏனெனில்,

$$e \cdot e = e ;\ a \cdot e = a,\ b \cdot e = b,\ c \cdot e = c,$$

$$e \cdot a = a,\ e \cdot b = b,\ e \cdot c = c$$

இந்த அட்டவணையின் ஒவ்வொரு நிரையிலும் நிரலிலும் ஒரு e உள்ளது. ஆகையால் V-ன் ஒவ்வோர் உறுப்புக்கும் ஒரு நேர்மாறு உண்டு.

$a^{-1} = a,\ b^{-1} = b,\ c^{-1} = c,$

$\therefore$ $(V, \cdot)$ என்பது குலம்.

$a \cdot b = b \cdot a = c$

$b \cdot c = c \cdot b = a$

$a \cdot c = c \cdot a = b$

$\therefore$ $(V, \cdot)$ அபீலியன் குலம்.

மேலும் $0(V) = 4$.

6. சென்ற அத்தியாயத்தில், $(\mathbf{Z}_5, +_5)$, $(\mathbf{Z}_5, \cdot_5)$,

$(\mathbf{Z}_4, +_4)$, $(\mathbf{Z}_4, \cdot_4)$ ஆகியவற்றை ஆராய்ந்தோம்.

$(\mathbf{Z}_5, +_5)$, $(\mathbf{Z}_4, +_4)$ என்பவை அபீலியன் குலங்கள்.

$(\mathbf{Z}_5, \cdot_5)$, $(\mathbf{Z}_4, \cdot_4)$ குலங்கள் அல்ல. ஏன் ?

பொதுவாக, $(\mathbf{Z}_m\ +_m)$ அபீலியன் குலங்கள்.

இவற்றை முறையாக நிறுவுக.

7. G : { மெய்யெண்களை உறுப்புகளாகவுள்ள 2×2 அணிகள் }

$*$: அணிகளின் வழக்கமான கூட்டல்.

சென்ற அத்தியாயத்தில் $(G, *)$ ஐ ஆராய்ந்தோம்.

$\therefore$ $(G, *)$ ஓர் அபீலியன் குலம் (முறைப்படி நிறுவுக !)

$(G, *)$-ன் முற்றொருமை உறுப்பு : $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $0 \in \mathbf{R}$

$$\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix} \in G\text{-ன் நேர்மாறு} \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} \in G,$$

$$a, b, c, d, -a, -b, -c, -d \in \mathbf{R}.$$

8. G : { மெய்யெண்களை உறுப்புகளாகக் கொண்ட சிறப்பில்லா அணிகள் }

$\cdot$ அணிகளின் வழக்கமான பெருக்கல்.

சென்ற அத்தியாயத்தில் ஆராய்ந்தபடி, $(G, \cdot)$ என்பது அபீலியனல்லாத குலம்.

G-ன் முற்றொருமை உறுப்பு $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$-ன் நேர்மாறு $\begin{vmatrix} \frac{d}{\Delta} & -\frac{b}{\Delta} \\ -\frac{c}{\Delta} & \frac{a}{\Delta} \end{vmatrix}, \Delta = ad - bc \neq 0,$

$\in G, \because \frac{a}{\Delta}, \frac{-b}{\Delta}, \frac{-c}{\Delta}, \frac{d}{\Delta} \in G,$
$0 \neq ad - bc \in G$

9. $S_3 = \{ 1, 2, 3$-ன் எல்லா வரிசை மாற்றங்கள் $\}$

• வரிசைமாற்றப் பெருக்கல்

முதல் அத்தியாயத்தில் 1·15·9 ஐக் கவனித்துப் படி.

$S_3 = \{ \alpha, \beta, \gamma, \delta, \in, \theta \}$ என்றால்

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \in = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

உதாரணமாக,

$$\alpha \cdot \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$1 \xmapsto{\beta} 3 \xmapsto{\alpha} 3$$

$$2 \xmapsto{\beta} 2 \xmapsto{\alpha} 1$$

$$3 \xmapsto{\beta} 1 \xmapsto{\alpha} 2$$

$$\alpha \cdot \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \theta$$

$\cdot$	$\in$	α	β	γ	δ	θ
$\in$	$\in$	α	β	γ	δ	θ
α	α	$\in$	θ	δ	γ	β
β	β	δ	$\in$	θ	α	γ
γ	γ	θ	δ	$\in$	β	α
δ	δ	β	γ	α	θ	$\in$
θ	θ	γ	α	β	$\in$	δ

$\cdot$ க்கு அடைப்புப் பண்பு, சேர்ப்புப் பண்பு உண்டு.

உதாரணமாக,

$$\left.\begin{array}{l}(\alpha\cdot\beta)\cdot\delta = \theta\cdot\delta = \in\\ \alpha\cdot(\beta\cdot\delta) = \alpha\cdot\alpha = \in\end{array}\right\}\Longrightarrow (\alpha\cdot\beta)\cdot\delta = \alpha(\cdot\beta\cdot\delta)$$

$\alpha^{-1} = \alpha,\ \beta^{-1} = \beta,\ \gamma^{-1} = \gamma,\ \delta^{-1} = \theta,\ \theta^{-1} = \delta.$

$\therefore$ S_8 ல் நேர்மாறு உறுப்புகள் உண்டு.

$(S_3, \cdot)$ ஒரு குலம் ஆகும்.

$\alpha\cdot\beta = \theta,\ \beta\cdot\alpha = \delta \Longrightarrow \alpha\cdot\beta \neq \beta\cdot\alpha.$

$\therefore$ $\cdot$-க்குப் பரிமாற்றுப் பண்பு இல்லை.

$(S_8, \cdot)$ அபீலியனல்லாத குலம்.

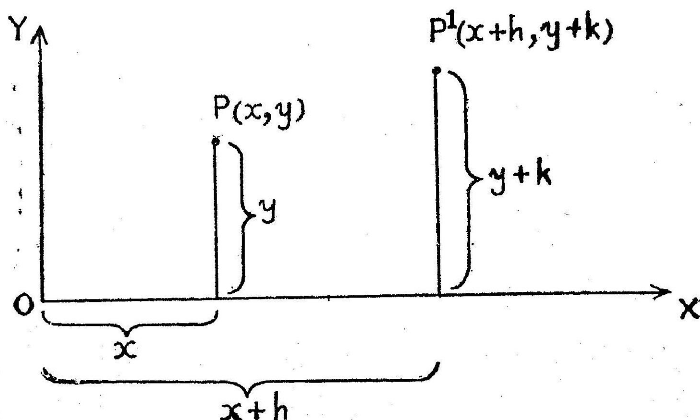
$0(S_3) = 6.$ ஏனெனில், 1, 2, 3 ஆல், $|\underline{3} = 3 \times 2 \times 1 = 6$ வரிசை மாற்றங்கள்.

குறிப்பு : இந்தக் குலத்தை '3 குறியீடுகளின் சமச்சீர் குலம்' (Symmetric group of 3 Symbols) என்பர்.

இதுபோல், S_n-ம் ஒரு குலம் என்று நிறுவலாம். (முறையாக நிறுவுக !)

$\therefore$ $0(S_n) = |\underline{n}.$

10. இடப் பெயர்ச்சிகள் குலம் (Group of Translations)



படம் 55

ஈரச்சு கார்டீசியன் செவ்வக தளத்தில் கிடைக் கோட்டை x அச்சாகவும், நிலைக்குத்துக் கோட்டை y-அச்சாகவும் கொள்க.

x, y மெய்யெண்களானால், இந்தத் தளத்தில் யாதேனும் ஒரு புள்ளியின் கூறுகளை $P(x, y)$ என்போம். $P(x, y)$ ஐ முதலில் h அலகுகள் கிடையாகவும், தொடர்ந்து k அலகுகள் நிலைக் குத்தாகவும் நகர்த்து. இப்பொழுது, P-ன் புதிய நிலை $P'(x + h, y + k)$ ஆகும், P-ன் இந்த மாதிரி இயக்கத்தை 'இடப் பெயர்ச்சி' என்கிறோம். இந்த இயக்கத்தை $[h, k]$ என்று வரிசைப்பட்ட ஜோடியாக எழுதுவோம். புள்ளிக்குப் பிறை அடைப்புகள் என்றால், இடப்பெயர்ச்சிக்குப் பகரவடைப்புகள் (Square brackets). $a, b, c, d, \in \mathbf{R}$, $P(x, y,)$ என்ற புள்ளிக்கு முதலில் $[a, b]$ என்ற இடப் பெயர்ச்சியும், அதனைத் தொடர்ந்து $[c, d]$ என்ற இடப் பெயர்ச்சியும் செயல் படுத்தினால், P ன் புதிய நிலை என்ன ?

$[a, b]$-ன் கீழ் $P(x, y)$ ஆனது $(x + a, y + b)$ என்ற நிலைக்கு வரும்; தொடர்ந்து $[c, d]$-ன் கீழ் $((x + a) + c, (y + b) + d)$ என்ற நிலைக்கு வரும்.

$\therefore$ $[a, b]$, $[c, d]$ என்ற தொடர்ந்த இடப்பெயர்ச்சிகளின் விளைவு $[a + c, b + d]$.

$[a, b] \cdot [c, d] = [a + c, b + d]$ என்ருல்,

செயலி · ஆனது 'முதல் இயக்கத்தைத் தொடர்ந்து அடுத்த இயக்கம்' எனலாம்.

G: { இடப் பெயர்ச்சிகள் எல்லாம் }

ஒவ்வோர் இடப் பெயர்ச்சியும் மெய் எண்களைக் கொண்ட வரிசைப்பட்ட ஜோடி செயலியின் விளைவும் மெய்யெண்களைக் கொண்ட வரிசைப்பட்ட ஜோடி. மெய்யெண்களைக் கொண்டஎந்த வரிசைப்பட்ட ஜோடியும் ஓர் இடப் பெயர்ச்சியே. ஆதலால் · ன் கீழ் விளைந்த எந்த இடப் பெயர்ச்சியும் G-ன் ஓர் உறுப்பே.

$\therefore$ · -க்கு அடைப்புப் பண்பு உண்டு.

மெய்யெண்களுக்கு, வழக்கமான கூட்டலின் சேர்ப்புப் பண்பு உண்டு. ஏனெனில்,

உதாரணமாக,

$$\{ [a, b] \cdot [c, d] \} \cdot [e, f], \quad a, b, c, d, e, f \in \mathbf{R}$$
$$= [a + c, b + d] \cdot [e, f]$$
$$= [(a + c) + e, (b + d) + f]$$
$$= [a + (c + e), b + (d + f)]$$
$$= [a. b] \cdot \{ [c, d] \cdot [e, f] \}$$

$\therefore$ · -க்குச் சேர்ப்புப் பண்பு உண்டு.

மேலும், $[a, b] \cdot [0, 0] = [a + 0, b + 0] = [a, b]$

$$[0, 0] \cdot [a, b] = [0 + a, 0 + b] = [a, b]$$

$\therefore \quad [a, b] \cdot [0, 0] = [0, 0] \cdot [a, b]$

$\therefore \quad (G, \cdot)$-ன் முற்றொருமை உறுப்பு $[0, 0]$

$$[a, b] \cdot [-a, -b] = [a + (-a], b + (-b)] = [0, 0]$$
$$= [(-a) + a, (-b) + b] = [-a, -b] \cdot [a, b]$$

$\therefore \quad (G, \cdot)$-ல் நேர்மாறுகள் உண்டு.

$\therefore \quad (G, \cdot)$ ஒரு குலமாகும்.

$$[a, b] \cdot [c, d] = [a + c, b + d] = [c + a, d + b]$$
$$= [c, d] \cdot [a, b]$$

$\therefore$ $\cdot$-க்குப் பரிமாற்றுப் பண்பு உண்டு,

$\therefore$ $(G, \cdot)$ ஓர் அபீலியன் குலம்.

மாதிரிக் கணக்குகள்

1. $G = \mathbf{R} - \{1\}$,

$+, \cdot, -$ என்பவை முறையே வழக்கமான கூட்டல், வழக்கமான பெருக்கல், வழக்கமான கழித்தல்.

$*$ என்ற G-ன் மீது செயலியை, $a * b = a + b - ab$, $a, b \in \mathbf{R} - \{1\}$ என்று வரையறுத்தால், $(G, *)$ ஐக் குலம் என்று நிறுவுக.

விடை

$\forall\ a, b \in G,\quad a * b$ ஒரு மெய்யெண் ஆகும்.

$a * b$ என்ற மெய்யெண் G-ல் இருக்கவேண்டுமென்றால்,

$a * b \neq 1$ என்று நிறுவ வேண்டும்.

அப்படியில்லையெனில், $a * b = 1$ என்று வைத்துக்கொள்.

அதாவது $a + b - ab = 1$ என்க. $a, b \in G$.

$$\therefore\quad a + b(1 - a) = 1$$

$$b(1 - a) = 1 - a$$

$a \in G$ என்பதால், $a \neq 1$.

$\therefore$ அடித்தல் விதிப்படி, $b = 1$

இது ஓர் எதிர் மறுப்பு (Contradiction). ஏனெனில் கணக்கின்படி $b \in G \Longrightarrow b \neq 1$.

$\therefore\quad a * b \neq 1$. $\therefore a * b \in G$

$\therefore$ $*$ என்பது G-ன் மீது ஈரிணைச் செயலி. $\therefore$ $*$ ஆல் G அடைக்கப்பட்டது.

$$\forall\ a, b, c \in G,\quad a * (b * c) = a * (b + c - bc)$$
$$= a + (b+c-bc) - a(b+c-bc)$$
$$= a+b+c-bc-ab-ac+abc$$
$$= a+b+c-ab-bc+abc-ac$$

இதுபோல், $(a * b) * c = (a + b - ab) * c$

$$= (a + b - ab + c) - (a + b - ab)c$$
$$= a + b - ab + c - ac - bc + abc$$
$$= a + b + c - ab - bc - ac + abc$$

$\therefore \quad a * (b * c) = (a * b) * c$

$\therefore \quad *$ -க்குச் சேர்ப்புப் பண்பு உண்டு.

$x \in G$ என்பது முற்றொருமை உறுப்பு என்க.

$\forall\, a \in G,\ a * x = a$ ஆகும்.

அதாவது, $a + x - ax = a$

$$x(1 - a) = 0$$

$a \in G \Longrightarrow a \neq 1$

$\therefore \quad x = 0$

$\therefore \quad 0$ என்பது G-ல் முற்றொருமை உறுப்பு.

யாதாவதொரு உறுப்பு $a \in G$-ன் நேர்மாறு k என்றால் $a * k = 0$ என்பது உண்மையாக வேண்டும்.

$\therefore \quad a + k - ak = 0 \quad \Longrightarrow k = \dfrac{-a}{1 - a}$

$a \in G \Longrightarrow a \neq 1$

$\Longrightarrow 1 - a \neq 0$

$\therefore \quad k \neq 1 \qquad \therefore \quad k \in G.$

G-ல் ஒவ்வோர் உறுப்புக்கும் ஒரு நேர்மாறு உண்டு.

$\therefore \quad (G, *)$ ஒரு குலமாகும்.

$a * b = a + b - ab$

$= b + a - ba$ (மெய்யெண்களின் வழக்கமான கூட்டலும், பெருக்கலும் பரிமாற்றுப் பண்பு உடையன).

$= b * a$

$\therefore \quad *$ பரிமாற்றுப் பண்பு உடையது.

$\therefore \quad (G, *)$ ஓர் அபீலியன் குலம்.

2. 1-ன் நாற்படி மூலங்கள் எல்லாம், வழக்கமான பெருக்கலைப் பொறுத்து ஓர் அபீலியன் குலமாகும் என நிறுவுக.

விடை

1-ன் நாற்படி மூலங்களாவன : $1, i, -1, -i$

$G = \{1, i, -1, -i\}$

· வழக்கமான பெருக்கல்

$i^2 = -1$ என்ற வரையிலக்கணம் கொண்டு, பெருக்கல் அட்டவணையைத் தயார் செய்.

·	1	i	-1	$-i$
1	1	i	-1	$-i$
i	i	-1	$-i$	1
-1	-1	$-i$	1	i
$-i$	$-i$	1	i	-1

அட்டவணையில் காணப்படுபவை யாவும் G-ன் உறுப்புகளே. ஆதலால் ·-ன் கீழ் G அடைக்கப்பட்டது.

கலப்பெண்களின் வழக்கமான பெருக்கல் சேர்ப்புப் பண்புடையது.

∴ G-லும் ·-க்குச் சேர்ப்புப் பண்பு உண்டு.

G-ன் முற்றொருமை உறுப்பு $1 \in G$ ஆகும்.

∴ G-ல் முற்றொருமை உண்டு.

G-ன் ஒவ்வோர் உறுப்புக்கும் சரியாக ஒரு நேர்மாறு உண்டு.

உதாரணமாக, $i^{-1} = -i$, $(-1)^{-1} = -1$, $(-i)^{-1} = i$, $(1)^{-1} = 1$

∴ $(G, \cdot)$ குலமாகும்.

மேலும், $i \cdot -1 = -i = -1 \cdot i$

$i \cdot -i = 1 = -i \cdot i$

$-i \cdot -1 = i = -1 \cdot -i$

∴ ·-க்குப் பரிமாற்றுப் பண்பு உண்டு.

$\therefore$ $(G, \cdot)$ ஓர் அபீலியன் குலம்.

$0(G) = 4$ (முடிவுள்ளது). $\therefore$ $(G, \cdot)$ ஆனது முடிவுள்ள குலம்.

3. $G = \{a, b, c\}$-ன் மீதான பெருக்கல் செயலி . கீழ்க் கண்ட அட்டவணையால் வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது.

$\cdot$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

$(G, \cdot)$ ஆனது பரிமாண வரிசை 3 உள்ள முடிவுள்ள அபீலியன் குலம் என நிறுவுக.

விடை

அட்டவணையின்படி, $\cdot$-ன் விளைவுகளெல்லாம், G-ல் உள்ளன. $\therefore$ $\cdot$-க்கு அடைப்புப் பண்பு உண்டு. $a \cdot a = a$, $b \cdot a = a \cdot b = b$, $c \cdot a = a \cdot c = c$ என்பதால் a ஆனது $(G, \cdot)$-ன் முற்றொருமை.

$c \cdot b = b \cdot c = a$, $a \cdot a = a$ என்பதால், $b^{-1} = c$, $c^{-1} = b$, $a^{-1} = a$

$\therefore$ $(G, \cdot)$-ல் $\cdot$-ன் நேர்மாறுகள் உண்டு.

$a \cdot b = b \cdot a = b$; $a \cdot c = c \cdot a = c$; $b \cdot c = c \cdot b = a$

$\therefore$ $\cdot$-க்குப் பரிமாற்றுப் பண்பு உண்டு.

$a \cdot (b \cdot c) = a \cdot a = a$

$(a \cdot b) \cdot c = b \cdot c = a$ $\therefore$ $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

$\cdot$-க்குப் பரிமாற்றுப் பண்பு உண்டென்பதால்,
$(b \cdot c) \cdot a = c \cdot (a \cdot b)$;

$a \cdot (c \cdot b) = (a \cdot c) \cdot b$; முதலியன, முதலியன.

$\therefore$ $\cdot$-க்குச் சேர்ப்புப் பண்பு உண்டு.

∴ $(G, \cdot)$ ஓர் அபீலியன் குலம்.

$0(G) = 3.$ ∴ $(G, \cdot)$ ஒரு முடிவுள்ள குலம்.

4. **Z :** முழு எண்கள், $\cdot$ வழக்கமான பெருக்கல் என்றால், $(\mathbf{Z}, .)$ குலமா ? ஆராய்க.

விடை

$$\forall\, a \in \mathbf{Z},\ a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

∴ $1 \in \mathbf{Z}$ என்பது $(\mathbf{Z},.)$-ன் முற்றொருமை உறுப்பு.

1·1 ஐத் தவிர, ஒரு முழு எண்ணுடன் எந்த முழு எண்ணைப் பெருக்கினாலும் 1 வராது.

உதாரணமாக,

$2 \cdot a = a \cdot 2 = 1$ என்றவாறு Z-ல், a இல்லை. ஆகவே, எந்த முழு எண்ணுக்கும்; $\cdot$-ன் கீழ் Z-ல் நேர்மாறுகள் இல்லை.

∴ $G4$, $\cdot$ ஆல் மீறப்பட்டது. ∴ $(\mathbf{Z},\cdot)$ குலம் அல்ல.

5. வழக்கமான கூட்டல் கீழ், எல்லா விகிதமுறு எண்கள் கணம் குலமாகுமா ?

விடை

Q : {எல்லா விகிதமுறு எண்கள்}

$+$ வழக்கமான கூட்டல்.

$$p, q \in \mathbf{Z},\ \frac{p}{q}\ (q \neq 0) \in \mathbf{Q}$$

$$\frac{p}{q}\ (q \neq 0),\ \frac{r}{s}\ (s \neq 0) \in \mathbf{Q},$$

$$\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{ps + qr}{qs}, \quad ps, qr, qs \in \mathbf{Z},\ qs \neq 0.$$

$$\in \mathbf{Q}$$

∴ $+$-க்கு அடைப்புப் பண்பு உண்டு.

$q \neq 0,\ s \neq 0,\ t \neq 0,\ \frac{p}{q},\ \frac{r}{s},\ \frac{u}{t},\ \in \mathbf{Q},$

$$\left(\frac{p}{q}+\frac{r}{s}\right)+\frac{u}{t}=\frac{ps+qr}{qs}+\frac{u}{t}=\frac{pst+qrt+qsu}{qst}$$

$$=\frac{q\,(rt+us)+pst}{qst}=\frac{rt+us}{st}+\frac{p}{q}=\left(\frac{r}{s}+\frac{u}{t}\right)+\frac{p}{q}$$

$$=\frac{p}{q}\left(\frac{r}{s}+\frac{u}{t}\right)$$

∴ +-க்குச் சேர்ப்புப் பண்பு உண்டு.

$q \neq 0,\ \frac{0}{q} \in R \ \therefore\ 0 \in \mathbf{Q}$

$s \neq 0,\ \frac{r}{s} \in Q$

$\frac{r}{s}+0=\frac{r}{s}=0+\frac{r}{s}$. ∴ Q-ன் முற்றொருமை 0.

$$\frac{p}{q},-\frac{p}{q}\in \mathbf{Q},\ q\neq 0 \Longrightarrow \frac{p}{q}+\left(-\frac{p}{q}\right)$$

$$=\left(-\frac{p}{q}\right)+\left(\frac{p}{q}\right)=0$$

∴ $\frac{p}{q}$-ன் எதிர் $-\frac{p}{q}$ ஆகும்.

∴ Q-ல் +-ன் நேர்மாறுகள் உண்டு.

$$\frac{p}{q},\ \frac{r}{s}\in \mathbf{Q},\ q, s\neq 0 \Longrightarrow \frac{p}{q}+\frac{r}{s}=\frac{r}{s}+\frac{p}{q}$$

∴ + -க்குப் பரிமாற்றுப் பண்பு உண்டு.

∴ (Q, +) ஒரு பரிமாற்றுக் குலம் ; முடிவில்லாதது.

6. $G = \{1, 2, 3\}$,

$\cdot 4$: பெருக்கல், மட்டு 4

$(G, \cdot 4)$ ஐ ஆராய்க.

விடை

$\cdot 4$	1	2	3
1	1	2	3
2	2	0	2
3	3	2	1

$\cdot 4$-ன் விளைவுகளின் அட்டவணையிலிருந்து, $2 \cdot_4 2 = 0 \notin G$ மேலும் 2-க்கு நேர்மாறு இல்லை.

$\therefore$ $(G, \cdot 4)$ குலம் அல்ல.

7. $G : \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$, $f_1, \ldots\ldots, f_6$ என்பவை சார்புகள்.

$$t \in \mathbf{R} - \{0, 1\}, \quad f_1(t) = t, \quad f_2(t) = \frac{1}{t}, f_3(t) = 1 - t,$$

$$f_4(t) = \frac{t-1}{t}, f_5(t) = \frac{t}{t-1}, \quad f_6(t) = \frac{1}{1-t}$$

$*$: சார்புகளின் சேர்க்கை அல்லது தொகுப்பு (composition) எனில், $(G, *)$ ஐ ஆய்க.

விடை

உதாரணமாக, $\left(f_3 * f_5\right)(t) = f_3\left(f_5(t)\right) = f_3\left(\frac{t}{t-1}\right)$

$$= 1 - \frac{t}{t-1} = \frac{1}{1-t} = f_6(t)$$

சம சேர்த்தல்களின் வ.இ.படி,

$$f_3 * f_5 = f_6$$

இதுபோல், G-ன் மீது $*$-ன் விளைவுகளை அட்டவணைப் படுத்துக.

$*$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_2	f_2	f_1	f_6	f_5	f_4	f_3
f_3	f_3	f_4	f_1	f_2	f_6	f_5
f_4	f_4	f_3	f_5	f_6	f_2	f_1
f_5	f_5	f_6	f_4	f_3	f_1	f_2
f_6	f_6	f_5	f_2	f_1	f_3	f_4

அட்டவணையின் எல்லா உறுப்புகளும், G-ன் உறுப்புகளே.
$\therefore$ $*$-ன் கீழ் G அடைக்கப்பட்டது.

$f_2 * f_4 = f_5$. ஆனல் $f_4 * f_2 = f_3$

$f_2 * f_4 \neq f_4 * f_2$ $\therefore$ $*$ க்குப் பரிமாற்றுப் பண்பு இல்லை.

f_1 என்பது முற்றொருமை உறுப்பு.

$f_1^{-1} = f_1$, $f_2^{-1} = f_2$, $f_3^{-1} = f_3$, $f_4^{-1} = f_6$, $f_5^{-1} = f_5$, $f_6^{-1} = f_4$

$\therefore$ G-ல் $*$-க்கு நேர்மாறுகள் உண்டு.

மும்மைகள் f_2, f_3, f_6-களுக்கு,

$f_2 * (f_3 * f_6) = f_2 * f_5 = f_4$

$(f_2 * f_3) * f_6 = f_6 * f_6 = f_4$

$\therefore$ $f_2 * (f_3 * f_6) = (f_2 * f_3) * f_6$. $\therefore$ இதுபோல் எல்லா மும்மைகளுக்கும் $*$-ன் சேர்ப்புப் பண்பு உண்மை எனலாம்.

$\therefore$ $(G, *)$ என்பது குலம்.

$f_2 * f_4 = f_5$ ஆனல் $f_4 * f_2 = f_3$

$\therefore$ $f_2 * f_4 \neq f_4 * f_2$

$\therefore$ $*$-க்குப் பரிமாற்றுப் பண்பு இல்லை.

$\therefore$ $(G, *)$ என்பது அபீலியன் அல்லாத குலம்.

குறிப்பு : வடிவ கணிதத்தில் குறுக்கு வீதத்தை (Cross ratio) மாற்றமிலியாகச் செய்வது இந்தக் குலம். சில மாற்றங்கள் (Transformations), வடிவ கணிதத்தில் சில பண்புகளை மாற்ற மிலிகளாகச் செய்கின்றன. அப்பொழுது இந்தக் குலம் பயன் படுகிறது.

(8) $G = \{ I, B, C, D, E, F, K, H, \}$ என்பதில்

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$ $i^2 = -1$ என்றும்,

$*$ அணிகளின் பெருக்கல் என்றால், $(G, *)$ ஓர் அபீலிய னல்லாத குலம் என்று காண்பி.

குறிப்பு : இந்த அணிகளுக்கு, பௌலி அணிகள் (Pauli Matrices) என்பது பெயர். அணு பௌதிக இயலில் (Atomic Physics) பௌலி அணிகள் பயன்படுகின்றன.

$(G, *)$ ஐக் கீழ்க் கண்டவாறு அட்டவணைப் படுத்துவோம்.

*	I	B	C	D	E	F	K	H
I	I	B	C	D	E	F	K	H
B	B	D	I	C	K	H	F	E
C	C	I	D	B	H	K	E	F
D	D	C	B	I	F	E	H	K
E	E	H	K	F	D	I	B	C
F	F	K	H	E	I	D	C	B
K	K	E	F	H	C	B	D	I
H	H	F	E	K	B	C		D

$*$-ன் கீழ் G அடைக்கப்பட்டது.

உதாரணம், $(F * B) * D = K * D = H$

$$F * (B * D) = F * C = H$$

$$\therefore \quad F * (B * D) = (F * B) * D \quad \text{முதலியன.}$$

$\therefore$ $*$ சேர்ப்புப் பண்பு உடையது.

I ஆனது முற்றொருமை உறுப்பு.

$B^{-1} = C,\ C^{-1} = B,\ D^{-1} = D,\ E^{-1} = F,\ F^{-1} = E,$ $K^{-1} = H;\ H^{-1} = K.$

$\therefore$ G-ல் நேர் மாறுகள் உண்டு.

$\therefore$ $(G, *)$ என்பது குலம்.

$B * E = K, \quad E * B = H \implies B * E \neq E * B.$

$\therefore$ $*$-க்குப் பரிமாற்றுப் பண்பில்லை.

$\therefore$ $(G, *)$ அபீலியனல்லாத குலம்.

பயிற்சி

1. வழக்கமான கூட்டலின் கீழ் எல்லா மெய்யெண்கள் கணம், அபீலியன் குலம் என்று நிறுவுக.

2. வழக்கமான கூட்டலின் கீழ் எல்லாக் கலப்பெண்கள் கணம், முடிவில்லாத அபீலியன் குலம் என நிறுவுக.

3. வழக்கமான பெருக்கல் என்றால், $(C - \{0\}, .)$, $(Q - \{0\}, .)$ என்பவை முடிவில்லாத அபீலியன் குலங்கள் என நிறுவுக.

4. $(Z_5 - \{0\}, \cdot_5)$ ஒரு முடிவுள்ள அபீலியன் குலமா என்று ஆராய்க.

5. G : ஒரு தளத்திலுள்ள உருவத்தை $60°$-ன் முழு எண்களின் மடங்குகள் வழிச் சுழற்சிகள். கணம்

$$= \{ R_{60}, R_{120}, R_{180}, R_{240}, R_{300}, R_{360} \}$$

$*$: முதல் இயக்கத்தைத் தொடர்ந்து அடுத்த இயக்கத்தைச் செயல் படுத்துதல்.

$(G, *)$ குலமா என்று ஆராய்க.

6. கீழ்க்கண்டவைகள் குலங்களல்ல என நிறுவுக.

(குறிப்பு: ஏதாவது ஒரு நிபந்தனை மீறப்பட்டால் அதை மட்டும் எடுத்துக் காட்டினால் போதும்)

$\cdot$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	c
c	c	c	c

$\cdot$	a	b
a	a	b
b	a	b

$\cdot$	a	b	c	d	e
a	a	b	c	d	e
b	b	e	e	b	e
c	c	e	e	c	e
d	d	b	c	a	e
e	e	e	e	e	e

$\cdot$	x	y	0
x	x	y	0
y	y	0	0
0	0	0	0

$\cdot$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_2	a_2	a_1	a_4	a_5	a_3
a_3	a_3	a_5	a_1	a_2	a_4
a_4	a_4	a_3	a_5	a_1	a_2
a_5	a_5	a_4	a_2	a_3	a_1

இது குலமல்ல; தடம் (*loop*)

2·5. குலங்களின் எளிய அடிப்படைப் பண்பகள் (Simple elementary properties of groups)

2·5·1. தேற்றம் 1

$(G, *)$ குலமானுல், இக்குலத்திற்கு ஒரே ஒரு முற்றொருமை உறுப்புத்தான் உண்டு.

நிறுவல்

முடியுமானுல், $(G, *)$-ல் e, e' என்னும் இரு முற்றொருமைகள் இருக்கட்டும்.

e முற்றொருமை உறுப்பு $\Longrightarrow e * e' = e'$
(முற்றொருமையின் வ. இ.)

e' முற்றொருமை உறுப்பு $\Longrightarrow e * e' = e$
(முற்றொருமையின் வ. இ.)

$\therefore \quad e = e * e' = e'$

$\therefore \quad e = e'$

$\therefore$ எந்த ஒரு குலத்திலும் ஒரே ஒரு முற்றொருமைதான் உண்டு.

2·5·2. தேற்றம் 2

ஒரு குலத்தில் ஒவ்வோர் உறுப்புக்கும் ஏற்ப ஒரே ஒரு நேர்மாறுதான் உண்டு.

நிறுவல்

கொடுத்த குலம் $(G, *)$ என்க.

$(G, *)$-ன் முற்றொருமை உறுப்பு e என்க.

முடியுமானுல்,

$(G, *)$-ல் யாதாவதொரு உறுப்பு a-க்கு a^{-1}, a' என்று இரு நேர்மாறுகள் இருக்கட்டும்.

a-ன் நேர்மாறு a^{-1} என்ருல்,

$a^{-1} * a = a * a^{-1} = e$ (நேர்மாறு வரை இலக்கணம்)

a-ன் நேர்மாறு a' என்பதால்,

$a' * a = a * a' = e$ (நேர்மாறு வ. இ.)

ஆனால்,

$$a' = e * a' \text{ (முற்றொருமை } e\text{-ன் வ.இ.)}$$
$$= (a^{-1} * a) * a' \text{ (நேர்மாறு } a^{-1}\text{-ன் வ.இ.)}$$
$$= a^{-1} * (a * a') \text{ (} G \text{ குலத்தில் சேர்ப்புப் பண்பு)}$$
$$= a^{-1} * e \text{ (நேர்மாறு } a'\text{-ன் வ.இ.)}$$
$$= a^{-1}$$

இதனால் பெறப்படுவது : $(G, *)$-ல் ஓர் உறுப்புக்கு இரு நேர்மாறுகள் உண்டென்றால், அவை சமம். ∴ ஒரு குலத்தில் ஓர் உறுப்புக்கு ஒரே ஒரு நேர்மாறுதான் உண்டு.

2·5·3. அடித்தல் விதி (Cancellation Law)

$(G, *)$ ஒரு குலம் என்க.

$a, b, c \in G$ என்றால்

(i) இடது அடித்தல் விதி : $a * b = a * c \Longrightarrow b = c$

(ii) வலது அடித்தல் விதி : $b * a = c * a \Longrightarrow b = c$

நிறுவல்

$(G, *)$-ன் முற்றொருமை உறுப்பு e என்க.

G-ல் a-ன் நேர்மாறு a^{-1} என்க. ∴ $a^{-1} \in G$.

(i) கொடுத்திருப்பது $a * b = a * c, \forall\, a, b, c \in G$.

சமன்பாட்டின் இரு பக்கங்களையும் இடப்புறம் a^{-1} ஆல் 'பெருக்கு' (அதாவது, $*$ ஆல் இணை).

$$\therefore \quad a^{-1} * (a * b) = a^{-1} * (a * c)$$
$$(a^{-1} * a) * b = (a^{-1} * a) * c \quad \text{(சேர்ப்பு விதி)}$$
$$e * b = e * c \quad \text{(நேர்மாறு வ.இ.)}$$
$$b = c \quad \text{(முற்றொருமை வ.இ.)}$$
$$\therefore \quad a * b = a * c \Longrightarrow b = c.$$

(ii) கொடுத்திருப்பது : $b * a = c * a$

சமன்பாட்டின் இரு பக்கங்களையும் வலப்புறம் a^{-1} ஆல் 'பெருக்கு'.

$(b * a) * a^{-1} = (c * a) * a^{-1}$
$b * (a * a^{-1}) = c * (a * a^{-1})$ (சேர்ப்பு விதி)
$b * e = c * e$ (நேர்மாறு வ.இ.)
$b = c$ (முற்றொருமை வ.இ.)

$\in \quad b * a = c * a \Longrightarrow b = c.$

2·5·4 தேற்றம்

$(G, *)$ குலம் என்க ; $a, b \in G$ என்க.

$a * x = b$ என்றவாறு G-ல் ஒரே ஓர் உறுப்பு x-ம்,

$y * a = b$ என்றவாறு G-ல் ஒரே ஓர் உறுப்பு y-ம்

உள்ளன.

நிறுவல்

$(G, *)$-ன் முற்றொருமை உறுப்பு e என்க.

a-ன் நேர்மாறு $(G, *)$-ல் a^{-1} என்க.

$a * x = b$ என்ற சமன்பாட்டை எடுத்துக்கொள்.

$a * (a^{-1} * b) = (a * a^{-1}) * b$ (G-ன் சேர்ப்பு விதி)
$= e * b$ (நேர்மாறு வ.இ.)
$= b$ (முற்றொருமை வ இ.)

$\therefore \quad a * x = b$-ன் தீர்வு, $x = a^{-1} * b \in G$ ஆகும்.

$a^{-1} * b$ ஐத் தவிர x' மற்றொரு தீர்வு என்றால், $a * x' = b$
$\therefore \quad a * x = a * x'$

$(G, *)$-ன் இடது அடித்தல் விதிப்படி, $x = x'$

$\therefore \quad x \in a^{-1} * b$ என்பது $a * x = b$-ன் ஒரே ஒரு தீர்வு.
$y * a = b$ என்ற சன்பாட்டை எடுத்துக் கொள்.

$(b * a^{-1}) * a = b * (a^{-1} * a)$ (G-ன் சேர்ப்பு விதி)
$= b * e$ (நேர்மாறு வ.இ.)
$= b$ (முற்றொருமை உறுப்பு வ.இ.)

$\therefore \quad y * a = b$-ன் தீர்வு $y = b * a^{-1} \in G$ ஆகும்.

முடியுமானால் y' மற்றொரு தீர்வு ஆகட்டும்.

$\therefore \quad y' * a = b$

$\therefore \quad y * a = y' * a$

$(G, *)$-ன் வலது அடித்தல்படி, $y = y'$

$\therefore \quad y \in b * a^{-1}$ என்பது $y * a = b$-ன் ஒரே ஒரு தீர்வு.

2·5·5· தேற்றம்

$(G, *)$ குலம் என்க.

$\forall a \in G, (a^{-1})^{-1} = a.$

நிறுவல்

$(G, *)$-ல் $(a^{-1})^{-1}$ என்பது a^{-1} ன் நேர்மாறு.

$(G, *)$-ன் முற்றொருமை உறுப்பு e என்றால்,

$(a^{-1})^{-1} * (a^{-1}) = (a^{-1}) * (a^{-1})^{-1} = e$

ஆனால், $(G, *)$-ல் a^{-1}-ன் நேர்மாறு a; ஏனெனில் $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$

ஆகையால் $(a^{-1})^{-1}$-ம், a-ம், a^{-1}-ன் நேர்மாறுகள்.

ஆனால் குலத்தின் பண்புப்படி, G-குலத்தின் ஒவ்வோர் உறுப்புக்கும் ஒரே ஒரு நேர்மாறுதான் உண்டு. (தேற்றம் 2·5·2 காண்க.

$\therefore \quad (a^{-1})^{-1} = a.$

2·5·6 தேற்றம்

$(G, *)$ குலமென்றால், $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1} \ \forall a, b \in G,$

நிறுவல்

$(G, *)$-ன் எவையேனும் இரு உறுப்புகள் a, b என்றால், a^{-1}, b^{-1}-ம் $(G, *)$-ல் உள்ளன.

$(a * b) * (b^{-1} * a^{-1}) = ((a * b) * b^{-1}) * a^{-1}$

(சேர்ப்பு விதி)

$= (a * (b * b^{-1})) * a^{-1}$
(சேர்ப்பு விதி)

$= (a * e) * a^{-1}$
(நேர்மாறு b^{-1}-ன் வ.இ.)

$= a * a^{-1}$ (முற்றொருமையின் வ.இ.)

$= e$ (நேர்மாறு a^{-1}-ன் வ.இ.)

இதுபோல் $(b^{-1} * a^{-1}) * (a * b) = ((b^{-1} * a^{-1}) * a) * b$

$= (b^{-1} * (a^{-1} * a)) * b$

$= (b^{-1} * e) * b$

$= b^{-1} * (e * b)$

$= b^{-1} * b$

$= e$

$\because \quad (a * b) * (b^{-1} * a^{-1}) = (b^{-1} * a^{-1}) * (a * b) = e$

$\therefore \quad b^{-1} * a^{-1}$ என்பது $a * b$-ன் நேர்மாறு.

ஆனால் ஒரு குலத்தில் ஒவ்வோர் உறுப்புக்கும் ஒரே ஒரு நேர்மாறுதான் உண்டு என்பதால் $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$.

2·6. வரை இலக்கணம்

முழு அடுக்குகள் (Integral Exponents)

e ஐ முற்றொருமை உறுப்பாகக் கொண்ட $(G, *)$ குலத்தின் யாதாவதொரு உறுப்பு a என்க. a-ன் அடுக்குகளைக் கீழ்க் கண்டவாறு வரையறு:

$a^0 = e$

$a^1 = a$

$a^2 = a * a$

... ...

... ...

$a^k = a * a * a * \ldots\ldots$ k தடவைகள், $k \in Z^+$ என்றால் $a^{k+1} = a^k \cdot a$ என்று வரையறு.

கணிதத் தொகுத்தறி முறையின் தத்துவப்படி (1·17·2), a^n ஐ எல்லா நேர் முழு எண்கள் n-க்கு வரையறுக்கலாம்.

மேலும் $a^{-n} = (a^{-1})^n$ என்று எல்லாக் குறையற்ற முழு எண்கள் n-க்கு வரையறு.

அப்பொழுது a^n ஆனது எல்லா முழு எண்கள் n-க்கு வரையறுக்கப்பட்டது. சாதாரண மெய்யெண்களுக்கான அடுக்குகள் போலவே இந்த அடுக்குகளும் செயல்படுகின்றன என்பதைப் பார்ப்போம்.

2·6·1. தேற்றம்

$(G, *)$ ஒரு குலமென்றும், a, b என்பவை G-ன் எவையேனும் இரு உறுப்புகள் என்றும் கொண்டால்

1. $a^m * a^n = a^{m+n}, \ \forall\, m, n \in \mathbf{Z}^+$
2. $(a^m)^n = a^{mn}, \ \forall\, m, n \in \mathbf{Z}^+$
3. $(G, *)$ அபீலியன் $\Longrightarrow (a * b)^n = a^n * b^n, \ \forall\, n \in \mathbf{Z}^+$

நிறுவல்

இவற்றைக் கணிதத் தொகுத்தறி முறையால் நிறுவுவோம்.

1. '$a^m * a^n = a^{m+n}, \ \forall\, m \in \mathbf{Z}^+$' என்ற கூற்றை $S(n)$ என்க.

$S(1): \ a^m * a^1 = a^{m+1} \ \ \forall\, m \in \mathbf{Z}^+$

a^{m+1} ன் வ. இ. படி, $S(1)$ உண்மை.

$\therefore \ n = 1$-க்கு $S(n)$ உண்மை.

$S(k): \ a^m * a^k = a^{m+k} \ \ \forall\, m \in \mathbf{Z}^+, k \in \mathbf{Z}^+$ என்பன உண்மை என்க. (தற்கோள்)

$a^m * a^{k+1} = a^m * (a^k * a^1)$ (a^{k+1}-ன் வ.இ.)

$= (a^m * a^k) * a$ (சேர்ப்பு விதி)

$= a^{m+k} * a$ ($S(k)$ தற்கோள்)

$= a^{m+k+1} \ \ \forall\, m \in \mathbf{Z}^+$ (a^{m+k+1}-ன் வ.இ.)

$\therefore \ S(k+1)$ உண்மை.

$\therefore$ கணிதத் தொகுத்தறி முறையின் தத்துவப்படி, $\forall n \in \mathbf{Z}^+$ $S(n)$ உண்மை.

$\therefore$ (1) நிறுவப்பட்டது.

2. $S(n)$: '$(a^m)^n = a^{mn} \quad \forall\, m \in Z^+$' என்க.

$S(1) : (a^m)^1 = a^{m.1} = a^m \quad \forall\, m \in Z^+$

a^1-ன் வ. இ. படி $S(1)$ உண்மை.

(a-க்குப் பதில் a^m ஐப் பிரதியிடு)

தற்கோள்

$S(k) : \quad (a^m)^k = a^{mk} \quad \forall\, m \in Z^+, k \in Z^+$ உண்மை என்க.

$(a^m)^{k+1} = (a^m)^k * a^m$ (a^{k+1}-ன் வ. இ. a-க்குப் பதில் a^m ஐப் பிரதியிடு)

$= a^{mk} * a^m$ (தற்கோள்)

$= a^{mk+m}$ (1)-ன்படி

$= a^{m(k+1)} \quad \forall\, m \in Z^+$

$\therefore$ $S(k+1)$ உண்மை.

$\therefore$ கணிதத் தொகுத்தறி முறையின் படி, $\forall\, n \in Z^+$, $S(n)$ உண்மை.

3. $S(n)$: '$(a * b)^n = a^n * b^n \quad \forall\, n \in Z^+$' என்க.

$S(1) : (a * b)^1 = a^1 * b^1$

$= a * b$

a^1-ன் வ. இ. படி $S(1)$ உண்மை.

(a-க்குப் பதில் $a * b$ ஐப் பிரதியிடு.)

தற்கோள்: $S(k)$: '$(a * b)^k = a^k * b^k$', $k \in Z^+$ உண்மை என்க.

$(a * b)^{k+1} = (a * b)^k * (a * b)$

$= (a^k * b^k) * (a * b) \quad (S(k))$

$= (a^k * b^k) * (b * a)$ ($(G, *)$ அபீலியன்.)

$= ((a^k * b^k) * b) * a$ (சேர்ப்புப் பண்பு)

$= (a^k * (b^k * b)) * a$ (சேர்ப்புப் பண்பு)

$= (a^k * b^{k+1}) * a$ (b^{k+1}-ன் வ.இ.)

$= a * (a^k * b^{k+1})$ ($(G, *)$ அபீலியன்)

$= (a * a^k) * b^{k+1}$ ($*$-ன் சேர்ப்பு விதி)

$= a^{k+1} * b^{k+1}$ (a^{k+1}-ன் வ. இ.)

$\therefore$ $S(k+1)$ உண்மை.

$\because$ கணிதத் தொகுத்தறி முறைப்படி, $\forall\, n \in \mathbf{Z}^+$ $(a * b)^n = a^n * b^n$, G அபீலியன் குலம், அதாவது $S(n)$ உண்மை.

கவனிக்க.

1. $*$ என்பது வழக்கமான கூட்டல் $+$ என்றால்

$a^n = a + a + a + \ldots\ldots$ n தடவைகள் என்றாகும்.

$= na$

அதாவது 'a-ன் அடுக்கு n' என்பது 'a-ன் மடங்கு n' என்றாகும்.

2. மேற்கண்ட தேற்றம் 2·6·1, எல்லா முழு எண்கள் m, n-க்கு உண்மை; அதாவது m, n ஆகியவை பூச்சியங்களாகவோ, நேர் எண்களாகவோ, குறை எண்களாகவோ இருக்கலாம்.

உதாரணமாக $m = 0$ என்க.

அப்பொழுது 2·6·1-ன் (1) ஆனது $a^0 * a^n = a^{0+n}\ \forall\, n$ என்றாகும்.

வ. இ. படி $a^0 = e$ என்பதால், $e * a^n = a^n = a^{0+n}$

இப்பொழுது m ; n இரண்டுமே குறையெண்கள் என்க.

$\because$ $-m$-ம், $-n$-ம் நேர் எண்கள்.

$a^m * a^n = (a^{-1})^{-m} * (a^{-1})^{-n}$ (வ.இ.)

$= (a^{-1})^{-m-n}$ (2·6·1-ன் (1))

$= (a^{-1})^{-(m+n)}$ (குறியீட்டு முறை)

$= a^{m+n}$ (வ. இ.)

இப்பொழுது ஓர் அடுக்கு நேர் ; மற்ற அடுக்கு குறை என்க.

$m > 0, n < 0, -n < m$ என்று வைத்துக் கொள்.

$p = -n$ என்க. $\therefore$ p நேர் எண்.

$\therefore \quad a^m * a^n = (a^{m-p} * a^p) * a^{-p}$ (2·6·1-ன் (1))

$= a^{m-p} * (a^p * a^{-p})$ (சேர்ப்புப் பண்பு)

இப்பொழுது கணிதத் தொகுத்தறி முறை வழி $a^p * a^{-p} = e$ என நிறுவுவோம்.

$S(p)$: '$a^p * a^{-p} = e$' என்க.

$S(1)$: $a^1 * a^{-1} = e$ உண்மை; ஏனெனில்,

2·6·1-ன் படி, $a^1 * a^{1-1} = a^{-1} = a^0 = e$.

தற்கோள்

$S(k)$: $a^k * a^{-k} = e$ உண்மை என்க, $k \in Z^+$

$a^{k+1} * a^{-(k+1)} = a^{k+1} * (a^{-1})^{k+1}$ (a^{-n}-ன் வ.இ.)

$= a^k * a * (a^{-1})^{k+1}$ (a^{k+1}-ன் வ.இ.)

$= a^k * (a^{-1})^{-1} * (a^{-1})^{k+1}$ (a^{-n}-ன் வ.இ.)

$= a^k * (a^{-1})^{-1} * (a^{-1})^{k+1}$ ($*$-ன் சேர்ப்பு விதி)

$= a^k * ((a^{-1})^{-1} * (a^{-1})^{1+k})$

(Z^+ல் $+$-ன் பரிமாற்றுப் பண்பு)

$= a^k * ((a^{-1})^{-1} * a^{-1} * (a^{-1})^k)$

$= a^k * (e * (a^{-1})^k)$

$= a^k * (a^{-1})^k$

$= a^k * a^{-k}$

$= e$ ($S(k)$ தற்கோள்)

$\therefore$ $S(k+1)$ உண்மை.

$\therefore$ $S(p)$ உண்மை, $\forall p \in Z^+$.

$\therefore$ $a^m \cdot a^n = a^{m-p} * e = a^{m-p} = a^{m+n}$ $\therefore$ $p = -n$. ∎

மாதிரிக் கணக்குகள்

$(G, \cdot)$ குலத்தில் யாதாவதோர் உறுப்பு a என்றும், e முற்றொருமை உறுப்பு என்றும் கொண்டால்

1. $a\, a^n = a^n\, a \quad \forall\, n \in N$

2. $(a^{-1})^n\, a^n = e \quad \forall\, n \in N$ என்றும் நிறுவுக.

நிறுவல்

1. $S(n)$: '$aa^n = a^n a \quad \forall\, n \in N$' என்றால்

$S(1)$: $a^1 = a^1 a$ உண்மை. ஏனெனில் $a^1 = a$ (வ.இ.)

தற்கோள் : $S(k)$: $aa^k = a^k a,\ k \in N$ உண்மை என்க.

$aa^{k+1} = a(a^k \cdot a)$ (a^{k+1}-ன் வ. இ.)

$= (aa^k) \cdot a$ (சேர்ப்பு விதி)

$= (a^k a)\, a$ (தற்கோள்)

$= a^{k+1}\, a$ (a^{k+1}-ன் வ. இ.)

$\therefore$ $S(k+1)$ உண்மை $k \in N$.

$\therefore$ கணிதத் தொகுத்தறி முறை வழி, $aa^n = a^n a \quad \forall\, n \in N$.

2. $S(n)$: '$(a^{-1})^n\, a^n = e \quad \forall\, n \in N$' என்றால்

$S(1)$: $(a^{-1})^1\, a^1 = e$ உண்மை. ஏனெனில்

$a^{-1} \cdot a = e$ (a^{-n}-ன் வ. இ.)

தற்கோள்

$S(k)$: $(a^{-1})^k\, a^k = e$ உண்மை என்க.

$(a^{-1})^{k+1} \cdot a^{k+1} = [(a^{-1})^k\, a^{-1}] \cdot [a^k \cdot a]$ (a^{k+1}-ன் வ. இ.)

$= [a^{-1}\, (a^1)^k] \cdot [a^k \cdot a]$ (மேற்கண்ட கணக்கு)

$= a^{-1}\, [(\,(a^{-1})^k a^k) \cdot a]$ (சேர்ப்பு விதி)

$= a^{-1}\, [e \cdot a]$ (தற்கோள்)

$= a^{-1}\, a$ (e-ன் பண்பு)

$= e$ (a^{-1}-ன் பண்பு)

2·7. வரிசை மாற்றக் குலங்கள் (Permutation groups)

நாம் சென்ற அத்தியாயத்தில் n குறியீடுகளைக் கொண்ட ஒரு முடிவுள்ள கணத்தை எடுத்துக் கொண்டு வரிசை மாற்றத்தை வரையறுத்தோம். ஆனால் இந்தப் பகுதியில் முடிவில்லாத கணங்களுக்கும் பொருந்தும் வகையில், வரிசை மாற்றத்திற்குப் பொதுவான வரை இலக்கணம் கொடுப்போம்.

2·7·1. வரை இலக்கணம்

வரிசை மாற்றம் (Permutation)

ஒரு கணத்தின் தன்னுள், (1—1) முழுக் கோர்த்தலுக்கு வரிசை மாற்றம் என்பது பெயர்.

இந்தக் கணம் முடிவுள்ளதானால், n குறியீடுகளின் வரிசை மாற்றம் என்கிறோம். n குறியீடுகளின் வரிசை மாற்றத்தைப் பகரவடைப்புகளால் குறியிட்டோம். வரிசைமாற்றம் என்பது கோர்த்தலாகையால், முடிவில்லாத கணத்தின் வரிசை மாற்றத்தைச் சார்புக் குறியீட்டால் (Functional notation) வழங்குவோம்.

2·7·2. வரை இலக்கணம்

சம வரிசை மாற்றங்கள்

முடிவுள்ள அல்லது முடிவில்லாத யாதாவதொரு கணம் A-ன் வரிசை மாற்றங்கள் α, β என்றால்

$$\alpha = \beta \iff \alpha(a) = \beta(a), \quad \forall\, a \in A$$

2·7·3. வரை இலக்கணம்

வரிசை மாற்றப் பெருக்கல்

யாதாவதொரு கணம் A-ன் வரிசை மாற்றங்கள் α, β என்றால் A-ன் வரிசை மாற்றமான $\alpha\beta$-ன் வரையறை : $\alpha\beta(a) = \alpha(\beta(a)), \forall\, a \in A$. α, β-க்களின் பெருக்கமான $\alpha\beta$-க்கு வரிசை மாற்றப் பெருக்கம் என்பது பெயர்.

2·7·4. தேற்றம்

யாதாவதொரு முடிவுள்ள அல்லது முடிவில்லாத கணத்தின் எல்லா வரிசை மாற்றங்களும் அமைக்கும் கணம் S-ன் மீது வரிசை மாற்றப் பெருக்கல், $\cdot$ செயலி என்றால், $(S, \cdot)$ குலமாகும்

நிறுவல்

கொடுக்கப்பட்டவை :

A : முடிவுள்ள அல்லது முடிவில்லாத யாதாவதொரு கணம்

S : $\{$ A-ன் எல்லா வரிசை மாற்றங்கள் $\}$

$\cdot$ வரிசை மாற்றப் பெருக்கல்.

நிறுவ :

$(S, \cdot)$: ஒரு குலம்

A-ன் எவையேனும் இரு வரிசை மாற்றங்கள் α, β என்க. அதாவது $\alpha, \beta \in S$

a என்பது A-ன் யாதாவதொரு உறுப்பு என்க.

β-ம், α-ம் A-ன் தன்னுள் (1—1) முழுக் கோர்த்தல்கள்.

$\alpha \beta (a) = \alpha (\beta (a))$

$\therefore$ $\alpha\beta$-ம், A-ன் தன்னுள் (1—1) முழுக் கோர்த்தல் ஆகும்.

$a \neq b, a, b \in A$ என்க.

β, (1—1) கோர்த்தல் என்பதால், $\beta (a) \neq \beta (b)$

α, (1—1) கோர்த்தல் என்பதால், $\alpha (\beta (a)) \neq \alpha (\beta (b))$.

$\therefore$ $\alpha\beta$-ம் A-ன் தன்னுள், (1—1), முழுக் கோர்த்தலாகும்.

$\therefore$ $\alpha\beta$-ம் A-ன் வரிசை மாற்றமே.

$\therefore$ $\alpha\beta \in S$.

$\therefore$ S கணம் $\cdot$ ஆல் அடைக்கப்பட்டது.

$\therefore$ S-ன் மீது $\cdot$ ஆனது ஈரிணைச் செயலியாகும். $\therefore$ குலத்திற்கான முதல் நிபந்தனை நிறைவேற்றப்பட்டது.

S-ல் யாதாவது ஒரு மும்மை α, β, γ என்றால்

$\alpha (\beta\gamma) (a) = \alpha (\beta\gamma (a)) = \alpha (\beta (\gamma (a))) \ \forall \ a \in A$

இதுபோல்

$(\alpha\beta) \gamma (a) = \alpha\beta (\gamma (a)) = \alpha (\beta (\gamma (a))) \ \forall \ a \in A$

$\therefore$ $\alpha (\beta\gamma) (a) = (\alpha\beta) \gamma (a)$

சம வரிசை மாற்றங்களின் வரை இலக்கணப்படி,

$\alpha(\beta\gamma) = \alpha\beta(\gamma)$

$\therefore$ · -க்கு S-ல் சேர்ப்பு விதி உண்டு.

$\forall a \in A, \in(a) = a$ என்றவாறு S-ன் ஒரு வரிசை மாற்றம் $\in$ என்க. அதாவது, A-ல் $\in$-ன் கீழ் ஒவ்வோர் உறுப்பின் எதிர் உருவும் அதுவேயாகும்.

S-ல் யாதாவதொரு வரிசை மாற்றம் α எனில், A-ல் யாதாவதொரு உறுப்பு a என்க.

$\alpha \in (a) = \alpha(\in(a)) = \alpha(a)$.

$\in \alpha(a) = \in(\alpha(a)) = \alpha(a)$.

$\therefore \quad \alpha\in = \in\alpha = \alpha$ (சம வரிசைமாற்றங்களின் வ.இ.)

$\therefore \quad \in$ என்பது S-ன் முற்றொருமை உறுப்பு.

$\therefore \quad (S, .)$-ல் முற்றொருமை உறுப்பு உண்டு.

S-ல் யாதாவதொரு வரிசைமாற்றம் α என்றால் நேர்மாறு கோர்த்தல் α^{-1} ஐ,

$\alpha^{-1}(a) = b \Longleftrightarrow \alpha(b) = a,\ a, b \in A$ என்றவாறு வரையறு.

$b \overset{\alpha}{\longmapsto} a$ முழுக் கோர்த்தலென்றால், $a \overset{\alpha^{-1}}{\longmapsto} b$-ம் முழுக் கோர்த்தல்.

α ஒரு (1—1) கோர்த்தல் என்பதால், α^{-1}-ம் (1—1) கோர்த்தல் ஆகும்.

$\therefore \quad \alpha^{-1}$ ஆனது (1—1) முழுக் கோர்த்தல். $\therefore \quad \alpha^{-1} \in S$

$\alpha\,\alpha^{-1}(a) = \alpha(\alpha^{-1}(a)) = \alpha(b) = a = \in(a)$

$\therefore \quad \alpha\,\alpha^{-1} = \in$

$\alpha(a) = c,\ c \in A$ என்றால், $\alpha^{-1}(c) = a$

$\alpha^{-1}\alpha(a) = \alpha^{-1}(\alpha(a)) = \alpha^{-1}c = a = \in(a)$

$\therefore \quad \alpha^{-1}\alpha = \in$

$\therefore \alpha\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\alpha = \in$ என்பதால், $(S, \cdot)$-ல் α^{-1} என்ற வரிசை மாற்றம் α-ன் நேர்மாறு ஆகும். $\therefore (S, \cdot)$-ல் நேர்மாறுகள் உண்டு.

$\therefore \quad (S, \cdot)$ என்பது குலம்.

குறிப்பு : A ஒரு முடிவுள்ள கணமானுல், A-ன் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை n என்ருல், A-ன் எல்லா வரிசை மாற்றங்கள் அமைக்கும் குலத்தை, மேற்கண்ட $(S, .)$ குலத்தை $(S_n, .)$ என்று குறியிட்டு, 'n குறியீடுகளின் சமச்சீர் குலம்' (symmetric group on n symbols) என்போம். குலங்களுக்கான உதாரணங்களில், S_3 ஐக் குறிப்பிட்டோம். திருப்பிப் பார்க்க.

2.8. சக்கர வரிசை மாற்றங்கள் (Cyclic permutations)

n உறுப்புகளைச் சக்கர வரிசையாக (cyclically), அதாவது, சக்கரமாக இடப்பெயர்ச்சி செய்யும் வரிசைமாற்றத்திற்கு, n அடுக்குள்ள 'சக்கர வரிசை மாற்றம்' என்பது பெயர். இதனை வட்ட வரிசை மாற்றம் (circular permutation) என்றும் சொல்லு வதுண்டு.

உதாரணமாக,

$$\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

என்ற வரிசை மாற்றத்தை எடுத்துக் கொள். முழுக் கோர்த்தல் வழி

$2 \overset{\alpha}{\longmapsto} 3,\ 3 \overset{\alpha}{\longmapsto} 5,\ 5 \overset{\alpha}{\longmapsto} 6,\ 6 \overset{\alpha}{\longmapsto} 2$ என்று α வரிசை மாற்றத்தின் செயலைக் காண்கிருேம்.

அதாவது, 2, 3, 5, 6 ஆகிய உறுப்புகளை α ஆனது சக்கர வரிசையாக மாற்றுகிறது. $1 \overset{\alpha}{\longmapsto} 1,\ 4 \overset{\alpha}{\longmapsto} 4 \Longrightarrow 1$ ஐயும், 4 ஐயும் α மாற்றவில்லை. இந்த மாதிரியான α வரிசை மாற்றத்தை (2 3 5 6) என்ற குறியீட்டால் எழுதுவதுண்டு. (3 5 6 2), (5 6 2 3), (6 2 3 5) என்றும் எழுதலாம்.

இக்குறியீட்டில் இல்லாத உறுப்புகள் மாறவில்லை என்ருகும். மாற்றத்துக்குட்பட்ட உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை 4.

∴ α-க்கு '4-நீள சக்கரம்' (Cycle of length 4) என்பது பெயர்.

2·8·1. வரை இலக்கணம்

k-நீள சக்கரம் (Cycle of length k)

α என்பது A என்ற முடிவுள்ள கணத்தின் வரிசை மாற்றம் என்க. $a_1, a_2, \ldots, a_k$ என்பவை A-ல் வெவ்வேருன உறுப்புகள் என்க.

$\alpha(a_1) = a_2, \alpha(a_2) = a_3 \ldots \alpha(a_{k-1}) = a_k, \alpha(a_k) = a_1$ என்றவாறும், $a_1, a_2, \ldots a_k$ அல்லாத எந்த ஓர் உறுப்பு a-க்கும், $\alpha(a) = a$ என்றவாறும் α அமைந்தால், α ஐ k-நீள சக்கரம் என்போம்.

α ஐ $(a_1\ a_2\ a_3 \ldots\ldots a_k)$ என்று குறியிடுவோம்.

குறிப்பு : சக்கர வரிசைக் குறியீட்டு முறையில், முற்றொருமை வரிசை மாற்றத்தை (1) என்று குறியிடுவது வழக்கம். உதாரணமாக $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ என்பதன் குறியீடு (1).

2·8·2 வரை இலக்கணம்

பொது உறுப்பிலிச் சக்கரங்கள் (Disjoint Cycles)

n குறியீடுகளின் சமச்சீர்க் குலம் S_n-ல் α, β என்ற இரு சக்கரங்களுக்குப் பொதுவான முழு எண்கள் இல்லையானல், இந்தச் சக்கரங்களைப் பொது உறுப்பிலிச் சக்கரங்கள் என்போம்.

உதாரணமாக (1 2 4), (3, 5, 6) என்பன பொது உறுப்பிலிச் சக்கரங்கள்; (1 3 5), (3, 2) என்பன பொது உறுப்பிலிச் சக்கரங்களாகா.

2.8·3 பயனுள்ள உதாரணம்

பொது உறுப்பிலிச் சக்கரங்களின் பெருக்கமும், வரிசை மாற்றமும்

முடிவுள்ள கணத்தின் ஒரு வரிசை மாற்றத்தைப் பொது உறுப்பிலிச் சக்கரங்களின் பெருக்கமாக எழுதலாம்.

1. $\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{bmatrix}$

ஏதாவதொரு முழு எண்ணிலிருந்து தொடங்குவோம். உதாரணமாக 1 ஐ எடுத்துக் கொள்வோம். $\alpha(1) = 2$, $\alpha(2) = 3$, $\alpha(3) = 1$. 1 உடன் ஆரம்பித்து 1 ஐ அடைந்து விட்டோம். ∴ α-ன் ஒரு சக்கரம் $(1\ 2\ 3) = \alpha_1$ என்க. α_1-ல் இல்லாத 4 ஐ எடுத்துக் கொள். $\alpha(4) = 5$, $\alpha(5) = 4$ ∴ மற்றொரு சக்கரம் $\alpha_2 = (4,5)$. எல்லா உறுப்புகளும் மாற்றத்தில் அமைந்து விட்டன, ∴ $\alpha = \alpha_1 \alpha_2 = (1\ 2\ 3)\ (4\ 5)$. α_1-ம், α_2-ம் பொது உறுப்பிலிச் சக்கரங்கள்.

$$2. \quad \alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 7 & 8 & 1 & 2 & 6 & 4 & 9 & 3 \end{bmatrix}$$

$\alpha(5) = 2$; $\alpha(2) = 7$; $\alpha(7) = 4$; $\alpha(4) = 1$: $\alpha(1) = 5$;

∴ $\alpha_1 = (5\ 2\ 7\ 4\ 1)$. $\alpha(3) = 8$; $\alpha(8) = 9$; $\alpha(9) = 3$;

∴ $\alpha_2 = (3, 8, 9)$. $\alpha(6) = 6$

∴ $\alpha = \alpha_1 \alpha_2 = (5\ 2\ 7\ 4\ 1)\ (3\ 8\ 9)$.

2.8.4. தேற்றம்

ஒரு முடிவுள்ள கணத்தின் ஒவ்வொரு வரிசை மாற்றமும் ஒரு சக்கரமாகும்; அல்லது,

ஒவ்வொரு வரிசை மற்றத்தையும் இரண்டு அல்லது இரண்டிற்கு மேற்பட்ட பொது உறுப்பிலிச் சக்கரங்களின் பெருக்கமாக எழுதலாம்.

நிறுவல்

முடிவுள்ள கணம் A என்க. A-ன் யாதாவதொரு வரிசை மாற்றம் α என்க. A-ன் யாதாவதொரு a_1 ஐப் பொறுக்கியெடு. α-ன் கீழ் a_1-ன் எதிர் உரு a_2 என்க. $a_1 = a_2$ என்றால், (a_1) என்பது முதல் சக்கரம். அப்படி இல்லாவிடில், $\alpha(a_2) = a_3$ என்க. இதுபோல் a_i என்பது a_{i-1}-ன் எதிர் உரு என்றால், $\alpha(a_i)$ ஐக் காண். α ஆனது (1—1) கோர்த்தல் என்பதால் $\alpha(a_i)$ ஆனது $a_2 a_3, \ldots, a_{i-1}$ என்ற உறுப்புகளில் எதற்கும் சமமாகாது.

$\alpha(a_i) = a_1$ என்றால், இந்தச் சக்கரம் முடிந்தது.

∴ $(a_1\ a_2 \ldots a_i)$ என்பது α-ன் முதல் காரணி.

∴ $\alpha(a_i) \neq a_1$ என்றால் $\alpha(a_i) = a_{i+1}$ என்க. இதைத் தொடர்ந்து செயல்படுத்து.

A ஒரு முடிவுள்ள கணம் என்பதால், இந்தச் செய்கை ஒரு முடிவிற்கு வர வேண்டும். முதல் காரணியைக் கண்டுபிடித்தவுடன், A-ன் மீதியிருக்கும் உறுப்புகளில் ஏதாவது ஒன்றைப் பொறுக்கி எடுத்து முன்போல் இரண்டாவது காரணியைக் காண்க.

இப்படியே தொடர்ந்து செய்தால் A கணத்தின் எல்லா உறுப்புகளையும் தீர்த்து விடுவோம். α-ன் காரணி காணலும் முடிந்து விடும்.

∴ ஒவ்வொரு வரிசை மாற்றமும் ஒரு சக்கரமாகும். ||

மாதிரிக் கணக்குகள்

(*a*) (2 3 4) (2 4) (*b*) (1 3 2 4) (5 2)

(*c*) (1 3) (2 4) (2 3) (*d*) (1 4 3 2) (2 4 1) (1 3 5)

(*e*) (2 3) (1 4) (2 5)

என்பவற்றை, ஒவ்வொன்றையும் பொது உறுப்பிலிச் சக்கரங்களாக எழுது.

விடை

(*a*) (2 3 4) (2 4)

முதல் சக்கரத்தில் $2 \to 3$

இரண்டாவது சக்கரத்தில் 3 இல்லை. அதாவது $3 \to 3$.

∴ விளைவு (2, 3 ...)

முதல் சக்கரத்தில் $3 \to 4$
இரண்டாவது சக்கரத்தில் $4 \to 2$ } $\Longrightarrow$ புதிய சக்கரத்தில் $3 \to 2$

புதிய சக்கரம் (2 3)

முதல் சக்கரத்தில் $4 \to 2$
இரண்டாவது சக்கரத்தில் $2 \to 4$ } $\Longrightarrow$ புதிய சக்கரத்தில் $4 \to 4$

∴ புதிய சக்கரம் (4)

∴ (2 3 4) (2 4) = (2 3) (4)

(*b*) (1 3 2 4) (5 2)

முதல் சக்கரம் $1 \to 3$
சக்கரம் 2-ல் 3 இல்லை } $\Longrightarrow$ $1 \to 3$ புதிய சக்கரம் (1, 3 ...)

முதல் சக்கரம் 3 → 2
சக்கரம் 2-ல் 2 → 5 } ⟹ 3 → 5 ∴ (1,3,5...)

சக்கரம் 1-ல் 5 இல்லை
சக்கரம் 2-ல் 5 → 2 } ⟹ 5 → 2 ∴ (1,3,5,2...)

சக்கரம் 1-ல் 2 → 4
சக்கரம் 2-ல் 4 இல்லை } ⟹ 2 → 4 ∴ (1,3,5,2,4)

சக்கரம் முடிந்தது.

∴ (1 3 2 4) (5 2) = (1 3 5 2 4)

(*c*) $\underbrace{(1\ 3)}_{I}$ $\underbrace{(2\ 4)}_{II}$ $\underbrace{(2\ 3)}_{III}$

I. 1 → 3
II. 3 இல்லை
III. 3 → 2 } 1 → 2 ∴ புதிய சக்கரம் (1,2,...)

I-ல் 2 இல்லை
II-ல் 2 → 4
III-ல் 4 இல்லை } ⟹ 2 → 4 ∴ (1, 2, 4 ...)

I-ல் 4 இல்லை
II-ல் 4 → 2
III-ல் 2 → 3 } ⟹ 4 → 3 ∴ (1, 2, 4, 3)

∴ (1 3) (2 4) (2 3) = (1 2 4 3)

(d) (1 4 3 2) (2 4 1) (1 3 5)

I-ல் 1 → 4
II-ல் 4 → 1
III-ல் 1 → 3 } ⟹ 1 → 3 புதிய சக்கரம் (1, 3, ...)

I-ல் 3 → 2
II-ல் 2 → 4
III-ல் 4 → 4 } ⟹ 3 → 4 புதிய சக்கரம் (1, 3, 4,...)

I-ல் 4 → 3
II-ல் 3 → 3
III-ல் 3 → 5 } ⟹ 4 → 5 புதிய சக்கரம் (1, 3, 4, 5...)

I-ல் 5 இல்லை
II-ல் 5 இல்லை
III-ல் 5 → 1 } ⟹ 5 → 1 ∴ புதிய சக்கரம் முடிந்தது
(1, 3, 4, 5)

இச்சக்கரத்தில் வராதது 2

I-ல் 2 → 1
II-ல் 2 → 2
III-ல் 2 இல்லை, அதாவது 2 → 2 } ⟹ 2 → 2 ∴ புதிய சக்கரம் (2)

∴ (1 4 3 2) (2 4 1) (1 3 5) = (1 3 4 5) (2)

(e) (2 3) (1 4) (2 5)

I-ல் 2 → 3
II-ல், III-ல் 3 இல்லை } ⟹ (2, 3, ...) என்பது புதிய சக்கரம்.

I-ல் 3 → 2
II-ல் 2 இல்லை
III-ல் 2 → 5 } ⟹ 3 → 5 ∴ (2, 3, 5 ...)

I-ல், II-ல் 5 இல்லை
III-ல் 5 → 2 } ⟹ 5 → 2 (2 3 5)

II-ல் 1 → 4
III-ல் 4 இல்லை } ⟹ 1 → 4 (1, 4, ...)

I-ல் 4 இல்லை
II-ல் 4 → 1
III-ல் 1 இல்லை } ⟹ 4 → 1 (1, 4)

∴ (2, 3) (1, 4) (2, 5) = (2 3 5) (1 4)

2·9. உட்குலங்கள் (Sub groups)

2·9·1. வரை இலக்கணம்

உட்குலம்

$(G, *)$ குலத்தின் ஒரு வெற்றற்ற உட்கணம் H ஆனது, G-ன் ஈரிணைச் செயலி $*$ ஐப் பொறுத்துக் குலமானால், $(H, *)$ ஐ $(G, *)$-ன் உட்குலம் என்போம்.

$G \subseteq G$ ஆனதால், $(G, *)$ என்பது $(G, *)$-ன் ஓர் அற்ப உட்குலம். $(G, *)$-ன் முற்றொருமை உறுப்பு e என்றால் $(\{e\}, *)$ என்பதும் ஓர் உட்குலம். ஏன்? $\{e\} \subseteq G$; $e * e = e \in \{e\}$; $e * (e * e) = e = (e * e) * e$; $e\, e^{-1} = e = e^{-1} e$; e என்பது $(\{e\}, *)$-ன் முற்றொருமை. ∴ $(\{e\}, *)$ ஓர் உட்குலம்.

∴ $(\{e\}, *)$-ம் $(G, *)$-ன் ஓர் அற்ப உட்குலம்.

$(\{e\}, *)$, $(G, *)$ ஆகியவற்றிற்கு இடையேயுள்ள உட்குலங்களுக்குச் 'சரியான உட்குலங்கள்' (Proper Subgroups) என்பது பெயர்.

முக்கியக் குறிப்புகள்

1. உட்குலம் வெற்றற்ற கணம். ஏன்?

உட்குலம் என்றுலே அது ஒரு குலம். குலம் என்ருல் அதற்கு முற்றெருமை அவசியம் இருக்கவேண்டும். ஆகையால் உட்குலத்தில் குறைந்த பட்சம் அதன் முற்றெருமை இருக்கவேண்டும். ∴ உட்குலம் வெற்றற்றது.

2. உட்குலத்தின் ஈரிணைச் செயலி, பெரிய குலத்தின் ஈரிணைச் செயலியாக இருக்கவேண்டும்.

2·9·2. உதாரணங்கள்

1, $(Z_e, +)$ என்பது $(Z, +)$-ன் உட்குலம். (+ : வழக்கமான கூட்டல்) நிறுவுக.

Z_e : { இரட்டை முழு எண்கள் }
$Z_e, \subset Z$. $(Z, +)$ குலம் (நிறுவுக !)

$(Z_e, +)$ ஒரு குலம் (இங்கே நிறுவுக). (இதன் முற்றெருமை உறுப்பு $0 \in Z_e$, $(Z\ \ +)$-ன் ஒவ்வோர் உறுப்புக்கும் அதன் எதிர் உறுப்பே நேர்மாறு) ∴ $(Z_e, +)$ ஆனது $(Z, +)$-ன் உட்குலம்.

2. $(Z_0, +)$ ஆனது $(Z, +)$-ன் உட்குலமா என ஆய்க. (+ என்பது வழக்கமான கூட்டல்).

Z_0 : { ஒற்றை முழு எண்கள் }

$Z_0 \subset Z$.

ஓர் ஒற்றை முழு எண்ணுடன் மற்ருேர் ஒற்றை முழு எண்ணை வழக்கமாகக் கூட்டக் கிடைப்பது ஓர் இரட்டை முழு எண் ; ஒற்றை முழு எண் அல்ல.

∴ Z_0, + ஆல் அடைக்கப்படவில்லை.

∴ $(Z_0, +)$ குலமாகாது.

3. $G = Z_6$, $* : +_6$, $H = \{0, 2, 4\}$ என்ருல்,

$(H, +_6)$ ஆனது $(G, +_6)$-ன் உட்குலம் எனக் காண்பிக்கலாம்.

$Z_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
$(Z_6, +_6)$ ஒரு குலம் (நிறுவுக!)

$+_6$	0	2	4
0	0	2	4
2	2	4	0
4	4	0	2

$\{0, 2, 4\} \subset \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$\therefore H \subset G.$

H-ல், $+_6$-க்கு அடைப்புப் பண்பு உண்டு.

H-ல், $+_6$-க்குச் சேர்ப்புப் பண்பு உண்டு. (சரிபார்! எவையேனும் மூன்று மும்மைகளை எடுத்து கொண்டு சரிபார்!).

H-ல், $+_6$-க்கு 0 என்பது முற்றொருமை உறுப்பு.

H-ல், $2^{-1} = 4$, $4^{-1} = 2$ $\therefore$ H-ல் $+_6$-க்கு நேர்மாறுகள் உண்டு.

$\therefore$ $(H, +_6)$ குலம். $\therefore$ $(H, +_6)$ என்பது $(Z_6, +_6)$-ன் உட்குலம்.

4. மிக அழகான உதாரணம்

$(G, *)$: சதுரத்தின் சமச்சீர் குலம்.

G: $\{R_0, R_1, R_2, R_3, X, Y, D_1, D_2\}$

H: $\{R_1, R_2, R_3, R_0\}$ என்க.

$(H, *)$-ன் அட்டவணை:

$*$	R_0	R_1	R_2	R_3
R_0	R_0	R_1	R_2	R_3
R_1	R_1	R_2	R_3	R_0
R_2	R_2	R_3	R_0	R_1
R_3	R_3	R_0	R_1	R_2

H, $*$ ஆல் அடைக்கப்பட்டது.

$(R_1 * R_2) * R_3 = R_3 * R_3 = R_3 = R_1 * R_1 = R_1 * (R_2 * R_3)$

இதுபோல் மற்ற மும்மைகளும் சேர்ப்புப் பண்பு உடையன.

$\therefore$ H-ல் $*$-க்குச் சேர்ப்புப் பண்பு உண்டு.

H-ல் R_0 என்பது முற்றொருமை.

$R_1^{-1} = R_3, \ R_2^{-1} = R_2, \ R_3^{-1} = R_1$

$\therefore$ H-ல் $*$-க்கு நேர்மாறுகள் உண்டு.

$\therefore$ $(H, *)$ ஒரு குலம்.

$(G, *)$ ஒரு குலம் (நிறுவுக!) மேலும் $H \subset G$

$\therefore$ $(G, *)$-ன் உட்குலம் $(H, *)$.

$(G, *)$-ன் மற்ற உட்குலங்களாவன :

$\{R_2, R_0, X, Y\}$, $\{R_2, R_0, D_1, D_2\}$, $\{R_2, R_0\}$
$\{R_0, D_1\}$, $\{R_0, D_2\}$, $\{R_0\ X\}$, $\{R_0, Y\}$

(நிறுவுக!)

மாதிரிக் கணக்குகள்

1. $(Z_3, +_3)$ என்பது $(Z, +)$-ன் உட்குலமல்ல என்று நிறுவுக.

நிறுவல்

$(Z_3, +_3)$ குலம்; $Z_3 = \{0, 1, 2\}$

$\because$ $Z_3 \subset Z$. $(Z, +)$ ஒரு குலம். (+ வழக்கமான கூட்டல்)

ஆனால் Z_3-ன் ஈரிணைச் செயலி $+_3$. Z-ன் ஈரிணைச் செயலி $+$. ஈரிணைச் செயலிகள் வெவ்வேறானவையாதலால், $(Z_3, +_3)$ ஆனது $(Z, +)$-ன் உட்குலமல்ல.

2. $(G, +)$: வழக்கமான கூட்டலின் கீழ், கலப்பெண்கள் குலம்.

$(H, \cdot)$: வழக்கமான பெருக்கலின் கீழ் $\{1, -1, i, -i\}$ குலம். $\emptyset \neq H \subset G$. ஆனால் $+$-ம், $\cdot$-ம் வெவ்வேறான ஈரிணைச் செயலிகள்.

$\therefore$ $(H, \cdot)$ என்பது $(G, +)$-ன் உட்குலமல்ல.

3. $G: (Z_4, +_4)$

$H: \{0, 2\}$ என்றால் $(H, +_4)$ ஆனது $(Z_4, +_4)$-ன் உட்குலமா?

$+_4$	0	2
0	0	2
2	2	0

H, $+_4$ ஆல் அடைக்கப்பட்டது.

H-ன் முற்றொருமை 0; ஏனெனில் $0 +_4 2 = 2 +_4 0 = 2$; $2^{-1} = 2$; $0^{-1} = 0$.

∴ H-ல் $+_4$-க்கு நேர்மாறுகள் உண்டு.

$0 +_4 (0 +_4 2) = 0 +_4 (2) = 2 = 0 +_4 2$
$= (0 +_4 0)$
$+_4 2$ முதலியன.

H-ல் $+_4$-க்குச் சேர்ப்புப் பண்பு உண்டு.

∴ $(H, +_4)$ ஒரு குலம். $(Z_4, +_4)$-ம் குலம் (நிறுவுக!)

$Z_4 = \{0, 1, 2, 3\}$ $H = \{0, 2\}$ ∴ $H \subset G$.

∴ $(H, +_4)$ என்பது $(G, +_4)$-ன் உட்குலம்.

4. $G = Z_4$

$* = +_4$

$H = \{0, 1\}$ என்றால் $(H, *)$ ஆனது $(G, *)$-ன் உட்குலம் ஆகாது என்று நிறுவுக.

விடை

$+_4$	0	1
0	0	1
1	1	2

$1 +_4 1 = 2 \notin H$

∴ H, $+_4$ ஆல் அடைக்கப் படவில்லை.

∴ $(H, +_4)$ குலமாகாது.

ஆனால் $(Z_4, *)$ குலம்.

∴ $(H, *)$ ஆனது $(G, *)$-ன் உட்குலம் அல்ல.

பயிற்சி

(அ) 1. வழக்கமான கூட்டலின் கீழ், மெய்யெண்கள் குலம், கலப்பெண்கள் குலத்தின் உட்குலம் என நிறுவுக.

2. வழக்கமான கூட்டலின் கீழ், மெய்யெண்கள் குலத்திற்கு, விகிதமுறு எண்கள் குலம் ஓர் உட்குலம் என நிறுவுக.

3. வழக்கமான கூட்டலின் கீழ் விகிதமுறு எண் குலத்திற்கு முழு எண்கள் குலம் ஓர் உட்குலம் என நிறுவுக.

4. வரிசை மாற்றுக் குலம் $(S_3, \cdot)$-ன் உட்குலங்கள் $\cdot$-ன் கீழ் $\{\in, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$, $\{\in, (1, 2)\}$, $\{\in, (3, 1)\}$, $\{\in, (2, 3)\}$ என நிறுவுக.

(ஆ) கீழ்க்கண்டவற்றுள் S ஆனது G-ன் உட்குலமா என்று ஆராய்க. அப்படி இல்லையெனில், அது ஏன் உட்குலம் ஆகாது என்பதற்கு ஒரு காரணத்தையாவது எடுத்துக் காட்டுக.

1. வழக்கமான கூட்டலின் கீழ், கலப்பெண்கள் குலம் G; விகிதமுறு எண்கள் கணம் S.

2. வழக்கமான கூட்டல் கீழ், மெய்யெண்கள் குலம் G; இரட்டை முழு எண்கள் கணம் S.

3. வழக்கமான பெருக்கல் கீழ், பூச்சியமற்ற விகிதமுறு எண்கள் குலம் G; பூச்சியமற்ற இரட்டை நேர் முழு எண்கள் கணம் S.

4. வழக்கமான பெருக்கல் கீழ், பூச்சியமற்ற கலப்பெண்கள் குலம் G; $\{1, -1, i, -i\}$ கணம் S.

5. வழக்கமான கூட்டலின் கீழ் முழு எண்கள் குலம்; நேர் முழு எண்கள் கணம் S.

6. வழக்கமான கூட்டலின் கீழ் மெய்யெண்கள் குலம்; பூச்சியமற்ற விகிதமுறு எண்கள் கணம் S.

7. வழக்கமான பெருக்கலின் கீழ் பூச்சியமற்ற கலப்பெண்கள் குலம் G; மெய்யெண்கள் கணம் S.

8. $(Z_6, +_6)$ குலம் $= G$; $S = \{0, 1, 3, 5\}$

2·9·3. தேற்றம்

$(G, *)$ குலத்தின் யாதேனுமோர் உட்குலம் $(H, *)$ என்றால்,

$(G, *)$-ன் முற்றொருமை உறுப்பு H-ல் உள்ளது.

$(G, *)$-ன் முற்றொருமை உறுப்பும், $(H, *)$-ன் முற்றொருமை உறுப்பும் முற்றிலும் ஒன்றே.

நிறுவல்

$(G, *)$-ன் முற்றொருமை உறுப்பு e என்க.

$(H, *)$-ன் முற்றொருமை உறுப்பு e' என்க.

தேற்றம் 2·5·4-ன்படி, $x * e' = e$ என்றவாறு G-ல் ஒரே ஓர் உறுப்பு x உள்ளது. இந்தச் சமன்பாட்டில் வலப்புறமாக ஒவ்வொரு பக்கத்தையும் e' உடன் $*$ ஆல் 'பெருக்கு'.

$(x * e') * e' = e * e'$

$x * (e' * e') = e * e'$ ($*$-ன் சேர்ப்பு விதி)

ஆனால் $e' * e' = e'$ (e' ஆனது $(H, *)$-ன் முற்றொருமை உறுப்பு)

$\therefore \; x * e' = e * e'$

ஆனால் $e * e' = e'$ (e என்பது $(G, *)$-ன் முற்றொருமை உறுப்பு)

$\therefore \; x * e' = e'$

$x * e' = e, \quad x * e' = e' \Longrightarrow e = e'$

$\therefore$ e என்பது H-ன் முற்றொருமை உறுப்பே.

2·9·4. முக்கியக் குறிப்புகள்

1. ஒரு குலத்தில் 'ஓர் உறுப்புக்கு ஒரு நேர்மாறு' என்ற பண்பினால் பெறப்படுவது யாதெனில், $(H, *)$ என்பது $(G, *)$ குலத்தின் உட்குலமானால், $h \in H$ என்றால், H-ல் h-ன் நேர் மாறும், G-ல் h-ன் நேர்மாறும் முற்றிலும் ஒன்றே.

2. $H \subseteq G$ என்பதாலும், H, G-க்களின் ஈரிணைச் செயலிகள் முற்றிலும் ஒன்றே என்பதாலும், $(G, *)$-ன் சேர்ப்புப் பண்பை, $(H, *)$ உரிமையாகப் பெறுகிறது.

$H \subset G$ என்பது $(G, *)$-ன் உட்குலம் என்பதை நிறுவ,

(i) $a, b \in H \Longrightarrow a * b \in H$ (அடைப்புப் பண்பு)

(ii) $e \in H$, (e என்பது $(G, *)$-ன் முற்றொருமை உறுப்பு)

(iii) $a \in H \Longrightarrow a^{-1} \in H$

என்ற மூன்றையும் நிறுவினால் போதும்.

$(G, *)$-ல் $*$-க்குச் சேர்ப்புப் பண்பு $\Longrightarrow$ $(H, *)$-ல் $*$-க்குச் சேர்ப்புப் பண்பு.

$\therefore$ $(H, *)$-ல் $*$-ன் சேர்ப்புப் பண்பை நிறுவ வேண்டியதில்லை.

மேற்கண்ட (i), (ii), (iii)-க்களை H, நிறைவேற்றுகிறதா என்று சரி பார்ப்பதற்குப் பதிலாக, கீழ்க்கண்ட தேற்றத்தின் வாயிலாக, ஒரே ஒரு நிபந்தனையை H நிறைவேற்றினால் போதும் என்பதைப் படிப்போம்.

2·9·5. தேற்றம்

$(G, *)$ ஒரு குலம்; $\emptyset \neq H \subseteq G$ என்றால்

$(H, *)$ என்பது $(G, *)$-ன் உட்குலம் $\Longleftrightarrow a * b^{-1} \in H$.
$a, b \in H$.

நிறுவல்

பாகம் 1 $\Longrightarrow$

தற்கோள் : $(H, *)$ ஓர் உட்குலம்

$a, b \in H$ என்க.

$(H, *)$ உட்குலமென்பதால், H-ல் b-க்கு நேர்மாறு உண்டு.

$\therefore$ $b^{-1} \in H$

குலத்தின் அடைப்புப் பண்புப்படி, $a, b^{-1} \in H \Longrightarrow a * b^{-1} \in H$

$\therefore$ $(H, *)$ உட்குலம் $\Longrightarrow a * b^{-1} \in H$.

பாகம் 2 $\Longleftarrow$

G-ன் வெற்றற்ற ஓர் உட்கணம் H.

தற்கோள்

எவையேனும் இரு $a, b \in H$, $a * b^{-1} \in H$

தற்கோளில் b-க்குப் பதில் மறுபடியும் a ஐயே பிரதியிடு. ஏனெனில் $a, a \in H$

$\therefore$ $a * a^{-1} \in H$

$\therefore$ $H \subset G$, $a \in H \Longrightarrow a \in G$

$\therefore$ $(G, *)$ ஒரு குலம், $a * a^{-1} = e \in G$

$\therefore$ $a * a^{-1} \in H \Longrightarrow e \in H$

$\therefore$ $(G, *)$-ன் முற்றொருமை உறுப்பு H-ல் உள்ளது.

H-ல் முற்றொருமை உண்டு.

தற்கோளில், $a * b^{-1} \in H$ என்பதில் a-க்குப் பதில் e ஐப் பிரதியிடு, ஏனெனில் $e \in H$

$\therefore$ $e * b^{-1} \in H$, $\forall b \in H$

$\therefore$ $H \subset G$, $b \in H \Longrightarrow b \in G$

$\therefore$ $(G, *)$ ஒரு குலம், $b^{-1} \in G$

$\therefore$ $e * b^{-1} = b^{-1}$

$\therefore$ $e * b^{-1} \in H \Longrightarrow b^{-1} \in H$ $\forall b \in H$

$\therefore$ H-ல் $*$-க்கு நேர்மாறுகள் உண்டு.

தற்கோளில் $a * b^{-1} \in H$-ல் b-க்குப் பதில் b^{-1}ஐப் பிரதியிடு ; ஏனெனில் $b^{-1} \in H$

$\therefore$ $a * (b^{-1})^{-1} \in H$, $\forall a, b$ H

$\therefore$ $(b^{-1})^{-1} = b$ (தேற்றம் 2·5·5),

$\therefore$ $a * b \in H$.

$\because$ $a \in H, b \in H \Longrightarrow a * b \in H$

$\therefore$ $H \subseteq G$ ஆனது, $*$-ன் கீழ் அடைக்கப்பட்டது.

$(G, *)$ குலம், $H \subseteq G$ என்பதால் G-ல் $*$-ன் சேர்ப்பு விதியை, H-ல் $*$ ஆனது உரிமையுடன் பெறுகிறது.

∴ குலத்தின் நிபந்தனைகளை $(H, *)$ நிறைவேற்றுகிறது.

∴ $(H, *)$ ஒரு குலம். மேலும் $H \subseteq G$

∴ $(H, *)$ என்பது $(G, *)$-ன் உட்குலம்.

∴ பாகங்கள் (1)-ம் (2)-ம் இணைந்தால்,

$(H, *)$ என்பது $(G, *)$-ன் உட்குலம் $\Longleftrightarrow a * b^{-1} \in H$, $\forall\, a, b \in H$.

குறிப்பு: இந்தத் தேற்றத்தின் பயன் : ஒரு குலம் $(G, *)$-ன் உட்கணம் H ஆனது $(G, *)$-ன் உட்குலம் என்று நிறுவ வேண்டுமானால், $a * b^{-1} \in H$, $\forall\, a, b \in H$ என்று நிறுவினால் போதும்.

2·9·6. வரை இலக்கணம்

குலத்தின் மையம் (Centre of a group)

$(G, *)$ குலத்தின் மையம் cent G ஆனது

$\{ c \in G \mid c * x = x * c \quad \forall\, x \in G \}$ என்ற கணம்.

அதாவது, $(G, *)$ குலத்தின் ஒவ்வோர் உறுப்புடன் பரிமாற்றும் உறுப்புகள் அமைந்த கணம் தான் $(G, *)$ குலத்தின் மையம் எனப்படும்.

துணை முடிவு

$(G, *)$, அபீலியன் குலம் $\Longleftrightarrow$ cent $G = G$.

உதாரணம்

G : சமச்சீர் குலம் $= \{ R_0, R_1, R_2, R_3, X, Y, D_1, D_2 \}$

cent $G = \{ R_0, R_2 \}$

2·9·7. தேற்றம்

(Cent $G, *$) என்பது $(G, *)$ குலத்தின் உட்குலமாகும்.

நிறுவல்

$(G, *)$-ன் முற்றொருமை உறுப்பு e என்க.

G-ன் யாதாவதோர் உறுப்பு x என்றால், $e * x = x * e$, $\forall\, x \in G$.

$\therefore \quad e \in \text{cent } G \qquad \therefore$ cent G ஒரு வெற்றற்ற கணம்.

$\forall\, a, b \in \text{cent } G, \quad a * x = x * a, \quad b * x = x * b,$
$\forall\, x \in G$ (cent G-ன் வ. இ.)

$x \in G, (a * b^{-1}) * x = a * (b^{-1} * x)$
(சேர்ப்புப் பண்பு)

$= a * (x^{-1} * b)^{-1}$
(தேற்றங்கள் 2·5·5, 2·5·6)

$= a * (b * x^{-1})^{-1}$
(cent G-ன் வ. இ.)

$= a * (x * b^{-1})$
(தேற்றங்கள் 2·5·5, 2·5·6)

$= (a * x) * b^{-1}$
(சேர்ப்புப் பண்பு)

$= (x * a) * b^{-1}$
(cent G-ன் வ. இ.)

$= x * (a * b^{-1})$

$a * b^{-1}$ ஆனது x உடன் பரிமாறுவதால்,

$a * b^{-1} \in \text{cent } G.$

மேலும் $\emptyset \neq \text{cent } G \subseteq G$

$\therefore$ cent G ஆனது $(G, *)$-ன் உட்குலம்.

2·9·8. தேற்றம்

$(G_1, *), (G_2, *)$ என்பவை $(G, *)$ குலத்தின் உட்குலங்களானால்,

$(G_1 \cap G_2, *)$-ம் $(G, *)$-ன் உட்குலமாகும்.

நிறுவல்

$(G, *)$-ன் முற்றொருமை உறுப்பு e என்க.

உட்குலத்தின் வ. இ. படி, $e \in (G_1, *), e \in (G_2, *)$

$\therefore \quad e \in G_1 \cap G_2$

$\therefore \quad G_1 \cap G_2 \neq \emptyset.$

$a, b \in G_1 \cap G_2$ என்க. $\therefore$ $a, b \in G_1$, $a, b \in G_2$

$(G_1, *)$ உட்குலமாதலால், $a * b^{-1} \in G_1$

$(G_2, *)$ உட்குலமாதலால், $a * b^{-1} \in G_2$

$\therefore$ $a * b^{-1} \in G_1 \cap G_2$
மேலும் $G_1 \cap G_2 \subseteq G$

$\therefore$ $(G_1 \cap G_2, *)$ என்பது $(G, *)$-ன் உட்குலமாகும்.

உதாரணங்கள்

1. $(Z_{16}, +_{16})$-ன் உட்குலங்கள், $(S, +_{16})$, $(T, +_{16})$ என்பவற்றுள் $S = \{0, 8\}$, $T = \{0, 4 8, 12\}$ என்றால்
$S \cap T = \{0, 8\}$ என்பதும் உட்குலம்.

2. $(Z_{12} +_{12})$-ன் உட்குலங்கள் $(S, +_{12})$, $(T, +_{12})$ என்பவற்றுள் $S = \{0, 3, 6, 9\}$, $T = \{0, 4, 8\}$ என்றால்
$S \cap T = \{0\}$ என்பதும் உட்குலம். (சரி பார்.)

பயிற்சி

(அ) நிறுவுக:

1. $+$: வழக்கமான கூட்டல்

$(Z, +)$-ன் உட்குலங்கள் $S = \{6n \mid n$ ஒரு முழு எண் $\}$, $T = \{4n \mid n$ ஒரு முழு எண் $\}$ என்றால், $S \cap T = \{12n \mid n$ முழு எண் $\}$ ஆனதும் $(Z, +)$-ன் உட்குலம்.

அதாவது, 6-ன் முழு அடுக்குகள் உட்குலம், 4-ன் முழு அடுக்குகள் உட்குலம் இவற்றின் இடைவெட்டுக் குலம் ஆனது 12-ன் முழு அடுக்குகள் உட்குலம்.

2. $+$: வழக்கமான கூட்டல்

$(Z, +)$-ன் உட்குலங்கள், $S = \{3n \mid n$ முழு எண் $\}$, $T = \{2n \mid n$ முழு எண் $\}$ என்றால் $S \cap T = \{6n \mid n$ முழு எண் $\}$ ஆனதும் ஓர் உட்குலம்.

(ஆ) 3. $+$: வழக்கமான கூட்டல்

$(\mathbf{R}, +)$-ன் உட்குலங்கள், $S = \{\mathbf{Q}, +\}$, $T = \{Z, +\}$ என்றால் $S \cap T$ என்ன?

4. $(Z, +)$ குலம். $S = \{ sn \mid s$ நிலையான நேர் முழு எண், n யாதாவதொரு முழு எண் $\}$

$T = \{ tn \mid t$ நிலையான நேர் முழு எண், n யாதாவதொரு முழு எண் $\}$ $S \cap T$ என்ன?

2·9·9. தேற்றம்

$(G, *)$ என்ற குலத்தின் உட்குலங்கள் $(S, *)$, $(T, *)$ என்றால் $(S \cup T, *)$ என்பது $(G, *)$-ன் உட்குலம் $\Longleftrightarrow S \subseteq T$ அல்லது $T \subseteq S$.

நிறுவல் : பாகம் 1 $\Longrightarrow$

தற்கோள் :

$(S \cup T, *)$என்பது $(G, *)$-ன் உட்குலம்.

நிறுவ :

$S \subseteq T$ அல்லது $T \subseteq S$.

நிறுவல் :

$S \nsubseteq T, T \nsubseteq S$ என்று வைத்துக்கொள்.

அதாவது $s \in S, s \notin T, \ t \in T, \ t \in S$ என்றவாறு இரு உறுப்புகள் s, t உள்ளன.

$s \in S, t \in T \Longrightarrow s, t \in S \cup T.$

$(S \cup T, *)$ குலம் என்பதால், $s * t \in S \cup T$ (குலத்தின் அடைப்புப் பண்பு)

$s * t$ என்பது S-ல் ஆவது T-ல் ஆவது இருக்கும்.

$s * t$ என்பது S-ல் இருந்தால், $s * t = s_1 \in S$ என்க.

$(S, *)$ குலம்; $s \in S. \therefore s^{-1} \in S.$

$\therefore (s^{-1} * s) * t = s^{-1} * s_1$

$e * t = s^{-1} * s_1$, e என்பது $(G, *)$-ன் முற்றொருமை

$t = s^{-1} * s_1 \in S.$

இது எதிர் மறுப்பு, $\therefore s * t \notin S$

அல்லாமல், $s * t$ என்பது T-ல் இருந்தால், $s * t = t_1 \in T$ என்க.

$(T, *)$ குலம். $t \in T \quad \therefore \quad t^{-1} \in T$

$$\therefore s * (t * t^{-1}) = t_1 * t^{-1} \in T$$

அதாவது $s * e = t_1 * t^{-1} \in T$

$$s = t_1 * t^{-1} \in T$$

நிச்சயமாக இதுவும் ஓர் எதிர் மறுப்பு

$\therefore$ தற்கோள் ஆனது எதிர் மறுப்புக்குக் கொண்டுவிட்டது.

$\therefore$ $S \subseteq T$ அல்லது $T \subseteq S$

$\therefore$ $S \cup T = T$ அல்லது $S \cup T = S$. எதுவாயினும் $S \cup T$ குலமாகும்.

மாதிரிக் கணக்குகள்

$(Z_6, +_6)$ குலத்தின் உட்குலங்கள் $(S, +_6), (T, +_6)$ என்பதில் $S = \{0, 2, 4\}$, $T = \{0, 3\}$.

$S \cup T$ உட்குலமல்ல என்று நிறுவுக.

நிறுவல்

$2 \in S, 3 \in T$ என்றால் $2 +_6 3 = 5$

ஆனால் $5 \notin S, 5 \notin T, \quad \therefore \quad 5 \notin S \cup T$.

$\therefore$ $+_6$ ஆல் $S \cup T$ அடைக்கப்படவில்லை.

$\therefore$ $(S \cup T, +_6)$ குலமல்ல.

$\therefore$ $(S \cup T, +_6)$, $(Z_6, +_6)$-ன் உட்குலமல்ல.

அல்லது

$S \nsubseteq F, T \nsubseteq S \quad \therefore$ தேற்றம் 2·9·9-ன் படி

$S \cup T$ உட்குலமல்ல.

பயிற்சி

1. $(Z, +)$: முழு எண்களின் வழக்கமான கூட்டல் குலம்.

$(S, +)$: இரட்டை முழு எண்களின் வழக்கமான கூட்டல் குலம்.

$(T, +)$: 5-ன் முழு அடுக்குகளின் வழக்கமான கூட்டல் குலம்.

$(S, +)$-ம், $(T, +)$-ம், $(Z, +)$-ன் உட்குலங்களா? $S \cup T$-ம் ஓர் உட்குலமா?

2. $(Z_{16}, +_{16})$ குலமென நிறுவு.

$S = \{ 0, 8 \}$, $T = \{ 0, 4, 8, 12 \}$ என்றால்

$(S, +_{16})$, $(T, +_{16})$, $S \cap T, S \cup T$ என்பவை $(Z_{16}, +_{16})$-ன் உட்குலங்கள் தானா என்று ஆராய்க.

2·9·10. தேற்றம்

$(G, *)$ குலத்தின் யாதாவதொரு உறுப்பு g என்றால்,

$H = \{ g^i \mid i$ ஏதோ ஒரு முழு எண் $\}$ என்பது $(G, *)$-ன் ஓர் உட்குலம் ஆகும்.

நிறுவல்

$g = g^1 \in H \therefore \quad H \neq \emptyset$

g^m, g^n என்பவை H-ன் எவையேனுமிரு உறுப்புகள் என்க.

$g^m * (g^n)^{-1} = g^m * g^{-n} = g^{m-n}$,

$m-n$ என்பது ஒரு முழு அடுக்கு.

k-ன் எல்லா முழு அடுக்குகளும் H-ல் உள்ளனவாதால், $g^{m-n} \in H$

ஆனால் $g^n * g^{-n} = g^0 = e$, e ஆனது $(G, *)$-ன் முற்றொருமை உறுப்பு (2·6 ஐக் காண்க.)

$\therefore \quad g^{-n}$ என்பது $(G, *)$-ல் g^n-ன் நேர்மாறு

$\therefore$ (H-ன் யாதாவதோர் உறுப்பு) $*$ (H-ன் வேறு ஏதாவதோர் உறுப்பின் நேர்மாறு) என்பது H-ன் ஓர் உறுப்பு என்றும். ஏற்கெனவே $H \neq \emptyset$ என்றும் நிறுவினோம்.

$\therefore \quad (H, *)$ ஆனது $(G, *)$-ன் உட்குலமாகும்.

2·10. சக்கரக் குலங்களும் (Cyclic groups), சக்கர உட்குலங்களும் (Cyclic Subgroups)

2·10·1. வரை இலக்கணம்

சக்கரக் குலம் (Cyclic group), சக்கர உட்குலம்.

$(H, *)$ ஒரு குலமானல், $H = \{ g^i / i$ யாதேனும் ஒரு முழு எண் $\}$ என்றவாறு g என்ற உறுப்பு H-ல் இருந்தால், H ஆனது சக்கரக் குலம் (Cyclic group) எனப்படும். g என்ற உறுப்புக்கு, $(H, *)$ குலத்தின் பிறப்பாக்கி (generator) என்பது பெயர். $(H, *)$ என்பதை 'g ஆல் பிறக்கப்படும் குலம்' (Cyclic group generated by g) என்போம்.

மேற்கண்ட வரை இலக்கணத்தின்படி, சக்கரக் குலத்தின் உறுப்புகளை அக்குலத்தின் யாதாவதொரு உறுப்பின் அடுக்குகளாக எழுதலாம்.

H ஆனது G என்ற குலத்தின் உட்குலமானல், H-க்குச் சக்கர உட்குலம் என்பது பெயர்.

சக்கரக் குலம் முடிவுள்ள அல்லது முடிவில்லாத குலமாக இருக்கலாம்.

2·10·2. உதாரணங்கள்

1. $S = \{ 1, -1, i, -i \}$

• வழக்கமான பெருக்கல் என்ருல் $(S, \cdot)$ ஒரு சக்கரக் குலம்.

$(S, \cdot)$ என்பது ஒரு குலம். (நிறுவுக !)

S-ன் உறுப்புகளை i-ன் அடுக்குகளாக எழுதலாம்.

எப்படியெனில், $i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$

$\therefore \quad S = \{ i^k \mid i = 1, 2, 3, 4 \}$

$\therefore$ i ஆனது S-ன் ஒரு பிறப்பாக்கி. $i^4 = 1$ என்பது S-ன் முற்றொருமை உறுப்பு. i-ன் வேறெந்த அடுக்குகளும், S-ன் உறுப்புகளாகத் திருப்பித் திருப்பி வரும்.

இதுபோல் $-i$ என்பது S-ன் மற்றொரு பிறப்பாக்கியாகும்.

2. மூன்று குறியீடுகளின் சமச்சீர் குலம் $(S_3, \cdot)$ என்ருல்,

$S_3 = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \theta\}$ · S_3-ன் முற்றொருமை உறுப்பு ϵ

$H = \{\in, \delta, \theta\}$ என்றால் $(H, \cdot)$ என்பது $(S_3, \cdot)$-ன் உட்குலம். (நிறுவுக!)

$\delta^1 = \delta$; $\delta^2 = \delta \cdot \delta = \theta$; $\delta^3 = \delta \cdot \delta^2 = \delta \cdot \theta = \in$.

$\therefore$ $H = \{\delta^i \mid i = 1, 2, 3\}$

$\therefore$ $(H, \cdot)$ என்பது சக்கரக் குலம். δ என்பது $(H, \cdot)$-ன் ஒரு பிறப்பாக்கி.

இதுபோல், $\theta^1 = \theta$; $\theta^2 = \delta$; $\theta^3 = \in$.

$\therefore$ $H = \{\theta^i \mid i = 1, 2, 3\}$

$\therefore$ θ-ம் $(H, \cdot)$-ன் ஒரு பிறப்பாக்கி.

3. $(Z, +)$ குலமென்றால், $+$ என்பது வழக்கமான கூட்டல்.

வ. இ. படி $x^i = x \cdot x$ ...... i தடவைகள்

இந்த உதாரணத்தில், x^i என்பது $x + x +$ ...... அதாவது x^i என்பது இங்கே ix ஆகும்.

நமது குறியீட்டு முறையில், x என்பதற்கு மதிப்பு 1 என்றால் $1^1 = 1$, $1^2 = 2$, $1^3 = 3$,... $1^i = i$, ... ,

வரை இலக்கணப்படி, $1^0 = 0$ (Z-ன் முற்றொருமை உறுப்பு),

$\therefore$ 1 என்பது Z-ன் ஒரு பிறப்பாக்கி.

$x = -1$ என்றால், $-1^1 = 1$, $(-1)^2 = -2$,......

$\therefore$ -1 என்பதும் Z-ன் மற்றொரு பிறப்பாக்கி.

4. சதுரத்தின் சமச்சீர்கள் குலம் $(G, \cdot)$ என்றால்,

$G = \{R_0, R_1, R_2, R_3, X, Y, D_1, D_2\}$.

$A = \{R_0, R_1, R_2, R_3\}$ என்றால் $A \subset G$, $(A, \cdot)$ என்பது $(G, \cdot)$-ன் உட்குலம்.

$R_3{}^1 = R_3$, $R_3{}^2 = R_2$, $R_3{}^3 = R_1$, $R_3{}^4 = R_0$

$\therefore$ R_3 ஆனது A-ன் ஒரு பிறப்பாக்கி

$\therefore$ $(A, \cdot)$ என்பது ஒரு சக்கரக் குலம் ; சக்கர உட்குலம்.

இதுபோல் A-க்கு R_1-ம் ஒரு பிறப்பாக்கி.

$\{R_0, D_1\}$-க்கு D_1-ம், $\{R_0, D_2\}$-க்கு D_2-ம், $\{R_0, X\}$-க்கு X-ம், $\{R_0, Y\}$-க்கு Y-ம் பிறப்பாக்கிகள்.

ஒரு முடிவுள்ள சக்கரக் குலத்தின் உறுப்புகளைக் காணும் வழி என்ன என்பதைக் கீழ்க் காணும் தேற்றம் விளக்குகிறது.

2.10.3. தேற்றம்

g ஆல் பிறப்பிக்கப்பட்ட முடிவுள்ள சக்கரக் குலம் $(G, \cdot)$ என்க.

$0(G) = n$ என்றால்

(i) $g^n = e$

(ii) $\{g, g^2, \ldots, g^{n-1}, g^n \leq e\}$ என்ற கணம் வெவ்வேறு உறுப்புகளைக் கொண்ட கணம் G ஆகும்.

நிறுவல்

முதலில், யாதாவதொரு நேர் முழு எண் $m < n$-க்கு $g^m \neq e$ என்று காண்பிப்போம். முடியுமானால் $g^m = e$ $(m < n)$ என்று வைத்துக்கொள்.

$x \in G$ என்க.

$(G, \cdot)$ ஆனது g ஆல் பிறப்பிக்கப்பட்ட குலமாதலால், $x = g^k$, (k ஒரு முழு எண்). முழு எண்களின் ஒரேமுறை வகுத்தல் கணக்கின்படி, (1.16.1 காண்க),

$k = qm + r$, $0 \leqq r < m$ என்றவாறு முழு எண்கள் q-ம், r-ம் இருக்கின்றன.

$$\therefore \quad x = g^k = g^{qm+r} = (g^m)^q \cdot g^r$$
$$= e^q \cdot g^r = e \cdot g^r = g^r$$

G-ன் ஒவ்வோர் உறுப்பும், g^r உருவில், $0 \leq r < m$ என்றவாறு உள்ளது.

$\therefore$ $m < n$ என்றால் G-ல் அதிக பட்சம் m உறுப்புகள் உள்ளன. ஆனால் தேற்றத்தின் தற்கோள்படி G-ல் சரியாக n உறுப்புகள் உள்ளன. ஆகையால் $g^n = e$ ஆனது எதிர் மறுப்புக்குக் கொண்டுவந்து விட்டது.

$\therefore\ g^m \neq e$, நேர் முழுஎண் $m < n$

$g, g^2, \ldots, g^{n-1}, g^n$ எல்லாம் G-ல் உள்ளன.

இப்பொழுது இந்த உறுப்புகள் எல்லாம் வெவ்வேறனவை என்று நிறுவுவோம்.

முடியுமானுல், $g^i = g^j$, i, j நேர் முழு எண்கள், $i < j \leq n$

இரு பக்கங்களையும் g^{-i} ஆல் பெருக்க,

$$g^{-i}\, g^i = g^{-i}\, g^j$$

$$e = g^0 = g^{j-i}$$

ஆனுல் $i < j \leq n$ என்பதால் $0 < j - i < n$

ஏற்கெனவே, $0 < m < n$-க்கு $a^m \neq e$ என்று பார்த்தோம்.

$\therefore\ 0 < j - i < n$-க்கு $g^{j-i} \neq e$. இது எதிர் மறுப்பு.

$\because$ உறுப்புகள் $g, g^2, \ldots, g^{n-1}, g^n$ எல்லாமே வெவ்வேறனவை.

மேலும் $0(G) = n$ என்பதால், G என்பது $\{g, g^2, \ldots\ldots, g^{n-1}, g^n\}$ என்ற கணமே.

$(G, \cdot)$ குலமாகையால், $e \in G$. ஆனுல் $g^m \neq e$, $m < n$-க்கு,

$\therefore\ g_m = e$, $m \geqq n$-க்கு, $0(G) = n$ என்பதால் $g^m = e$, $m = n$க்கு.

அதாவது $g^n = e$. $\in G = \{g, g^2, \ldots, g^{n-1}, g^n = e\}$

2.10.4. **மாற்றுவரை**

2.10.3-ன் முடிவைக் கீழ்க் கண்டவாறு வரையலாம்.

n பரிமாண வரிசையுள்ளதும், g ஆல் பிறப்பிக்கப்பட்டதுமான முடிவுள்ள சக்கரக் குலம் $(G, \cdot)$ ஆனுல் $g^n = e$ என்றவாறு n என்பது மீச்சிறிய நேர் முழு எண்.

2.10.5. **வரை இலக்கணம்**

உறுப்பின் பரிமாண வரிசை :

குலம் $(G, \cdot)$-ன் ஓர் உறுப்பு g எனில், g ஆல் G-ன் உட்குலம் பிறப்பிக்கப்பட்டால், அந்தச் சக்கர உட்குலத்தின் பரிமாண வரிசைக்கு g-ன் பரிமாண வரிசை என்பது பெயர்.

மேற்கண்ட 2·10·4-ன் மாற்றுவரையால், குலம் (G, ·)-ன் ஓர் உறுப்பு g-ன் பரிமாண வரிசையை $g^m = e$ என்றவாறு மீச் சிறிய நேர் முழு எண் m எனலாம்.

அப்படியானல் g-க்கு முடிவுள்ள பரிமாண வரிசை என்போம்.

அப்படியொரு முழு எண் இல்லையானல் g-க்கு முடிவில்லாத பரிமாண வரிசை உண்டு என்போம்.

g உறுப்பின் பரிமாண வரிசையை $0(g)$ என்று குறியிடுவோம்.

கவனிக்க: $0(g) \neq 0(G)$

2·10·6· உதாரணங்கள்

1. சதுரத்தின் சமச்சீர்கள் குலம் $(G, .)$ என்பதில்

$G = \{R_0, R_1, R_2, R_3, X, Y, D_1, D_2\}$ என்ருல்,

$A = \{R_0\}$, $B = \{R_0, R_1, R_2, R_3\}$ என்ற G-ன் உட்கணங்களை ஆராய்வோம்.

$(A = \{R_0\}, \cdot\})$ என்பது $(G, \cdot)$-ன் அற்ப உட்குலமாகும்.

$R_0^1 = R_0 \quad \therefore \; R_0$ என்பது A-ன் பிறப்பாக்கி.

$\because \; 0(A) = 1 \quad \therefore \; 0(R_0) = 1$

$B = \{S_0, R_1, R_2, R_3\}$-க்கு R_1-ம், R_3-ம் பிறப்பாக்கிகள்.

$0(B) = 4 \quad \therefore \; 0(R_1) = 0(R_3) = 4$

இதேபோல் $0(R_2) = 0(X) = 0(Y) = 0(D_1) = 0(D_2)$ என்று காண்பிக்கலாம்.

2. $(S_3, .)$ என்பதில் $S_3 = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \in, \theta\}$

$\because \; (S_3, \cdot)$ என்பது 3 குறியீடுகள் சமச்சீர் குலம்.

$H = \{\in, \delta, \theta\}$ என்பது S_3-ன் உட்குலம்.

மேலும் θ-ம், δ-ம் H-ன் பிறப்பாக்கிகள்.

ஆனல் $0(H) = 3 \quad \therefore \; 0(\theta) = 0(\delta) = 3$.

3. முழு எண்களின் கூட்டல் குலத்தில் 0 ஐத் தவிர ஒவ்வோர் உறுப்பின் பரிமாண வரிசையும் முடிவில்லாதது.

2·10·7. தேற்றம்

ஒரு சக்கரக் குலத்தின் ஒவ்வோர் உட்குலமும் சக்கரக் குலமாகும்.

நிறுவல்

கொடுக்கப்பட்ட சக்கரக் குலம் $(G,\cdot)$-ன் பிறப்பாக்கி $(G,\cdot)$-ன் ஓர் உட்குலம் $(H,\cdot)$ என்க. $(G,\cdot)$-ன் பிறப்பாக்கி $g \in G$ என்க.

$H = \{ e \}$ என்றால், $(H,\cdot)$ ஆனது, e ஆல் பிறப்பிக்கப்பட்ட சக்கரக் குலம். இது ஓர் அற்பமான முடிவு.

$\therefore \; H \neq \{ e \}$ என்க.

$(H,\cdot)$ ஆனது $(G,\cdot)$-ன் உட்குலமாதலால், H-ன் ஒவ்வோர் உறுப்பும், g^k உருவுள்ளது, k முழு எண்.

$g^m \in H$ என்றவாறு m என்பது மீச்சிறிய நேர் முழு எண் ஆகட்டும்.

g^k என்பது H-ன் யாதாவதோர் உறுப்பு ஆகட்டும்.

முழு எண்களின் வகுத்தல் கணக்கின்படி (1.16.1 காண்),

$k = qm + r, \; 0 \leqq r < m$ என்றவாறு q, r என்ற முழு எண்கள் உள்ளன.

$\therefore \; r = k - mq.$

$\therefore \; g^r = g^{k-mq} = g^{k+(-mq)} = g^k g^{-mq} = g^k (g^m)^{-q}$

$\therefore \; g^m \in H, \quad \therefore \; (g^m)^{-1}$-ம் H-ல் உள்ளது, ஏனெனில் $(H,\cdot)$ ஒரு குலம்.

$\therefore \; ((g^m)^{-1})^q$ அதாவது $(g^m)^{-q}$-ம் H-ல் உள்ளது.

மேலும் $g^k \in H \quad \therefore \; g^r = g^k (g^m)^{-q}$ என்ற உறுப்பு H-ல் இருக்கவேண்டும். $\quad \therefore \; g^r \in H.$

இப்பொழுது $r \neq 0$ என்று வைத்துக்கொள்.

$\therefore \; 0 < r < m$

m ஆனது மீச்சிறிய நேர் முழு எண்ணாக, $g^m \in H$ என்றவாறு தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டுள்ளது.

ஆனால் $g^r \in H, \quad 0 < r < m$ $\therefore$ இது ஓர் எதிர் மறுப்பு.

$\therefore \; r = 0 \qquad \therefore \; k = mq$

H-ன் யாதாவதொரு உறுப்பு g^k ஆனது $(g^m)^q$-ன் உரு மாதிரி என்று காண்பித்து விட்டோம்.

$\therefore$ $(H, \cdot)$ என்பது g^m ஐப் பிறப்பாக்கியாய் உள்ள சக்கரக் குலம் ஆகும்.

2·10·8. கிளைத் தேற்றம்

n பரிமாண வரிசையுள்ள முடிவுள்ள சக்கரக் குலம் $(G, \cdot)$ ஆனது g ஆல் பிறப்பிக்கப்பட்டால், m-ன் மடங்கு n என்றவாறு g^m ஆல் பிறக்கப்படும் உட் குலங்கள், $(G, .)$-ன் உட்குலங்களே.

நிறுவல்

முன் தேற்றம் 2·10·7 ஆனது, m-ன் மடங்கு n என்பதைத் தவிர இந்தத் தேற்றமே தான்.

$(H, \cdot)$ என்பது $(G, \cdot)$-ன் உட்குலம் என்க.

$0(G) = n$ என்பதால், தேற்றம் 2·10·3 வாயிலாக, $g^n = e$

$\therefore$ $(H, \cdot)$ உட்குலமாதலால், $g^n \in H$.

முன் தேற்றம் 2·10·7-ல் g^k-க்குப்பதில் g^n ஐப் பயன்படுத்தி, வகுத்தல் கணக்கைப் பயன்படுத்தினால் $n = mq$ என்று கிடைக்கும்.

$\therefore$ m ஆனது n ஐ மீதியில்லாமல் வகுக்கும். அதாவது m-ன் மடங்கு, n.

பயிற்சி

1. ஒரு முடிவில்லாத சக்கரக் குலத்தின் ஒவ்வோர் உட் குலமும், $\{e\}$ ஐத் தவிர, முடிவில்லாதது, என நிறுவுக.

2. பரிமாண வரிசை 6 உள்ள சக்கரக் குலத்தில் எத்தனை உறுப்புகள் அக்குலத்திற்குப் பிறப்பாக்கிகளாக இருக்கும்?

3. பரிமாண வரிசை 6 உள்ள ஓர் உறுப்பைக் கொண்ட அபீலியன் குலம் ஒரு சக்கரக் குலம் என நிறுவுக.

4. உறுப்பு a ஆல் பிறக்கப்பட்ட m பரிமாண வரிசையுள்ள சக்கரக் குலம் G என்றால், a^k-ம் G-ன் பிறப்பாக்கி $\Longleftrightarrow$ k-க்கும் m-க்கும் மீப்பெரிய பொதுக் காரணி $= 1$

5. m பரிமாண வரிசை உள்ள சக்கரக் குலம் G-ன் பிறப்பாக்கி a என்றால், G-ன் யாதாவதொரு உறுப்பு a^k-ன் பரிமாண வரிசையைக் காண்.

2.11. துணைக் கணங்கள் (Cosets)

2.11.1. வரை இலக்கணம்

இடது துணைக் கணம் (Left coset)

$(H, *)$ என்பது $(G, *)$ குலத்தின் ஓர் உட்குலம் என்க.

G-ன் யாதாவதொரு உறுப்பு a என்க.

$a * H = \{ a * h \mid h \in H \}$ என்ற கணத்திற்கு G-ல், a ஆல் நிர்ணயிக்கப்பட்ட H-ன் இடது துணைக் கணம் என்பது பெயர். a-க்கு $a * H$-ன் பிரதிநிதி அல்லது குறிப்பான் (Representative) என்பது பெயர்.

இது போல்,

$H * a = \{h * a \mid h \in H\}$ என்பதற்கு H-ன் வலது துணைக் கணம் (Right coset) என்பது பெயர்.

குறிப்பு

$(G, *)$ குலம், அபீலியன் குலமென்றால், $a * h = h * a$

$$a * \ = H * a, \ \forall a \in G.$$

இந்தப் பகுதியில் உள்ள விவாதங்களில் இடது துணைக்கணங்களைக் கருதுவோம்; இணையாக, வலது துணைக் கணங்களுக்கான தேற்றங்களையும் அமைக்கலாம்.

2.11.2 தேற்றம்

$(H, *)$ என்பது $(G, *)$-ன் உட்குலமானால், H கணமே, H-ன் இடது துணைக் கணமாகும்.

நிறுவல்

$(G, *)$-ன் முற்றொருமை உறுப்பு e என்றால்,

$$e * H = \{ e * h \mid h \in H \} = \{ h \mid h \in H \} = H$$

$\therefore$ வ.இ.படி, H என்பது H-ன் ஓர் இடது துணைக் கணமாகும்.

2·11·3 தேற்றம்

$(G, *)$ குலமென்றும், $(H, *)$, அதன் உட்குலமென்றும் கொள்க.

G-ன் ஒவ்வோர் உறுப்பு a-ம் H-ன் யாதாவதொரு இடது துணைக் கணத்தில் இருக்கும்; குறிப்பாக, $a * H$ துணைக் கணத்தில் இருக்கும்.

நிறுவல்

$a \in G$ $(H, *)$ உட்குலமாதலால், $(G, *)$-ன் முற்றொருமை உறுப்பு $e \in H$

∴ $a * H = \{ a * h \mid h \in H \}$ என்பதில் h-க்குப் பதில் e ஐ எழுதலாம்.

∴ $a * e \in a * H$ $\therefore$ $a \in a * H$

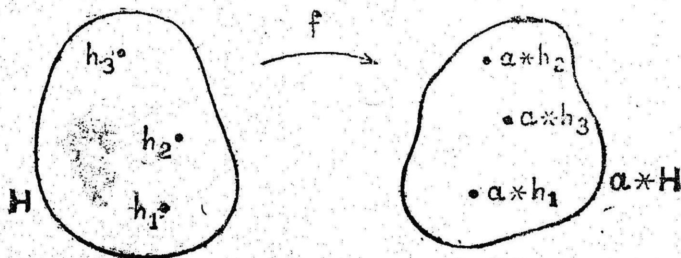
2·11.4. தேற்றம்

$(H, *)$ என்பது $(G, *)$ குலத்தின் ஓர் உட்குலம் என்க. H-ன் உறுப்புகளுக்கும் H-ன் யாதானுமொரு துணைக் கணத்தின் உறுப்புகளுக்கும் ஒன்றுக்கொன்றான ஒத்தியைபு (one to one correspondence) உண்டு.

நிறுவல்

இரு கணங்கள் ஒன்றுக்கொன்றான ஒத்தியைபில் உள்ளன என்றால்,

அவை 1:1, முழுக் கோர்த்தலால் தொடர்புடையன என்பது பொருள். H-ன் இடது துணைக் கணம் $a * H$ என்பதால், $h \in H \Longrightarrow a * h \in a * H$. $f(h) = a * h$ என்றவாறு $f : H \longrightarrow a * H$ என்ற கோர்த்தலை வரையறு. ∴ $h \overset{f}{\longmapsto} a * h$.



படம் 56

இந்தக் கோர்த்தல் நல்வரையறையுள்ளதா ?

அதாவது, $h_1 = h_2 \Longrightarrow f(h_1) = f(h_2)$ என்பது சரியா ?

$$h_1 = h_2 \Longrightarrow e * h_1 = e * h_2 \qquad (\because e \in G)$$
$$\Longrightarrow (a^{-1} * a) * h_1 = (a^{-1} * a) * h_2$$
$$\Longrightarrow a^{-1} * (a * h_1) = a^{-1} * (a * h_2)$$
$$\Longrightarrow a * h_1 = a * h_2 \text{ (அடித்தல் விதி)}$$
$$\Longrightarrow f(h_1) = f(h_2)$$

$\therefore$ f நல்வரையறையுள்ளது.

H-ன் யாதாவதொரு h-க்கு, $a * H$-ன் ஒவ்வோர் உறுப்பும் $a * h$ என்ற உருமாதிரியுடையதால் f முழுக் கோர்த்தலாகும்.

மேலும் $a * h_1 = a * h_2$, $h_1, h_2 \in H$ எனில்

$$h_1 = h_2 \qquad \text{(குலத்தின் அடித்தல் விதி)}$$

$\therefore$ $f(h_1) = f(h_2) \Longrightarrow h_1 = h_2$

$\therefore$ f கோர்த்தல் 1 : 1 ஆகும்.

$\therefore$ $f : H \longrightarrow a * H$ என்பது 1 ; 1, முழுக் கோர்த்தல்.

$\therefore$ H-க்கும் $a * H$-க்குமிடையே ஒன்றுக்கொன்றுன ஒத்தியைபு உள்ளது.

2·11·5. துணை முடிவு

$(G, *)$ குலம் முடிவுள்ளதானுல், $(H, *)$ ஓர் உட்குலமானுல் H-ன் எவையேனும் இரு இடது துணைக் கணங்களில் ஒவ்வொன்றின் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையும் H-ன் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையும் சமம்.

நிறுவல்

H-ன் இரு இடது துணைக் கணங்கள் $a * H$, $b * H$ என்க.

2·11·4 தேற்றத்தின்படி, H க்கும் $a * H$-க்கும் இடையே ஒன்றுக்கொன்றுன ஒத்தியைபு உண்டு. H-க்கும் $a * H$-க்கும் ஒரே எண்ணிக்கையுள்ள உறுப்புகள் இருக்கின்றன. இதுபோல் H-க்கும், $b * H$-க்கும் இடையே ஒன்றுக்கொன்றுன ஒத்தியைபு உண்டு. $\therefore$ H-லும், $b * H$-லும் ஒரே எண்ணிக்கையுள்ள

உறுப்புகள் இருக்கின்றன. $\therefore$ H-ன் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை $= a * H$-ன் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை $= b * H$-ன் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை.

2·11·6. உதாரணங்கள்

1. சதுரத்தின் சமச்சீர்க் குலம் $(G, *)$ என்பதில்

$G = \{ R_{90}, R_{180}, R_{270}, R_0, X, Y, D_1, D_2 \}$.

$(G, *)$-ன் ஓர் உட்குலம் $(A, *)$ என்பதில்

$A = \{ R_{180}, R_0, H, V \}$

A-ன் இடது துணைக் கணங்களாவன :

$$R_{90} * A = \{ R_{90} * R_{180}, R_{90} * R_0, R_{90} * H, R_{90} * V \}$$
$$= \{ R_{270}, R_{90}, D_2, D_1 \}$$
$$R_{180} * A = \{ R_{180} * R_{180}, R_{180} * R_0, R_{180} * H, R_{180} * V \}$$
$$= \{ R_0, R_{180}, V, H \}$$
$$R_{270} * A = \{ R_{270} * R_{180}, R_{270} * R_0, R_{270} * H, R_{270} * V \}$$
$$= \{ R_{90}, R_{270}, D_1, D_2 \}$$
$$R_0 * A = \{ R_0 * R_{180}, R_0 * R_0, R_0 * H, R_0 * V \}$$
$$= \{ R_{180}, R_0, H, V \}$$
$$H * A = \{ H * R_{180}, H * R_0, H * H, H * V \}$$
$$= \{ V, H, R_0, R_{180} \}$$
$$V * A = \{ V * R_{180}, V * R_0, V * H, V * V \}$$
$$= \{ H, V, R_{180}, R_0 \}$$

இந்தத் துணைக் கணங்களுள் வெவ்வேறானவை இரண்டுதாம். அவையாவன :

$\{ R_{270}, R_{90}, D_2, D_1 \}$, $\{ R_0, R_{180}, V, H \} = A$

இவற்றுக்குப் பொதுவான உறுப்புகள் இல்லை.

இவ்விரு கணங்களின் கூட்டு :

$$\{ R_{270}, R_{90}, D_2, D_1, R_0, R_{180}, V, H \} = G$$

2. சதுரத்தின் சமச்சீர்கள் குலம் (G, $*$)-ன் மற்றோர் உட்குலம் $B = \{ R_0, D_1 \}$

B-ன் இடது துணைக் கணங்களாவன:

$$R_{90} * B = \{ R_{90}, H \}$$

$$R_{180} * B = \{ R_{180}, D_2 \}$$

$$R_{270} * B = \{ R_{270}, V \}$$

$$R_0 * B = \{ R_0, D_1 \}$$

$$H * B = \{ H, R_{90} \}$$

$$V * B = \{ V, R_{270} \}$$

$$D_1 * B = \{ D_1, R_0 \}$$

$$D_2 * B = \{ D_2, R_{180} \}$$

மேற்கண்ட துணைக் கணங்களுள் $\{ R_{90}, H \}$, $\{ R_{180}, D_2 \}$, $\{ V, R_{270} \}$, $\{ D_1, R_0 \} = B$ என்பவைதாம் வெவ்வேறானவை அதாவது பொது உறுப்பிலிக் கணங்கள்.

இந்தத் துணைக் கணங்களின் கூட்டு

$$= \{ R_{90}, H, R_{180}, D_2, V, R_{270}, D_1, R_0 \}$$
$$= G.$$

பொதுவாக, இடது துணைக் கணங்களும் வலது துணைக் கணங்களும் சமமாகா.

உதாரணமாக,

$$R_{90} * A = \{ R_{90}, H \} \quad \therefore \quad A * R_{90} = \{ R_{90} \; V \}$$

$$\therefore \quad R_{90} * A \neq A * R_{90}.$$

2·11·7. தேற்றம்

(G, $*$) குலத்தின் ஓர் உட்குலம் (H, $*$) என்றால்,

$$a * H = H \Longleftrightarrow a \in H$$

நிறுவல்

பாகம் 1 $\Longrightarrow$

தற்கோள் : $a * H = H$

$(H, *)$ உட்குலமாதலால், $(G, *)$-ன் முற்றொருமை உறுப்பு $e \in H$

$\therefore$ $a * H = \{ a * h \mid h \in H \}$ என்பதில் h-க்குப் பதில் e ஐ எழுதலாம்.

$\therefore$ $a * e \in a * H$ $\therefore$ $a \in a * H$

ஆனால் $a * H = H$ (தற்கோள்)

$\therefore$ $a \in H$.

பாகம் 2 $\Longleftarrow$

தற்கோள் $a \in H$ என்க.

ஒரு குலத்தின் ஈரிணைச் செயலிதான் அக்குலத்தின் எந்த உட்குலத்திற்கும் ஈரிணைச் செயலியாவதால், $(G, *)$-ன் உட்குலமான $(H, *)$ ஆனது $*$ ஆல் அடைக்கப்பட்டது.

$\therefore$ $h \in H, a \in H \Longrightarrow a * h \in H$

ஆனால் வ. இ. படி $a * h \in a * H$

$\therefore$ $a * H \subseteq H$

$h = e * h$

$= (a * a^{-1}) * h$

$= a * (a^{-1} * h)$ ($*$-ன் சேர்ப்புப் பண்பு)

$a, h \in H$, $(H, *)$ என்பது $(G, *)$-ன் உட்குலம் $\Longrightarrow a^{-1} * h \in H$ (தேற்றம் 2·9·5)

$\therefore$ துணைக் கணத்தின் வ.இ. படி, $h \in a * H$

$\therefore$ $H \subseteq a * H$

$\therefore$ $H \subseteq a * H, a * H \subseteq H \Longrightarrow a * H = H$

$\therefore$ பாகங்கள் 1-ம், 2-ம் இணைந்தால், $a * H = H \Longleftrightarrow a \in H$.

2·11·8. தேற்றம்

$(G, *)$ குலத்தின் ஓர் உட்குலம் $(H, *)$ என்றால்,

$a * H = b * H \Longleftrightarrow a^{-1} * b \in H$

நிறுவல்

பாகம் 1 $\Longrightarrow$

தற்கோள் : $a * H = b * H$ என்க.

$a * h_1$ என்பது $a * H$-ன் யாதாமோர் உறுப்பு என்றால்,

$a * h_1 = b * h_2$ என்றவாறு h_2 என்ற உறுப்பு H-ல் உள்ளது.

$\therefore \quad a^{-1} * (a * h_1) = a^{-1} * (b * h_2)$

$(a^{-1} * a) * h_1 = (a^{-1} * b) * h_2$
(குலத்தின் சேர்ப்புப் பண்பு)

$e * h_1 = (a^{-1} * b) * h_2$
($(G, *)$-ன் முற்றொருமை உறுப்பு e)

$h_1 = (a^{-1} * b) * h_2$

$\therefore \quad h_1 * h_2^{-1} = (a^{-1} * \ ) * (h_2 * h_2^{-1})$

$= (a^{-1} * b) * e$

$= a^{-1} * b$

$\therefore \quad h_1 * h_2^{-1} = a^{-1} * b$

(H, $*$) உட்குலம். $\therefore \quad h_2 \in H \Longrightarrow h_2^{-1} \in h$

$\therefore \quad h_1 \in H, h^{-1} \in H$

$\Longrightarrow h_1 * h_2^{-1} \in H$

$\Longrightarrow a^{-1} b \in H$

மாற்றுமுறை

$\because \quad e \in H, \quad a = a * e \in a * H$

$\therefore \quad a \in a * H$

தற்கோளின்படி $a * H = b * H$

$\therefore \quad a \in b * h$

ஏதோ ஒரு $h \in H$-க்கு, $a = b * h$

$\therefore \quad a^{-1} * a = (a^{-1} * b) * h$

$e = (a^{-1} * b) * h$

$\therefore h^{-1} = a^{-1} * b$

ஆனால் $h \in H$, $(H, *)$ உட்குலம், $\therefore \quad h^{-1} \in H$.

$\therefore \quad a^{-1} * b \in H$

பாகம் 2 $\Longleftarrow$

தற்கோள் : $a^{-1} * b \in H$ என்க.

$\therefore$ தேற்றம் 2·11·7 -ன்படி

$(a^{-1} * b) * H = H$

$\therefore$ H-ன் யாதாவதோர் உறுப்பு h_1 ஐ,

$h_1 = (a^{-1} * b) * h_2, \qquad h_2 \in H$

என்றெழுதலாம்.

$$\begin{aligned} \therefore \quad a * h_1 &= (a * (a^{-1} * b)) * h_2 \\ &= ((a * a^{-1}) * b) * h_2 \\ &= (e * b) * h_2 \\ &= b * h_2 \end{aligned}$$

அதாவது $a * H$ துணைக் கணத்தில் உள்ள $a * h_1$-ம், $b * h_2$ உருமாதிரியில் உள்ளது.

$\therefore \quad a * h_1 \in b * H$

$\therefore \quad a * H \subseteq b * H$

இதுபோல் $b * H \subseteq a * H$ என நிறுவுவோம்.

$\therefore \quad a * H = b * H$

2·11·9. தேற்றம்

$(G, *)$ குலத்தின் ஓர் உட்குலம் $(H, *)$ என்றால், $a, b \in G$ என்றால், துணைக் கணங்கள் $a * H$-ம், $b * H$-ம்

$(a * H) \cap b * H = \emptyset$ என்றோ

$a * H = b * H$ என்றோ

இருப்பன.

நிறுவல்

$a * H \cap b * H = c$ என்க.

∵ $c \in a * H$, $c = a * h_1$ என்றவாறு h_1 என்ற உறுப்பு H-ல் உள்ளது.

இதேபோல் $c = b * h_2$, $h_2 \in H$

∴ $a * h_1 = b * h_2$

∴ $a^{-1} * b = h_1 * h_2^{-1}$

(2·11·8 தேற்றத்தின் நிறுவல் பாகம் 1)

∴ $(H, *)$ ஓர் உட்குலம், $h_2 \in H \Longrightarrow h_2^{-1} \in H$

$h_1, h_2^{-1} \in H \Longrightarrow h_1 * h_2^{-1} \in H$

($(H, *)$-ல் $*$-ன் அடைப்புப் பண்பு)

∴ $a^{-1} * \quad H$.

∴ தேற்றம் 2·11·8-ன் படி, $a * H = b * H$

∴ $a * H \cap b * H \neq \emptyset \Longrightarrow a * H = b * H$

2·11·10. நல்ல முடிவு

தேற்றம் 2·11·8-ன் படி, G-ன் ஒவ்வோர் உறுப்பு a-ம், G-ல் H-ன் $a * H$ என்ற இடது துணைக் கணத்தின் உறுப்பாக இருக்கும். அதாவது G-ன் எல்லா உறுப்புகளும் எல்லா இடது கணங்களாலும் தீர்க்கப்பட்டுவிடும். ∴ எல்லா இடது துணைக் கணங்களின் கூட்டு G ஆகும். ஆனால் 2 11·9-ன் படி, G-ன் ஒவ்வோர் உறுப்பும் H-ன் ஒரே ஓர் இடது துணைக் கணத்தில் இருக்கும்.

அதாவது $G = \{ a_1, \ldots \ldots, a_k, \ldots, a_n \}$
$(H, *)$ உட்குலம் என்றால்,

$$\begin{cases} G = (a_1 * H) \cup (a_2 * H) \cup \ldots \ldots \cup (a_k * H) \\ a_i * H \cap a_j * H = \emptyset, i \neq j, i, j = 1, 2, \ldots, k \end{cases}$$

∴ G ஆனது H-ன் எல்லா இடது துணைக் கணங்களால் பிரிவினை ஆக்கப்படுகிறது. அதாவது G ஆனது H ஆல் பொது உறுப்பிலிக் கணங்களாகப் பிரிவினையாக்கப்படுகிறது. தேற்றம் 2·11·5-ன் படி இக்கணங்களுள் ஒவ்வொன்றின் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையும் H-ன் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையும் சமம்.

2·11·11. மிக அழகிய தேற்றம்

'லாக்ராஞ்சின்' தேற்றம் (Lagrange's Theorem)

ஒரு முடிவுள்ள குலத்தின் எந்த ஓர் உட்குலத்தின் பரிமாண வரிசையும் அந்தக் குலத்தின் பரிமாண வரிசையை மீதியில்லாமல் வகுக்கும்.

(அல்லது) $(H, *)$ என்பது $(G, *)$ குலத்தின் ஓர் உட்குலமானால்,

$0(H) \mid 0(G)$. குறியீடு | என்பது 'மீதியில்லாமல் வகுக்கிறது' என்பதைக் குறிக்கும்.

நிறுவல்

$(G, *)$ முடிவுள்ள குலம்; $\therefore$ உட்குலம் $(H, *)$-ம் முடிவுள்ள குலம்.

$0(G) = n$, $0(H) = r$ என்க. $n, r < +\infty$

$G = \{a_1, \ldots, a_k, \ldots a_n\}$ என்றும் H-ன் இடது துணைக் கணங்கள் $a_1 * H, \ldots\ldots a_k * H$ என்றும் கொள்க.

தேற்றம் 2·11·5-ன் படி,

$r = 0(H) = H$-ன் ஒவ்வோர் இடது துணைக் கணத்தின் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை.

முடிவு 2·11·10-ன் படி,

$$\begin{cases} G = (a_1 * H) \cup (a_2 * H) \cup \ldots \cup (a_k * H) \\ a_i * H \cap a_j * H = \emptyset, \ i \neq j, \ \forall \ i, j = 1, 2, \ldots, k \end{cases}$$

ஒவ்வொரு துணைக் கணத்திலும் r உறுப்புகள் என்றால், G-ன் பிரிவினையை அமைக்கும் k துணைக் கணங்களில் kr உறுப்புகள் இருக்கின்றன.

இந்த k துணைக் கணங்களும் பொது உறுப்பிலிகளாவதால்,

G-ல் உள்ள எல்லா உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை $n = kr$

$$\therefore \ 0(G) = k\,0(H)$$

$$\therefore \ 0(H) \mid 0(G)$$

குறிப்பு: இந்தச் சுவையான, அழகான தேற்றத்தைத் தோற்றுவித்தவர் ஜோசஃப் லூயி லாக்ரான்ஞ்ச் (1736-1813) என்ற ஃபிரெஞ்சு கணித மேதை.

2·11·12. சில முக்கியத் துணை முடிவுகள்

1. $(G, *)$ என்ற முடிவுள்ள குலத்தின் பரிமாண வரிசை n என்றால் $g^n = e$, $\forall g \in G$, e என்பது $(G, *)$-ன் முற்றொருமை உறுப்பு.

நிறுவல்

G-ன் ஒரு உறுப்பு g என்றால், தேற்றம் 2·9·10-ன் படி,

$H = \{ g^i \mid i$ ஒரு முழு எண் $\}$ என்பது $*$-ன் கீழ் $(G, *)$-ன் உட்குலம். அதாவது $(H, *)$, g ஆல் பிறப்பிக்கப்பட்ட சக்கர உட்குலமாகும்.

∵ லாக்ராஞ்சியின் தேற்றப்படி, $0(H) \mid 0(G)$

∴ $0(G) = n, 0(H) = r \Longrightarrow n = rk, k \in \mathbf{Z}^+$

∴ தேற்றம் 2·10·3-ன் படி,

$H = \{ g, g^2, \ldots, g^{r-1}, g^r = e \}, e \in H$

∵ $g^n = g^{rk} = (g^r)^k = e^k = e$.

2. ஒரு முடிவுள்ள குலத்தின் ஒவ்வோர் உறுப்பின் பரிமாண வரிசையும் அந்தக் குலத்தின் பரிமாண வரிசையை மீதியில்லாமல் வகுக்கும்.

அதாவது, $g \in (G, *) \Longrightarrow 0(g) \mid 0(G)$

நிறுவல்

வரை இலக்கணப்படி, ஒரு முடிவுள்ள குலத்தின் அதாவது $(G, *)$-ன் ஒவ்வோர் உறுப்பின், அதாவது g-ன் பரிமாண வரிசையாவது, அவ்வுறுப்பு g பிறப்பிக்கும் சக்கரக் குலத்தின் $(\ , *)$-ன் பரிமாண வரிசை ஆகும் (காண்க 2·10·5). இந்தச் சக்கரக் குலம், $(G, *)$-ன் உட்குலம், (காண்க 2·9·10).

∵ $0(g) = 0(H)$

லாக்ரான்ஞ்ச் தேற்றத்தின்படி, $0(H) \mid 0(G) \Longrightarrow 0(g) \mid 0(G)$

3. p என்ற பகா எண்ணைப் பரிமாண வரிசையாகக் கொண்ட முடிவுள்ள குலம் $(G, *)$ ஆனது சக்கரக் குலமாகும்; முற்றொருமை உறுப்பு நீங்கலாக, G-ன் மற்ற உறுப்புகள் ஒவ்வொன்றும் G-ன் பிறப்பாக்கி ஆகும்.

யாதாவதொரு உறுப்பு $g \in G$ என்றால், $g \neq e$, g ஆனது $H = \{ g^i \mid i \in Z \}$ என்ற சக்கரக் குலத்தைப் பிறப்பிக்கிறது.

$\therefore$ 2·11·12-ன்படி, $0(g) \mid 0(G)$

$$\Longrightarrow 0(g) \mid r.$$

p பகா எண் என்பதால், $0(g) = p$.

முற்றொருமை உறுப்பைத் தவிர, G-ன் வேறெந்த உறுப்பாலும் பிறப்பிக்கப்பட்ட சக்கர உட்குலத்தின் பரிமாண வரிசை p ஆகும். ஆனால் G ன் பரிமாண வரிசையும் p.

$\therefore$ $G = H$. $\therefore$ G ஒரு சக்கரக் குலம். G-ன் பிறப்பாக்கி g.

2·11·13. வரை இலக்கணம்

G-ல் H ன் **குறியீட்டெண்** (Index of H in G)

$(G, *)$ என்ற முடிவுள்ள குலத்தின் ஓர் உட்குலம் $(H, *)$ என்க.

G-ல் H-ன் இடது துணைக் கணங்களின் எண்ணிக்கைக்கு G-ல் H-ன் குறியீட்டெண் என்பது பெயர். இதனை $i_G(H)$ என்று குறிப்பர்.

லாக்ரான்ஞ்ச் தேற்றப்படி, $(G, *)$ என்ற முடிவுள்ள குலத்தின் ஓர் உட்குலம் $(H, *)$ என்றால்,

$$i_G(\mathrm{H}) = \frac{0(G)}{0(H)}$$

ஏனெனில் 2·11·11-ல், $0(G) = n$, $0(H) = r$, இடது துணைக் கணங்களின் எண்ணிக்கை $= k$ என்றால், $n = kr$ என்று பார்த்தோம்.

$$\therefore \quad k = \frac{n}{r} = \frac{0(G)}{0(H)}$$

2·11·14. வரை இலக்கணம்

$(G, *)$ குலத்தின் ஓர் உட்குலம் $(H, *)$ என்றால், G-ன் எவையேனும் இரு உறுப்புகள் a, b க்கு $b^{-1} * a \in H$ என்றால்,

$a \equiv b \pmod H$ என்று எழுதுவோம்;

∴ 'ஒருங்கிசைவு மட்டு' என்பது G-கணத்துள் ஒரு தொடர்பாகும்.

2·11·15. தேற்றம்

$(G, *)$ குலத்தின் உட்குலம் $(H, *)$ என்க.

$(G, *)$-ன் எவையேனுமிரு உறுப்புகள் a, b என்க.

$a \equiv b \pmod H$ என்ற தொடர்பு ஒரு சமநிலைத் தொடர்பு ஆகும்.

நிறுவல்

தானுதல், சமச்சீர், செலுத்தும் பண்புகளை இத்தொடர்பு பெற்றிருக்கிறதா என்று சரிபார்த்தால் போதும்.

1. e என்பது $(G, *)$-ன் முற்றொருமை உறுப்பு என்க.

$(H, *)$ உட்குலம் என்பதால் $e \in H$

∴ $a^{-1} * a \in H$

வரை இலக்கணப்படி, $a \equiv a \pmod H$

∴ $\equiv$ -க்குத் தானுதல் பண்பு உண்டு.

2. $a \equiv b \pmod H$ என்க.

∴ $b^{-1} * a \in H$

$(H, *)$ உட்குலமாதலால், $(b^{-1} * a)^{-1} \in H$

அதாவது $a^{-1} * (b^{-1})^{-1} \in H$ — தேற்றம் 2·5·6

$\Longrightarrow a^{-1} * b \in H$ — தேற்றம் 2·5·5

$\Longrightarrow b \equiv a \pmod H$ — வரை இலக்கணம் 2.11·14

∴ $a \equiv b \pmod H \Longrightarrow b \equiv a \pmod H$

∴ சமச்சீர் பண்பு $\equiv$ -க்கு உண்டு.

3. $\forall a, b, c \in G$,

$a \equiv b \pmod{H}$, $b \equiv c \pmod{H}$ என்க.

$\therefore$ $b^{-1} * a \in H$ $c^{-1} * b$ என்பவை உண்மை.

$(H, *)$ என்பது $(G, *)$-ன் உட்குலமாதலால்,

$(c^{-1} * b) * (b^{-1} * a) \in H$ (அடைக்கும் பண்பு)

$c^{-1} * (b * (b^{-1} * a)) \in H$ (சேர்ப்புப் பண்பு)

$c^{-1} * ((b * b^{-1}) * a) \in H$ (சேர்ப்புப் பண்பு)

$c^{-1} * (e * a) \in H$

$c^{-1} * a \in H$

அதாவது $a \equiv c \pmod{H}$

$\therefore$ $\equiv$ -க்குச் செலுத்தும் பண்பு உண்டு.

$\therefore$ $a \equiv b \pmod{H}$ என்பது சமநிலைத் தொடர்பு ஆகும்.

2·11·16 தேற்றம்

$(H, *)$ என்பது $(G, *)$ குலத்தின் ஓர் உட்குலம் என்க.

$a \in G$ என்க.

$\forall a, b \in G$, $a \equiv b \pmod{H}$ என்ற சமநிலைத் தொடர்பைப் பொறுத்து $[a]$ என்பது a-ன் "சமநிலை இனம்" (Equivalence class) $[a]$ என்க.

அதாவது, $[a] = \{ x \in G \mid x \equiv a \pmod{H} \}$.

$[a] = a * H$ என்பதை நிறுவுக.

அதாவது a-ன் சமநிலை இனமாவது G-ல் a ஆல் நிர்ணயிக்கப்பட்ட H-ன் இடது துணைக் கணமாகும் என்று நிறுவுக.

நிறுவல்

முதலில் $a * H \subset [a]$ என்பதை நிறுவுவோம்.

$h \in H$, $(a * h)^{-1} * a = (h^{-1} * a^{-1}) * a$
$= h^{-1} * (a^{-1} * a) = h^{-1} * e = h^{-1} \in H$

$\therefore$ $(a * h)^{-1} * a \in H \implies a \equiv (a * h) \pmod{H}$
$\forall h \in H$ (வ.இ.)

$\therefore$ $a * h \subset [a]$

இப்பொழுது $[a] \subset a * h$ என்று நிறுவுவோம்.

$x \in [a]$ என்க.

$\therefore$ $[a]$-ன் வ.இ. படி, $x \equiv a \pmod H$

$\therefore \; a^{-1} * x \in H$

$\Longrightarrow a^{-1} * x = h \,,\; h \in H$

$\Longrightarrow (a * a^{-1}) * x = a * h$

$\Longrightarrow e * x = a * h$ (e என்பது $(G, *)$-ன்

$\Longrightarrow x = a * h$ முற்றொருமை)

$\Longrightarrow x \in a * H$

$\therefore \; x \in [a] \Longrightarrow x \in a * H$

$\therefore \; [a] \subset a * H$

$\therefore \; a * H \subset [a],\; [a] \subset a * H \Longrightarrow [a] = a * H$

மாற்று நிறுவல்

$$[a] = \{ x \in G \mid x \equiv a \pmod H \}$$

$= \{ x \in G \mid a^{-1} * x = h,$ ஏதோ $h \in H \}$

$$= \{ x \in G \mid x = a * h,\; h \in H \}$$

$$= a * H.$$

ஏற்கெனவே முதல் அத்தியாயத்தில் "சமநிலை இனம்" என்ற பகுதியின் கீழ், ஒரு கணத்துள் சமநிலைத் தொடர்பைப் பொறுத்த சமநிலை இனங்கள் அந்தக் கணத்தைப் பிரிவினை செய்கின்றன என்று படித்தோம் இதனால் பெறப்படுவது: '$(G, *)$ குலத்தின் ஓர் உட்குலம் $(H, *)$ என்றால், G-ல் H-ன் இடது துணைக் கணங்கள் G-ன் பிரிவினையை அமைக்கின்றன. ஆகையால் G-ன் ஒவ்வோர் உறுப்பும், G-ல் H-ன் சரியாக ஒரே ஓர் இடது துணைக் கணத்துள்' என்ற தேற்றம்.

2·12. மாதிரிக் கணக்குகள்

1. $(G, *)$ குலம், $a * a = a$ என்றவாறு $a \in G$ இருந்தால் $a = e$ என்று நிறுவுக.

விடை: $a * a = a$

$\therefore$ $a * a = a * e$, e என்பது $(G, *)$-ன் முற்றொருமை.
(இடது அடித்தல் விதிப்படி,)
$a = e$.

2 $(G, *)$ அபீலியன் குலம் $\Longleftrightarrow$ $(a * b)^{-1} = a^{-1} * b^{-1}$ $\forall a, b \in G$ என்று நிறுவுக.

விடை: $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$ தேற்றம் 2·5·6

ஆனால் $(a * b)^{-1} = a^{-1} * b^{-1}$ கணக்கில் கொடுக்கப்பட்டது.

$\therefore$ $b^{-1} * a^{-1} = a^{-1} * b^{-1}$ $a^{-1}, b^{-1} \in G$

$\therefore$ $*$-க்குப் பரிமாற்றுப் பண்பு உண்டு.

$\therefore$ $(G, *)$ அபீலியன் குலம்.

3. $(G, *)$ குலமென்றும், $(a * b)^2 = a^2 * b^2$ $\forall a, b \in G$ என்றும் கொள்க.

$(G, *)$ அபீலியன் குலம் என்று நிறுவுக.

விடை: $(a*b)*(a*b) = a^2 * b^2$ (முழு அடுக்குகளின் வ. இ.)

$a * (b * (a*b)) = (a * a) * (b*b)$ ($*$-ன் சேர்ப்புவிதி முழு அடுக்குகளின் வ.இ.)

$= a * (a * (b * b))$

$b * (a * b) = a * (b * b)$ (இடது அடித்தல் விதி)

$(b * a) * b = (a * b) * b$ (சேர்ப்பு விதி)

$b * a = a * b$

$\therefore$ $*$-க்குப் பரிமாற்றுப் பண்பு உண்டு.

$\therefore$ $(G, *)$ அபீலியன் குலம்.

4. $(G, *)$ குலத்தின் ஒவ்வோர் உறுப்பு a-க்கும் $a^2 = e$ என்றால், $(G, *)$ அபீலியன் குலம் என்று நிறுவுக.

விடை:

$a, b \in G$ என்க.

$(G, *)$ குலமென்பதால், $a * b \in G$

கணக்கின்படி, $(a * b)^2 = e$

$(a * b) * (a * b) = e$ (முழு அடுக்குகளின் வ.இ.)

$(a * b) * (a * b) = b * b$ (கணக்கின்படி)

$((a * b) * a) * b = b * b$ (சேர்ப்பு விதி)

$(a * b) * a = b$ (வலது அடித்தல் விதி)

$= b * e$

$(a * b) * a = b * (a * a)$ (கணக்கின்படி)

$(a * b) * a = (b * a) * a$ (சேர்ப்பு விதி)

$a * b = b * a$ (வலது அடித்தல் விதி)

$\therefore$ $(G, *)$ அபீலியன் குலம்.

5. முற்றொருமையைத் தவிர $(G, *)$-ன் ஒவ்வோர் உறுப்பின் பரிமாண வரிசையும் 2 என்றால், $(G, *)$ அபீலியன்குலம் என்று நிறுவுக.

விடை :

$a, b \in (G, *)$ என்க.

$\therefore$ $a * b \in G$ ஒவ்வோர் உறுப்பின் பரிமாண வரிசை 2 என்பதால், வ. இ. படி, $a^2 = e$, $b^2 = e$, $(a * b)^2 = e$

$(a * b)^2 = e \Longrightarrow (a * b) * (a * b) = e$

$\Longrightarrow ((a * b) * (a * b)) * b = e * b$

$\Longrightarrow (a * b) * ((a * b) * b) = e * b$

$\Longrightarrow (a * b) * (a * b^2) = e * b$

$\Longrightarrow (a * b) * (a * e) = e * b$ $(b^2 = e)$

$\Longrightarrow (a * b) * a = b$

$$\Longrightarrow (a * b) * a^2 = b * a$$

$$\Longrightarrow (a * b) * e = b * a \qquad (a^2 = e)$$

$$\Longrightarrow a * b = b * a$$

$\Longrightarrow (G, *)$ அபீலியன் குலம்

பயிற்சி

1. வழக்கமான பெருக்கலின்கீழ், 1-ன் n வர்க்க மூலங்கள் எல்லாம் அபீலியன் குலத்தை அமைக்கின்றன என்று நிறுவுக.

2. வழக்கமான பெருக்கலின் கீழ் $\{1, -1\}$ என்பது 2 பரிமாண வரிசையுள்ள முடிவுள்ள அபீலியன் குலம் என்று நிறுவுக.

3. 'பெருக்கல் மட்டு 7' என்ற செயலியின் கீழ் $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ என்பது அபீலியன் குலம் என்று காண்பி.

4. a, b என்பவை $\mathbf{Z}$-ன் எவையேனுமிரு உறுப்புகள் என்க.

$a * b = a + b + 1$ என்றவாறு $\mathbf{Z}$-ன் மீது $*$ என்பது செயலியானால், $(\mathbf{Z}, *)$ அபீலியன் குலம் என்று காண்பி.

5. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ என்ற அணிகள் வழக்கமான பெருக்கலின் கீழ், குலம் என்று நிறுவுக.

6. a, b என்பவை $Q - \{1\}$-ன் எவையேனுமிரு உறுப்புகள் என்க.

$a * b = a + b + ab$ என்றவாறு $Q - \{1\}$-ன் மீது $*$ என்பது செயலியானால், $(Q - \{1\}, *)$ அபீலியன் குலமென நிறுவுக.

7. $\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$ என்பது வழக்கமான பெருக்கலின் கீழ், குலமெனக் காண்பி.

8. $S = \{a, b\ \ c, d\}$ என்க.

$\cdot$	a	b	c	d
a	a	b	e	d
b	b	c	d	b
c	c	d	a	b
d	d	a	c	a

என்ருல் $(S, \cdot)$ குலமா ?

9. $T = \{a, b, c, d\}$ என்க.

§	a	b	c	d
a	d	a	b	c
b	a	b	c	d
c	b	c	d	a
d	c	d	a	b

என்ருல் $(T,$ §$)$ குலமா ? ஆய்க.

10. 3, 4 அல்லது 5 உறுப்புகளைக் கொண்ட ஒவ்வொரு குலமும் அபீலியன் என்று நிறுவுக.

11. மூன்று குறியீடுகளின் சமச்சீர் குலம் $(S_3, \cdot)$ ஆனது ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தின் எல்லாச் சுழற்சிகளையும் குறிக்கின்றது என நிறுவுக.

12. $(G, \cdot)$ குலத்தின் எவையோ மூன்று உறுப்புகள் a, b, c என்ருல்,

$((a \cdot b) \cdot c)^{-1} = (c^{-1} \cdot b^{-1}) \cdot a^{-1}$ என நிறுவுக.

13. $(G, \cdot)$ முடிவுள்ள குலம் என்க. r, q என்பவை சமமல்லாத இரு பகா எண்கள் என்க. p, q பரிமாண வரிசைகள் கொண்ட

$(G, \cdot)$-ன் உட்குலங்கள் $(H_1, \cdot)$, $(H_2, \cdot)$ என்றால் $H_1 \cap H_2 = \{e\}$ என்று நிறுவுக. e என்பது $(G, \cdot)$-ன் முற்றொருமை.

14. $G = \{ n \cdot a \mid n \in \mathbf{Z} \}$, $+$: வழக்கமான கூட்டல் என்றால், $(G, +)$ அபீலியன் குலம் என்று நிறுவுக. இங்கே $a \neq 0$, $a \in \mathbf{R}$.

15. $G = \{ (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1) \}$,

G-ன்மீது செயலி $*$-ன் வரையறை

$*$	(0, 0)	(0, 1)	(1, 0)	(1, 1)
(0, 0)	(0, 0)	(0, 1)	(1, 0)	(1, 1)
(0, 1)	(0, 1)	(0, 0)	(1, 1)	(1, 0)
(1, 0)	(1, 0)	(1, 1)	(0, 0)	(0, 1)
(1, 1)	(1, 1)	(1, 0)	(0, 1)	(0, 0)

என்றால் $(G, *)$ அபீலியன் குலம் என்று நிறுவுக.

16. U என்பது வெற்றற்ற பெருங்கணம் என்க.

G என்பது U-ன் எல்லா உட்கணங்களையும் உறுப்புகளாகக் கொண்ட கணம் என்க.

$(G, \cup)$, $(G, \cap)$ என்பவை குலங்கள் அல்ல என்று நிறுவுக.

17. மேற்கண்ட 16 ஆம் கணக்கில் G-ன் மீது $*$ செயலியை

$A * B = (A - B) \cup (B - A)$, $A, B \in G$ என்றவாறு வரையறுத்தால், $(G, *)$ அபீலியன் குலம் என்று நிறுவுக.

18. $G = \{ (a, b) \mid a, b \in \mathbf{R}, a \neq 0 \}$,

$(a, b) * (c, d) = (ac, bc+d)$ என்றால் $(G, *)$ அபீலியனற்ற குலம் எனக் காண்பி.

19. $G = \left\{1, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right\}, i^2 = -1$

என்றால்,

· வழக்கமான பெருக்கல் என்றால், $(G, \cdot)$ குலமெனக் காண்பி.

20. $G = \{ f_1, f_2, f_3, f_4 \}$ என்பதில் கோர்த்தல்கள் (சார்புகள்) f-க்கள் வரையறை.

$f_1(x) = x, \; f_2(x) = \frac{1}{x}, f_3(x) = -x, \; f_4(x) = -\frac{1}{x},$

$x \in \mathbf{R} - \{0\}$.

$*$: கோர்த்தல்களின் தொகுப்பு அல்லது சேர்க்கை என்றால் $(G, *)$ குலமென நிறுவுக.

21.

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	b	a
d	d	c	a	b

என்ற அட்டவணை குலத்தைக் குறிக்கிறது என்று காண்பி

22. எந்தச் சக்கரக் குலமும் அபீலியன் என்று காண்பி.

23. $+$: வழக்கமான கூட்டல்,

$(\mathbf{Z}, +)$: வழக்கமான கூட்டலின் கீழ் முழு எண்கள் குலம்,

$H = \{ 4k \mid k \in \mathbf{Z} \}$ என்றால்,

$(H \; +)$ என்பது $(\mathbf{Z}, +)$-ன் உட்குலம் என்று காண்பி.

$\mathbf{Z}$-ல் H-ன் வெவ்வேறு இடது துணைக்கணங்களை எழுதி, இவை $\mathbf{Z}$-ன் பிரிவினையை அமைக்கின்றன என்று நிறுவுக.

24. $(G, *)$ குலத்தில் கணம் H ஐ

$H = \{ a \in G \mid a^k = e,\ k \in \mathbf{Z}^+ \}$ என்றால்,

$(H, *)$ என்பது $(G, *)$-ன் உட்குலமா என்று ஆய்க.

25. சதுரத்தின் சமச்சீர்கள் குலத்தில், உட்குலம் $(\{ R_{360}, D_1 \}, *)$-ன் இடது துணைக் கணங்களை எழுது.

26. $(G, *)$ குலத்தின் ஓர் உட்குலம் $(H, *)$ என்க. $f(aH) = Ha^{-1}$ என்ற வரையறை உள்ள கோர்த்தல், G-ல் H-ன் எல்லா இடது துணைக் கணங்களிலிருந்து G-ல் H-ன் எல்லா வலது துணைக் கணங்களுக்குமான 1 : 1, முழுக்கோர்த்தல் என்று காண்பி.

27. $a, b \in$ குலம் $(G, .)$, $(H, .)$ என்பது $(G, .)$-ன் உட்குலம் என்றால் வலது துணைக் கணங்கள் Ha, Hb வெவ்வேறானவை $\Longleftrightarrow$ இடது துணைக் கணங்கள் $a^{-1}H$, $b^{-1}H$ வெவ்வேறானவை என நிறுவுக.

28. ஒரு குலத்தின் ஒவ்வோர் உறுப்பும் தன்னுடைய நேர்மாறே என்றால் அக்குலம் அபீலியன் என்று நிறுவுக.

29. ஒரு குலம் G-ன் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை இரட்டை என்றால், $a^2 = e$ என்றவாறு, $a \neq e$ என்ற உறுப்பு G-ல் இருக்கும் எனக் காண்பி.

30. ஒரு சதுரத்தின் இயக்கங்கள் ஒவ்வொன்றையும் அச் சதுரத்தின் உச்சிகளின் வரிசைமாற்றம் என்று கருதலாம். உதாரணமாக D_2 என்பது.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$ என்ற வரிசைமாற்றத்தைக் குறிக்கும்.

இம்மாதிரி, எண்சீர்க் குலத்தின் ஒவ்வோர் உறுப்பையும் வரிசை மாற்றத்தால் வரையறு. சமச்சீர்க் குலத்தின் அட்டவணையில் எவையேனும் 5 உறுப்புகளுக்கு, வரிசைமாற்றப் பெருக்கலால் சரி பார்.

2·12 குலங்களின் செயல் மாற்றுக் கோர்த்தல்களும் (Homomorphisms), இயல்முறை மாற்றுக் கோர்த்தல்களும் (Isomorphisms)

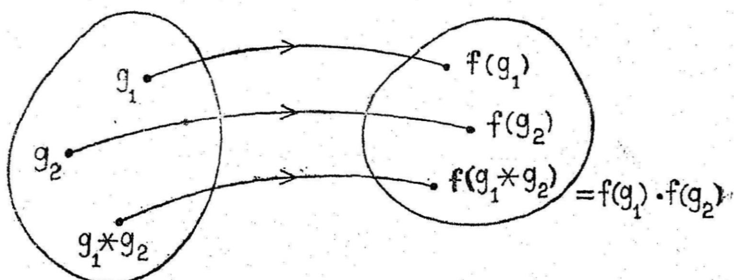
2·12·1. வரை இலக்கணம்

$(G, *)$, $(H, \cdot)$ என்பவை இரு குலங்கள் என்க.

G-லிருந்து H-க்கு உள்கோர்த்தல் $f: G \longrightarrow H$ என்பது.

$\forall\, g_1, g_2 \in G;\quad f(g_1 * g_2) = f(g_1) \cdot f(g_2)$ என்றால்,

$(G, *)$ லிருந்து $(H, \cdot)$-க்கு உள் செயல்மாற்றுக் கோர்த்தல் எனப்படும்.



படம் 57

$f(g_1 * g_2) = f(g_1) \cdot f(g_2)$ என்ற பண்பைத்தான், 'குலத்தின் ஈரிணைச் செயலை f போற்றுகிறது அல்லது காக்கிறது (preserves)' என்கிறோம். வரை இலக்கணத்தை ஆராய்வோம்.

$g_1, g_2 \in G$, $g_1 * g_2 \in G$ என்றால் $f(g_1), f(g_2), f(g_1 * g_2) \in H$. G-ல் g_1 ஐயும், g_2 ஐயும் இணைத்து, பின்னர் f ஐச் செயல்படுத்தினாலும் சரி, அல்லது, g_1 ஐயும் g_2 ஐயும் தனித்தனியே f ஆல் கோர்த்து, பின்னர் H-ல் $f(g_1)$ ஐயும் $f(g_2)$ ஐயும் இணைத்தாலும் சரி ; விளைவு ஒன்றே. இதுதான் f-ன் செயல் மாற்றுப் பண்பெனப்படுவது.

2·12·2. உதாரணங்கள்

1. $(G, .)$: பரிமாண வரிசை 8 உடைய சக்கரக் குலம்.

அதாவது $\{ g, g^2, \ldots\ldots, g^7, g^8 = e \}$, $\cdot$ 'பெருக்கல்'

$(H, +)$: முழுஎண்கள் கூட்டல், மட்டு 4, குலம்.

G -லிருந்து H-க்கு உள்கோர்த்தல் f ஐ

$f(e) = 0, \; f(g) = 1, \; f(g^2) = 2, \; f(g^3) = 3,$

$f(g^4) = 0, \; f(g^5) = 1, \; f(g^6) = 2, \; f(g^7) = 7$

என்றவாறு வரையறு.

இப்பொழுது f என்பது $(G, \cdot)$-லிருந்து $(H, +)$-க்கு உள் செயல் மாற்றுக் கோர்த்தல் ஆகும்.

$f(g^3 \cdot g^2) \qquad = f(g^5) = 1$

$f(g^3) + f(g^2) = 3 + 2 = 1$

$\therefore \; f(g^3 \cdot g^2) = f(g^3) + f(g^2)$

இதுபோல், நியாயமாக, எல்லா ஜோடிகளுக்கும் சரி பார்க்க வேண்டும்.

அதாவது $f(g^i \cdot g^j) = f(g^i) + f(g^j), \; \forall \; g^i, g^j \in G$ என்பது உண்மையா என்று சரி பார்க்க வேண்டும்.

$\therefore$ f என்பது செயல் மாற்றுக் கோர்த்தல்.

2. $(\mathbf{Z}, +)$ எல்லா முழு எண்கள் குலம், $+$: வழக்கமான கூட்டல்.

$(\mathbf{Z}_e, +)$ எல்லா இரட்டை முழு எண்கள் குலம். $+$: வழக்கமான கூட்டல்.

$\alpha : \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}_e$ என்பதை $\alpha(n) = 2n, \; \forall \; n \in \mathbf{Z}$ என்று வரையறை செய். $2n$ என்றால் n-ன் இரு மடங்கு என்பது பொருள்.

இப்பொழுது, $i, j \in \mathbf{Z}, \quad \alpha(i + j) = 2(i + j)$

$$= 2i + 2j$$

$$= \alpha(i) + \alpha(j)$$

$\therefore$ α ஆனது செயல் மாற்றுக் கோர்த்தல்.

3. $+$: வழக்கமான கூட்டல்,

$\cdot$: வழக்கமான பெருக்கல்,

$(\mathbf{R}, +)$: மெய் எண்கள் கூட்டல் குலம்,

$(\mathbf{R} - \{0\}\ \cdot)$: 0 நீங்கலாக மெய்யெண்கள் பெருக்கல் குலம்.

$\forall\ n \in \mathbf{R},\ f(n) = 2^n$ என்று f கோர்த்தலை வரையறு.

$\forall\ m, n \in \mathbf{R},\ f(m+n) = 2^{m+n} = 2^m \cdot 2^n$

$= f(m) \cdot f(n)$

∴ $\measuredangle$ என்பது செயல்மாற்றுக் கோர்த்தல்.

2·12·3. வரை இலக்கணங்கள்

$(G, *)$, $(H, \cdot)$ என்பவை குலங்கள் என்க.

$f: G \rightarrow H$ செயல் மாற்றுக் கோர்த்தல் என்க.

1. $I_m(f) = \{ h \in H \mid f(g) = h,\ g \in G \}$ என்பது f-ன் கீழ் எதிர் உருக்கணம் எனப்படும்.

$I_m(f)$ஐ, $f(G)$ என்று குறிப்போரும் உண்டு.

2. $Ker(f) = \{ g \in G \mid f(g) = \bar{e} \}$, $\bar{e}$: H-ன் முற்றொருமை என்பது 'f-ன் உட்கரு'.

2·12·4. தேற்றம்

e என்பது $(G, *)$-ன் முற்றொருமை என்றும், $\bar{e}$ என்பது $(H, \cdot)$-ன் முற்றொருமை என்றும், $f: G \rightarrow H$ என்பது செயல் மாற்றுக் கோர்த்தல் என்றும் கொண்டால்,

(அ) $f(e) = \bar{e}$

(ஆ) $\forall\ g \in G,\ f(g^{-1}) = (f(g))^{-1}$

(இ) $Ker(f)$ என்பது $(G, *)$-ன் ஓர் உட்குலம்.

(உ) $f(G)$ என்பது $(H, \cdot)$-ன் ஓர் உட்குலம்.

நிறுவல்

(அ) $g \in G$ என்க.

$g = g * e$

f, செயல் மாற்றுக் கோர்த்தல் ஆகையால்,

$f(g) = f(g * e) = f(g) \cdot f(e)$

H-ல் முற்றொருமை உறுப்பு ē என்பதால்

$f(g) = f(g) \cdot \bar{e}$

$\therefore \quad f(g) \cdot \bar{e} = f(g) \cdot f(e)$

அடித்தல் விதியின்படி, $\bar{e} = f(e)$.

(ஆ) $g \in G$ என்க.

f-ன் கீழ் g^{-1}-ன் எதிர் உருவானது $f(g)$-ன் நேர்மாறு என நிறுவ வேண்டும்.

நிறுவல்

$e = g^{-1} * g = g * g^{-1} \qquad (\because \ (G, *)$ குலம்)

f செயல் மாற்றுக் கோர்த்தலாகையால் 2·12·3 (1)-ன் படி,

$$\bar{e} = f(e) = f(g^{-1} * g) = f(g^{-1}) \cdot f(g)$$
$$\bar{e} = f(e) = f(g * g^{-1}) = f(g) \cdot f(g^{-1})$$

$\therefore \quad \bar{e} = f(g^{-1}) \cdot f(g) = f(g) \cdot f(g^{-1})$

$\therefore \quad f(g^{-1})$ என்பது H-ல் $f(g)$-ன் நேர்மாறு.

$\therefore \quad f(g^{-1}) = (f(g))^{-1}$

(இ) $g_1, g_2 \in G$ என்க.

$Ker(f)$-ன் வ. இ. படி, $f(g_1) = e, \ f(g_2) = \bar{e}$

$\therefore \quad f(g_1 * g_2^{-1}) = f(g_1) \cdot f(g_2^{-1}) = \bar{e}. \quad (f(g_2))^{-1}$

$$= (f(g_2))^{-1} = (\bar{e})^{-1} = \bar{e}$$

$Ker\, f$-ன் படி, $g_1 * g_2^{-1} \in Ker\, f$.

தேற்றம் 2·9·5-ன்படி, $Ker\ f$ என்பது $(G, *)$-ன் உட்குலமாயிற்று.

(ஈ) $f(G) = \{ h \in H \mid f(g) = h, \quad g \in G \}$

$h_1, h_2 \in f(G)$ என்றால், $h_1 = f(g_1)$, $h_2 = f(g_2)$ என்றவாறு g_1, g_2 உறுப்புகள் G-ல் உள்ளன.

அதாவது, $h_1 \cdot h_2^{-1} = f(g_1)\ f(g_2)^{-1} = f(g_1) \cdot f(g_2^{-1})$

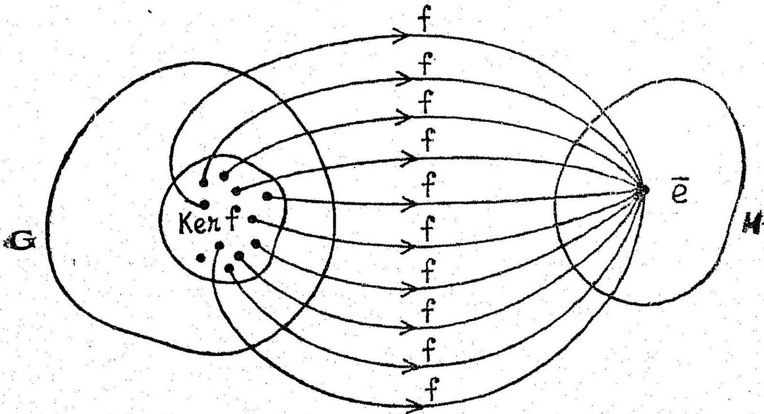
$$= f(g_1 * g_2^{-1}),$$

$$g_1 * g_2^{-1} \in G$$

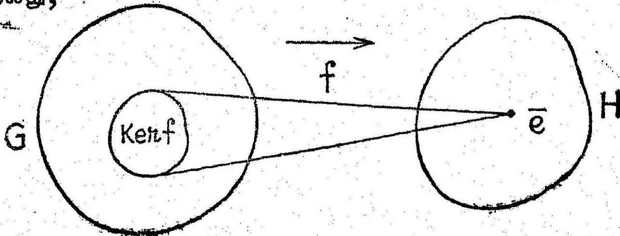
$\therefore \quad h_1 \cdot h_2^{-1} \in f(G)$

$\therefore$ தேற்றம் 2·9·5-ன் படி $(f(g), \cdot)$, என்பது $(H, \cdot)$-ன் உட்குலமாயிற்று.

கவனிக்க :



அல்லது,



படம் 58.

$Ker(f)$-ல்இருந்து $\{ \bar{e} \}$-க்கு f என்பது முழுக் கோர்த்தலாகும்.

மேற்கண்ட தேற்றத்தின்படி $f(e) = \bar{e}$ என்பதால், $e \in Ker(f)$.

∴ $Ker(f)$ என்பது $(G, *)$-ன் வெற்றற்ற உட்கணம் ஆகும்.

அதாவது, $Ker(f) \subset G$.

$Ker(f) = G$ என்றவாறும் இருக்கலாம். எப்படி?

இதற்கு இதோ ஓர் உதாரணம் :

$(G, *)$, $(H, \cdot)$ என்பவை எவையேனும் இருகுலங்கள் என்க

$e, \bar{e}$ என்பவை முறையே $(G, *)$, $(H, \cdot)$-ன் முற்றொருமை உறுப்புகள் என்க.

$\forall\ g \in G,\ f(g) = \bar{e}$ என்றவாறு $f: G \rightarrow H$ என்ற கோர்த்தலை வரையறை.

அப்படியானால், $f(g_1 * g_2) = \bar{e}\quad (\because g_1 * g_2 \in G)$

$= \bar{e} \cdot \bar{e}$

$= f(g_1) \cdot f(g_2)$

∴ f என்பது செயல்மாற்றுக் கோர்த்தல் ஆகும்.

$\forall\ g \in G,\ f(g) = \bar{e}$ என்பதால் $Ker(f) = H$.

2.12.5. தேற்றம்

$(G, *)$, $(H, \cdot)$ என்பவை குலங்கள் என்க.

$f: (G, *) \rightarrow (H, \cdot)$ செயல்மாற்றுக் கோர்த்தல் என்றால்,

f ஒரு $(1-1)$ கோர்த்தல் $\Longleftrightarrow Ker(f) = \{e\}$, e என்பது $(G, *)$-ன் முற்றொருமை.

நிறுவல்

பாகம் 1. $\Longrightarrow$

தற்கோள் :

f, $(1-1)$ என்க. $\bar{e}$ என்பது $(H, \cdot)$-ன் முற்றொருமை என்க.

$f(e) = \bar{e}$ என்பதால், $e \in Ker(f)$

நிறுவ :

$Ker(f)$ என்பது G-ல், $\bar{e}$-ன் மெய்யுருக்கள் கணம் என்பதாலும், f என்பது $(1-1)$ என்பதால், $\bar{e}$-ன் மெய்யுரு $Ker(f)$-ல் ஒரே ஓர் உறுப்புத்தான் என்று நிறுவ வேண்டும். அதாவது $Ker(f) = \{ e \}$ என்று நிறுவவேண்டும்.

முடியுமானால், $g \in Ker(f)$, $g \neq e$ என்க.

அப்படியானால், $f(g) = \bar{e} = f(e)$

$\therefore \ f(g) = f(e)$. ஆனால் $g \neq e$.

$\therefore \ f$ என்பது $(1-1)$ கோர்த்தல் அல்ல.

இது ஓர் எதிர் மறுப்பு.

$\therefore \ f$ என்பது $(1-1)$ கோர்த்தல் $\Longrightarrow Ker\, f = \{ e \}$.

நிறுவல்

பாகம் 2. $\Longleftarrow$

தற்கோள் :

$Ker(f) = \{ e \}$ என்க.

$g_1, g_2 \in G$, $f(g_1) = f(g_2)$ என்க.

f, $(1-1)$ என நிறுவ, $g_1 = g_2$ என்று காண்பித்தால் போதும்.

$$f(g_1 * g_2^{-1}) = f(g_1) \cdot f(g_2^{-1}) = f(g_1) \cdot f(g_2)^{-1}$$

$$= f(g_1) \cdot f(g_1)^{-1} \quad \because f(g_1) = f(g_2)$$

$$= \bar{e}$$

$\therefore \ g_1 * g_2^{-1} \in Ker(f)$

ஆனால் $Ker(f) = \{ e \}$

$\therefore \ g_1 * g_2^{-1} = e$

$\Longrightarrow g_1 = g_2$.

2·12·6. வரை இலக்கணம்

$(G, *)$, $(H, \cdot)$ என்பவை குலங்கள் என்க.

$f: G - H$ ஆனது (i) செயல் மாற்றுக் கோர்த்தல்

(ii) $(1 - 1)$ கோர்த்தல்

(iii) முழுக் கோர்த்தல் என்ற இலக்கணங்களைக் கொண்டிருந்தால், f ஐ இயல்முறை மாற்றுக் கோர்த்தல் (Isomorphism) என்போம். இந்த இயல்புடைய குலங்களை இயல்முறை மாருக் குலங்கள் (Isomorphic groups) என்போம்.

$(G, *)$-ம், $(H, \cdot)$-ம் இயல்முறை மாருக் குலங்கள் என்பதை

$(G, *) \simeq (H, \cdot)$ என்ற குறியீட்டால் வழங்குவோம்.

$(G, *) \sim (H, \cdot)$ என்பதால், இவ்விரு குலங்களுக்கிடையே $(1 - 1)$, முழுக்கோர்த்தல் f உண்டென்பதை அறிகிறோம். மேலும் இக் கோர்த்தல் f ஆனது இவ்விரு குலங்களின் ஈரிணைச் செயல்களையும் போற்றுகிறது.

$\therefore$ $(G, *)$-ல் $*$ ஐப் பொறுத்து விளக்கப்படும் எந்தப் பண்பும் f ஆல் போற்றப்படுவதால், அப்பண்பு $(H, \cdot)$-ன் பண்புமாகும்.

ஆதலால், அடிப்படையில் $(G, *)$-ம் $(H, \cdot)$-ம் ஒரே குலமே. இக்குலங்களின் உறுப்புகளும், ஈரிணைச் செயலிகளும் வெவ்வேறு குறியீடுகளாயிருப்பினும், இக்குலங்களின் அமைப்பு முற்றிலும் ஒன்றே.

இயல்முறை மாற்றுக் கோர்த்தலாவது அடிப்படையில் செயல் மாற்றுக் கோர்த்தலுக்கான தேற்றங்கள் இயல் முறை மாற்றுக் கோர்த்தல்களுக்கும் பொருந்துவன.

முக்கியக் குறிப்பு

$(G, *)$, $(H, \cdot)$ குலங்கள் இயல்மாருக் குலங்கள் என நிறுவக் கீழ்க் கண்டவாறு செய்.

முதலாவதாக, $\forall g \in G$, $f: G \in H$ ஐ வரையறு.

இரண்டாவதாக, f ஆனது $(1 - 1)$ எனக் காண்பி.

மூன்றாவதாக, f ஆனது முழுக்கோர்த்தல் என்று நிறுவு.

நான்காவதாக, $\forall g_1, g_2 \in G, \quad f(g_1 * g_2) = f(g_1) \cdot f(g_2)$ என்று நிறுவு.

2·12·7. உதாரணங்கள் :

1. $(G; *)$: $(Z_4, +_4)$

$(H \cdot)$: $(\{1, -1, i, -i\})$ என்பதில் . என்பது வழக்கமான பெருக்கல்.

$(G, *)$-ம், $(H, \cdot)$-ம் இயல்முறை மாறுக் குலங்களெனக் காண்பி.

G

$+_4$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

H

$\cdot$	1	-1	i	$-i$
1	1	-1	i	$-i$
-1	-1	1	$-i$	i
i	i	$-i$	-1	1
$-i$	$-i$	i	1	-1

$f : G \to H$ என்பதை,

$f(0) = 1, \quad f(1) = -i, \quad f(2) = -1, \quad f(3) = i$ என்று வரையறு.

G-ன் வெவ்வேறு உறுப்புகளுக்கு H-ல் f-ன் கீழ் வெவ்வேறு எதிர் உருக்கள் உள்ளன. $\therefore\ f, (1-1)$.

H-ன் உறுப்புகள் எல்லாமே எதிர் உருக்கள்.

$\therefore\ f$, முழு.

$$f(3 +_4 2) = f(1) = -i$$

ஆனால் $f(3) \cdot f(2) = i \cdot (-1) = -i$

$$\therefore \quad f(3 +_4 2) = f(3) \cdot f(2)$$

இதுபோல் மற்ற எல்லா ஜோடி உறுப்புகளுக்கும் சரி பார்க்கலாம்.

∴ f, செயல் மாற்றுக் கோர்த்தல்.

∴ f ஆனது இயல்முறை மாற்றுக் கோர்த்தல்.

∴ $(G, *)$-ம், $(H, \cdot)$-ம் இயல்முறை மாறுக் குலங்கள்.

2. $p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$

$$r = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad s = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

என்ற 2×2 அணிகளை உறுப்புகளாகக் கொண்ட கணத்தை G என்போம். அணிகள் பெருக்கல் $*$, G-ல் ஈரிணைச் செயலி யாகும் என்பதை விளக்கும் அட்டவணை,

$*$	p	q	r	s
p	p	q	r	s
q	q	p	s	r
r	r	s	p	q
s	s	r	q	p

$(G, *)$ என்பது குலம் (இங்கே நிறுவுக!), $(G, *)$-ன் முற்றொருமை p. ஏற்கெனவே 'க்ளைன் நாற்குலம்' $(V, \cdot)$ ஐப் படித்திருக்கிறோம். $(V, \cdot)$-ன் அட்டவணையாவது

$\cdot$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

$f: G \to V$ ஐ $f(p) = e, f(q) = a, f(r) = b, f(s) = c$ என்றவாறு வரையறு.

$$\begin{matrix} p & q & r & s \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ e & a & b & c \end{matrix}$$

இது f-ன் கீழமைந்த ஒன்றுக்கொன்றான ஒத்தியைபு.

f ஆனது (1 – 1) முழுக் கோர்த்தல்.

உதாரணமாக,

$$f(q * r) = f(s) = c$$

$$f(q) = a, \quad f(r) = b$$

$$f(q) \cdot f(r) = a \cdot b = c$$

$$\therefore \; f(q * r) = f(q) \cdot f(r)$$

இது போல், $f(g_1 * g_2) = f(g_1) \cdot f(g_2) \; \forall \; g_1, g_2 \in G$

$\therefore$ $(G, *), (V, \cdot)$ என்பவை இயல் முறை மாறாக் குலங்கள்.

3. $(Z, +)$: முழு எண்களின் வழக்கமான கூட்டல் குலம் (Additive group of integers)

$(Z_e, +)$: இரட்டை முழு எண்களின் வழக்கமான கூட்டல் குலம் (Additive group of even integers).

$(Z, +) \simeq (Z_e, +)$ எப்படி?

$f: Z \to Z_e$ என்பதை $a \longmapsto 2a, \forall a \in Z$ என்றவாறு வரையறு.

$\therefore$ $2a \in Z_e$

$x \in Z, f(x) = 2x$ என்பதால், Z-ன் ஒவ்வோர் உறுப்புக்கும் f-ன் கீழ் Z_e-ல் ஓர் உறுப்பு உண்டு. $\therefore$ f என்பது முழுக் கோர்த்தல்.

$$a \neq b \Longrightarrow 2a \neq 2b$$

$$\Longrightarrow f(a) \neq f(b)$$

$\therefore$ f, (1–1)

$f(a+b) = 2(a+b) = 2a + 2b = f(a) + f(b)$,
$\forall\, a, b \in \mathbf{Z}$

$\therefore\ f:\ \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}_e$ ஆனது செயல் மாற்ருக் கோர்த்தல்.

$\therefore\ f$ என்பது இயல் முறை மாற்ருக் கோர்த்தல்.

$\therefore\ (\mathbf{Z}, +)$-ம், $(\mathbf{Z}, +)$-ம் இயல் முறை மாருக் குலங்கள் .

3. $G = \left\{ x, -x, \frac{1}{x}, -\frac{1}{x} \right\}$,. சார்புகளின் சேர்க்கை,.

$H = \{ R_0, R_2, X, Y \}$, அதாவது, சதுரத்தின் சமச்சீர் இயக்கங்கள், $*$, H-ன் மீது ஈரிணைச் செயலி (வழக்கமான)

$J = \{1, 5, 7, 11\}$, $\cdot_{12}$ பெருக்கல், மட்டு 12

$(G, \cdot)$, $(H, *)$, $(J, \cdot_{12})$ என்பவை குலங்கள் (நிறுவுக!).

$\cdot$	x	$-x$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x}$
x	x	$-x$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x}$
$-x$	$-x$	x	$-\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x}$
$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x}$	x	$-x$
$-\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x}$	$-x$	x

$\cdot_{12}$	1	5	7	11
1	1	5	7	11
5	5	1	11	7
7	7	11	1	5
11	11	7	5	1

$*$	R_0	R_2	X	Y
R_0	R_0	R_2	X	Y
R_2	R_2	R_0	Y	X
X	X	Y	R_0	R_2
Y	Y	X	R_2	R_0

இம்மூன்று செயலிகளைப் போற்றும் ஒன்றுக் கொன்ருன ஒத்தியைபுகள்

$$\begin{array}{cccc} x & -x & \frac{1}{x} & -\frac{1}{x} \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ R_0 & R_2 & X & Y \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 1 & 5 & 2 & 11 \end{array}$$

இந்த மூன்று குலங்களும், அதாவது, $(G,\cdot)$, $(J, \cdot_{12})$, $(H, *)$ இயல் மாறுக் குலங்கள். இவை எல்லாம்

$\oplus$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

என்ற பொது அமைப்பை உடையன.

4. $(G, \cdot)$ குலம் G : நேர் மெய் எண்கள்; $\cdot$ வழக்கமான பெருக்கல்,

$(G', +)$ குலம் G': எல்லா மெய் எண்கள். $+$ வழக்கமான கூட்டல்,

$G \simeq G'$ என்று நிறுவுக.

$f : G \to G'$ என்பதை $f(a) = \log a \quad \forall\, a \in G$ என்று வரையறு. மடக்கைகளின் அடி நிலையான எண்ணாக இருக்கவேண்டும். உதாரணமாக, e ஐ அடியாகவுள்ள இயற்கை மடக்கைகளை (natural logarithms) எடுத்துக் கொள்ளலாம். ஒவ்வொரு நேர் மெய்யெண்ணுக்கும் ஒரே ஒரு மடக்கை தான் உண்டு. ஒவ்வொரு மெய்யெண்ணுக்கும் ஒரே ஒரு எதிர் மடக்கை (antilogarithm) தான் உண்டு.

$a \in G \neq b \in G \Longrightarrow \log a \in G' \neq \log b \in G'$.

$\therefore\ f$, $(1-1)$ கோர்த்தல்.

யாதாவதொரு $x \in G'$, $x = \log e^x = f(e^x)$, $e^x \in G$

$\therefore\ f$, முழுக் கோர்த்தல்

$a, b \in G, f(a \cdot b) = \log(a \cdot b) = \log a + \log b = f(a) + f(b)$

$\therefore\ f$, செயல் மாற்றுக் கோர்த்தல்,

∴ f, இயல் மாற்றுக் கோர்த்தல்.

∴ G-ம் , G'-'ம் இயல் மாருக் குலங்கள்.

5. $G = \{1, -1, i, -i\}$, · வழக்கமான பெருக்கல்

$G' = \{e, a, b, c\}$, இதன் செயலி $*$-ன் வரையறை

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

$(G, \cdot)$-ம், $(G', *)$-ம் குலங்கள் (நிறுவுக!)

$(G, \cdot)$-ன் முற்றொருமை உறுப்பு $e = 1$

$(G', *)$ ன் முற்றொருமை உறுப்பு $\bar{e} = e$

$f : G \to G'$-ன் கீழ் $f(1) = e$ என்க.

அப்படியானால், $f(i) = a$, அல்லது, $f(i) = b$, அல்லது $f(i) = e$ என்றாவது இருக்க வேண்டும்.

$f(i) = a$ என்றால், $f(i^{-1}) = a^{-1}$; தேற்றம் 2.12.4 (ஆ)

அதாவது $f(-i) = a$ ஆனால் இது $f(i) = a$ என்ற தற்கோளின் எதிர் மறுப்பு; ஏனெனில் அப்போது $f(1 - 1)$ ஆகாது. ∴ $f(i) \neq a$; $f(i) = b$ என்றால், $f(i^{-1}) = b^{-1}$

∴ $f(-i) = b$. இதுவும் எதிர்மறுப்பு. ∴ $f(i) \neq b$. இதே போல் $f(-i) \neq c$

$(G, \cdot)$-ம், $(G', *)$-ம் இயல் மாருக் குலங்கள் அல்ல.

குறியீட்டு முறையில், $G \not\simeq G'$

6. $G = \{1, -1\}$, $\cdot$ வழக்கமான பெருக்கல் $\therefore (G, \cdot)$ குலம் (நிறுவுக.)

$(Z_2, +_2)$ குலம்.

G

$\cdot$	1	−1
1	1	−1
1	−1	1

Z_2

$+_2$	0	1
0	0	1
1	1	0

$f: G \to Z_2$ என்பதை $f(1) = 0$, $f(-1) = 1$ என்று வரையறு. f, 1 : 1, முழுக் கோர்த்தல்.

மேலும் $f(1 \cdot 1) = f(1) = 0 = 0 + 0 = f(1) + f(1)$

$$f(1 \cdot -1) = f(-1) = 0 + 1 = f(1) + f(-1)$$

$$f(-1 \cdot 1) = f(-1) = 1 = 1 + 0 = f(-1) + f(1)$$

$$f(-1 \cdot -1) = f(1) = 0 = 1 + 1 = f(-1) + f(-1)$$

$\therefore$ f, செயல்மாற்றுக் கோர்த்தல்.

$\therefore$ f, இயல்முறை மாற்றுக் கோர்த்தல்.

$\therefore$ $G \simeq G'$

இந்த உதாரணத்தில் G-ல் உள்ள 1 ஐயும் G'-ல் உள்ள 1 ஐயும் குழப்பிக் கொள்ளாமல் இருக்க, Z_2 ஐ $\{C_0, C_1\}$ என்றும் எழுதலாம். அப்பொழுது $(Z_2 \ +_2)$-ன் அட்டவணையாவது ;

$+_2$	C_0	C_1
C_0	C_0	C_1
C_1	C_1	C_0

2·12·8. அழகிய தேற்றம்

ஒவ்வொரு சக்கரக் குலமும் முழு எண்களின் கூட்டல் குலம் அல்லது முழு எண்கள் கூட்டல் குலம் மட்டு n-க்கு இயல்முறை மாருத வகையில் அமைந்துள்ளது.

குறியீட்டு முறையில்,

G: யாதேனுமொரு சக்கரக் குலம் என்ருல்

$G \simeq \mathbf{Z}_n$ அல்லது $G \simeq \mathbf{Z}$

நிறுவல்

பாகம் 1.

$(G, \cdot)$ என்ற சக்கரக் குலத்தின் பரிமாண வரிசை n என்றும், அதன் பிறப்பாக்கி g என்றும் கொள்க.

$f: G \rightarrow \mathbf{Z}_n$ கோர்த்தலை $f(a^m) = m, \ 0 \leqq m < n$ என்று வரையறு. $(G, \cdot)$-ன் முற்றொருமை $e = a^\circ$ என்ருல், $f(e) = 0$.

$f(a^m) = f(a^k) \Longrightarrow$

$f(a^m) = f(a^k) \Longrightarrow m = k. \quad \therefore \quad a^m = a^k$

$\therefore \quad f$, $(1 - 1)$ கோர்த்தல்

யாதாவதொரு $m \in \mathbf{Z}_n$ -க்கு, $g^m \in G$ உண்டு.

$\therefore \quad f$ முழுக் கோர்த்தல்

$\therefore \quad f$ என்பது $(1 - 1)$, முழுக் கோர்த்தல்.

g^i, g^j என்பவை G-ன் எவையேனுமிரு உறுப்புகள் என்க.

$\therefore \quad f(g^i g^j) = f(g^{i+j})$

வகுத்தல் கணக்கின்படி, $i + j = qn + r$ என்றவாறு ஒரே முறை முழு எண்கள் q-ம், r-ம், $0 \leqq r < n$ என்றவாறு இருக்கின்றன.

$\therefore \quad g^{i+j} = g^{qn+r} = (g^n)^q\, g^r = e^q\, g^r$; ஏனெனில் (G, ·) சக்கரக் குலத்தில் $g^n = e$.

$= g^r$.

$f(g^i g^j) = f(g^r) = r$

Z_n-ல் $i +_n j$ என்றால் i ஐயும் j ஐயும் வழக்கமாகக் கூட்டி, n ஆல் வகுத்து வரும் மீதியாகும்.

ஆனால் $i + j = qn + r$ என்பதால், இந்த மீதி r ஆகும்.

$\therefore \quad i +_n j = r$

$\therefore \quad f(g^i g^j) = i +_n j = f(g^i) +_n f(g^j)$

$\therefore$ f ஒரு செயல் மாற்றுக் கோர்த்தல்

$\therefore$ முடிவில் f ஓர் இயல்முறை மாற்றுக் கோர்த்தலாகும்.

$\therefore \quad G \underset{-}{\sim} Z_n$

பாகம் 2.

h ஐப் பிறப்பாக்கியாகக் கொண்ட முடிவில்லாத சக்கரக் குலம் H என்க.

$\therefore \quad H = \{ h^k \mid k \in Z \}$

$f: Z \to H$ ஐ $f(k) = h^k, \ \forall\, k \in Z$ என்க.

ஒவ்வொரு முழு எண் k-க்கும் ஏற்ப ஒரே ஒரு உறுப்பு $h^k \in H$ என்பதால் f என்பது கோர்த்தல்.

H ன் ஒவ்வோர் உறுப்பும் h-ன் முழு அடுக்கு என்பதாலும், அந்த அடுக்கு Z-ல் உள்ளது என்பதாலும் (H-ன் வரையறையைப் பார்), f ஆனது முழுக் கோர்த்தல்.

$h^i = h^j, \quad i < j, \quad i, j \in Z$ என்க.

$h^{j-i} = h^0 = e$

$j - i = m$ என்க.

வகுத்தல் கணக்கின்படி எந்த முழு எண் k-க்கும், $k = q^{m+r}$, $0 \leqq r < m$ என்றவாறு முழு எண்கள் q-ம் r-ம்இருக்கின்றன.

$\therefore \quad h^k = h^{qm+r} = (h^m)^q \, h^r = h^r$. ($H$ சக்கரக் குலமாதலால் $h^m = e$)

$\therefore$ H-ன் ஒவ்வோர் உறுப்பும் $\{h^0, \; h^1, \ldots, h^{m-1}\}$ என்ற முடிவுள்ள கணத்தில் இருக்கும். இது, ‘H, முடிவில்லாத கணம்’ என்பதன் எதிர்மறுப்பு.

$\therefore \quad i \neq j \Longrightarrow h^i \neq h^j$

$\therefore \quad f$, (1 — 1) கோர்த்தல்

s-ம், t-ம் எவையேனுமிரு முழு எண்கள் என்றால்

$f(s+t) = h^{s+t} = h^s \, h^t = f(s) \, f(t)$.

$\therefore \quad f$, செயல்மாற்றுக் கோர்த்தல்.

$\therefore \quad f$, இயல்முறை மாற்றுக் கோர்த்தல். $\therefore \; H \simeq \mathbf{Z}$.

உதாரணம்

$(\mathbf{Z}_3, +_3)$-ம், 3 பரிமாண வரிசையுள்ள சக்கரக் குலமும் இயல் மாறுக் கோர்த்தல்கள் ஆகும்.

3. கண வளையங்கள்

(RINGS)

இதுவரை குலங்கள் போன்ற கணித முறைகள் ஒவ்வொன்றும் ஏதாவது ஓர் ஈரிணைச் செயலியுடன் இயைந்திருப்பதைக் கண்டோம். அதாவது, உதாரணமாக ஒரு குலத்தில் ஓர் ஈரிணைச் செயலியுடன் கூடவே மற்றோர் ஈரிணைச் செயலி இயங்குவதாகக் காணவில்லை. ஒரு கணித முறையில் இரு ஈரிணைச் செயலிகள் ஒரே சமயத்தில் இயங்கலாம். அம்மாதிரி கணித முறைகளில் கண வளையமும் ஒன்று.

3·1.

3·1·1. வரை இலக்கணம்

கண வளையம்

R என்ற வெற்றற்ற கணத்தின் மீது வரையறுக்கப்பட்ட 'கூட்டல்' $+$, 'பெருக்கல்' $\cdot$ என்ற இரு ஈரிணைச் செயலிகள்,

$(R1)$ $a+b \in R, \forall\, a, b \in R$ (கூட்டலின் அடைப்பு விதி),

$(R2)$ $(a+b)+c = a+(b+c), \forall\, a, b, c \in R$ (கூட்டலின் சேர்ப்பு விதி),

$(R3)$ $\forall\, a \in R, 0+a=a$ என்றவாறு 0 என்ற உறுப்பு R-ல் இருக்க வேண்டும் (கூட்டலின் முற்றொருமை உண்டு),

$(R4)$ $\forall\, a \in R, a+x=0$ என்றவாறு x என்ற உறுப்பு R-ல் உள்ளது. (கூட்டலின் நேர்மாறுகள் உண்டு),

$(R5)$ $a+b=b+a, \forall\, a, b \in R$ (கூட்டலின் பரிமாற்று விதி),

(R6) $a \cdot b \in R, \forall a,b \in R$ (பெருக்கலின் அடைப்பு விதி),

(R7) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \forall a, b, c \in R$. (பெருக்கலின் சேர்ப்பு விதி),

(R8) $\forall a, b, c \in R$

$$\left.\begin{aligned} a \cdot (b + c) &= (a \cdot b) + a \cdot c \\ (a + b) \cdot c &= (a \cdot c) + (b \cdot c) \end{aligned}\right\}$$ கூட்டல் மீது பெருக்கலின் இடது, வலது பங்கீட்டு விதிகள்

என்ற நிபந்தனைகளுக்குக் கட்டுப்பட்டால் **R** ஐக் கண வளையம் என்போம்.

இந்தக் கணித முறையை $(R, +, \cdot)$ என்றும் எழுதலாம். மேற் கண்ட வரை இலக்கணத்தில் $+$-ம், $\cdot$-ம் வழக்கமான கூட்டலும் வழக்கமான, பெருக்கலுமாகத்தான் இருக்க வேண்டும் என்பதில்லை.

$+, \cdot$-க்குப் பதிலாக $*, \cdot, \otimes$ முதலிய பல்வேறு குறியீடு களையும் பயன்படுத்தலாம்.

கவனிக்க :

$R1$ முதல் $R5$ அடங்கலாக உள்ள 5 நிபந்தனைகளால் $(R, +)$ ஓர் அபீலியன் குலம் என்றாகிறது. இதனால் மேற்கண்ட வரை இலக்கணத்தைக் கீழ்க்காணுமாறும் எழுதலாம்.

3·1·2. மாற்று வரை இலக்கணம்

R என்ற வெற்றற்ற கணத்தின் வரையறுக்கப்பட்ட $+, \cdot$ என்ற இரு ஈரிணைச் செயலிகள்,

1. $(R, +)$ அபீலியன் குலம்.

2. R-ல் $\cdot$ சேர்ப்பு விதியுடையது.

3. $+$-ன் மீது $\cdot$ -க்கு இடது, வலது பங்கீட்டு விதிகள் உண்டு.

$(R, +)$ ஒரு குலமாதலால் $(R, +)$-ன் முற்றொருமை ஒரே ஓர் உறுப்புத்தான். அதை 0 என்று குறித்தோம். இந்த 0 ஐ 'கண வளையத்தின்' 'பூச்சியம்' (Zero) என்போம்.

$(R, +)$-ல் a-ன் நேர்மாற்றை $-a$ என்று குறித்து, a-ன் 'எதிர்' (negative) என வழங்குவோம்.

3·1·3. வரை இலக்கணம்

$(R, +, \cdot)$ கண வளையத்தில் $\cdot$-க்கு முற்றொருமையுண்டானால் இந்த $(R, +, \cdot)$ ஐ 'ஒருமையுள்ள கண வளையம்' (Ring with unity) என்போம்.

3·1·4. வரை இலக்கணம்

$(R, +, \cdot)$ கண வளையத்தில் $\cdot$-க்குப் பரிமாற்றுப் பண்பு உண்டானால் $(R, +, \cdot)$ ஐப் 'பரிமாற்றுக் கண வளையம்' (Commutative ring) என்போம்.

கவனிக்க : 1. $R5$-ன் படி ஒரு கண வளையத்தில் $+$-க்குப் பரிமாற்றுப் பண்பு இருப்பது அத்தியாவசியம். ஆனால் பெருக்கலின் பரிமாற்றுப் பண்பு அவசியமில்லை. ஆகையால், ஒரு கண வளையம் 'பரிமாற்றுக் கண வளையம்' என்று சொன்னால், அந்தக் கண வளையத்தில் பெருக்கலுக்குப் 'பரிமாற்றுப் பண்பு உண்டு என்பது பொருள்.' பெருக்கலுக்குப் பரிமாற்றுப் பண்பு இல்லையானால் அந்தக் கண வளையத்தை 'பரிமாற்றம் அற்ற கண வளையம்' என்று சொல்லுவோம்.

2. $R3$-ன் படி $+$-க்குக் கட்டாயம் முற்றொருமை இருக்க வேண்டும் ; பெருக்கலுக்கு அவசியமில்லை. ஆகையால் 'ஒருமையுள்ள கண வளையம்' என்றாலே பெருக்கலுக்கு முற்றொருமை உண்டு என்பது பொருள்.

3. $R4$-ன் படி கண வளையத்தில் கூட்டலின் நேர்மாறுகள் அந்தக் கணவளையத்தில் இருக்க வேண்டுவது அவசியம்; ஆனால் பெருக்கலின் நேர்மாறுகள் அந்தக் கண வளையத்தில் இருக்க வேண்டிய கட்டாயம் இல்லை.

4. $a \cdot b$ என்பதை $\cdot$ இல்லாமலேயே ab என்று எழுதுவது வழக்கம்.

3·1·5. உதாரணங்கள்

1. $(Z, +, \cdot)$ என்பது ஒருமையுடைய பரிமாற்றுக் கண வளையம்,

Z : எல்லா முழு எண்கள் கணம்,

$+$: வழக்கமான கூட்டல்,

$\cdot$: வழக்கமான பெருக்கல் என்ருல்

$(Z, +, \cdot)$ என்பது ஒருமையுடைய பரிமாற்றுக் கண வளையம்.

நிறுவல்

(*R*1) இரு முழு எண்களை வழக்கமாகக் கூட்டக் கிடைப்பதும் முழு எண்ணே.

$\therefore$ $+$ ஆல் Z அடைக்கப்பட்டது.

(*R*3) எவையேனும் மூன்று முழு எண்களை வழக்கமாக எப்படிக் கூட்டினாலும், ஒரே கூட்டுத் தொகை கிடைக்கும்.

$\therefore$ Z-ல் $+$-க்குப் சேர்ப்புப் பண்பு உண்டு.

(*R*3) $0 \in Z$ உடன் எந்த முழு எண்ணைக் கூட்டினாலும் கிடைப்பது அதே முழு எண்தான்.

$\forall\, a \in Z, 0 + a = a$

$\therefore$ Z-ல் $+$-க்கு 0 முற்றொருமை ஆகும்.

(*R*4) $\forall\, a \in Z, (-a) + a = 0$ என்பதால் எந்த முழு எண் a-க்கும் $-a$ என்ற கூட்டல் நேர்மாறு Z-ல் உண்டு.

(*R*5) $\forall\, a, b \in Z, a + b = b + a$ என்பதால் Z-ல், $+$-க்குப் பரிமாற்றுப் பண்பு உண்டு.

$\therefore$ $(Z, +)$ அபீலியன் குலமாயிற்று.

(*R*6) இரு முழு எண்களை வழக்கமாய்ப் பெருக்க, கிடைப்பதும் முழு எண்ணே. $\therefore$ Z-ல் $\cdot$-க்கு அடைப்புப் பண்பு உண்டு.

(*R*7) எந்த மூன்று முழு எண்களையும் எப்படி வேண்டுமானாலும் வழக்கமாய்ப் பெருக்க, கிடைப்பது ஒரே பெருக்குத் தொகைதான்.

$\therefore$ Z-ல் $\cdot$ -க்குச் சேர்ப்பு விதி உண்டு.

(R8) $\forall\, a, b, c \in \mathbf{Z}$,

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

$(Z, +, \cdot)$ என்ற கணித முறை மேற்காணும் கண வளையத்திற்கான நிபந்தனைகளை நிறைவேற்றியதால் $(Z, +, \cdot)$ ஒரு கண வளையமாயிற்று.

மேலும் $\forall\, a,\ b \in \mathbf{Z}, a \cdot b = b \cdot a$ என்பதால் $\cdot$-க்குப் பரிமாற்றுப் பண்பு உண்டு. ∴ $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$ என்பது பரிமாற்றுக் கண வளையம்.

எந்த முழு எண்ணையும் 1 ஆல் பெருக்க, கிடைப்பது அதே முழு எண்தான்.

1. $a = a \cdot 1 = a \quad \forall\, a \in \mathbf{Z}$

∴ Z-ல் $\cdot$-க்கு முற்றொருமை 1 ஆகும்.

∴ $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$ என்பது ஒருமை உறுப்புடைய பரிமாற்றுக் கண வளையம்.

2. S : முழு எண்களை உறுப்புகளாகக் கொண்ட 2×2 அணிகள் கணம். இந்தக் கணத்தில் ஓர் உறுப்பின் உருமாதிரி $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; $a, b, c, d \in \mathbf{Z}$.

$+$: அணிகளின் கூட்டல்.

$\cdot$: அணிகளின் பெருக்கல்.

$(S, +)$ ஓர் அபீலியன் குலமெனக் கண்டோம் (காண்க : 2·4 (7)) நிபந்தனைகள் ($R1$ — $R5$) நிறைவேற்றப்பட்டன.

$$\forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \in S$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & ef + dh \end{pmatrix}$$

$\in S \quad \therefore$ { $a, b, c, d, e, f, g, h \in Z$ முழு எண்களின் பெருக்குத் தொகையும் கூட்டுத் தொகையும் $\in \mathbf{Z}$ }

$\therefore$ (R6) நிறைவேற்றப்பட்டது.

$$\forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix} \in S,$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix} \right] = \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}$$

(வழக்கமாக கூட்டலும் பெருக்கலும் சம்பந்தப்பட்டிருப்பதால்) $R7$ நிறைவேற்றப்பட்டது.

மேலும் $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix} \right]$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e+m & f+n \\ g+p & h+q \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a(e+m)+b(g+p) & a(f+n)+b(h+q) \\ c(e+m)+d(g+p) & c(f+n)+d(h+q) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (ae+am)+(bg+bp) & (af+an)+(bh+bq) \\ (ce+cm)+(dg+dp) & (cf+cn)+(dh+dq) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+ah \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} am+bp & an+bq \\ cm+dp & cn+dq \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}$$

$\therefore$ கூட்டல் மீது பெருக்கல் இடது பங்கீட்டு விதியுள்ளது.

$$\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ e+g & d+h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (am+em)+(bp+fp) & (an+en)+(bq+fq) \\ (cm+gm)+(dp+hp) & (cn+gn)+(dq+hq) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (am+bp)+(em+fp) & (an+bq)+(en+fq) \\ (cm+dp)+(gm+hp) & (cn+dq)+(gn+hq) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} am+bp & an+bq \\ cm+dp & cn+dq \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} em+fp & en+fq \\ gm+hp & gn+hq \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}$$

கூட்டல் மீது பெருக்கல் வலது பங்கீட்டு விதியுள்ளது.

$\therefore$ $R8$ நிறைவேற்றப்பட்டது. $\therefore$ $(S, +, \cdot)$ ஒரு கண வளையமாயிற்று.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot a+0\cdot c & 1\cdot b+0\cdot d \\ 0\cdot a+1\cdot c & 0\cdot b+1\cdot d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cdot 1+b\cdot 0 & a\cdot 0+b\cdot 1 \\ c\cdot 1+d\cdot 0 & c\cdot 0+d\cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$\therefore$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ என்பது $(S, \cdot)$-ன் முற்றொருமை.

$\therefore$ $(S, +, \cdot)$ ஒருமையுள்ள கண வளையமாயிற்று.

$\cdot$ -க்குப் பரிமாற்றுப் பண்பு இல்லை. உதாரணமாக

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 48 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

3. Z_3 : முழு எண்கள் மட்டு 3, அதாவது $\{0, 1, 2\}$

$+_3$: 'கூட்டல் மட்டு 3'

$\cdot_3$: 'பெருக்கல் மட்டு 3'

$+_3$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$\cdot_3$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

அட்டவணைப்படி $+_3$ -க்கு அடைப்பு விதி உண்டு.

$\therefore$ $R1$ உறுதிப்பட்டது.

உதாரணமாக $(1 +_3 2) +_3 1 = 0 +_3 1 = 1$

$$1 +_3 (2 +_3 1) = 1 +_3 (0) = 1$$

$$\therefore (1 +_3 2) +_3 1 = 1 +_3 (2 +_3 1)$$

இது போல் Z_3-ல் ஒவ்வொரு மும்மைக்கும் சேர்ப்பு விதி உண்டு.

$\therefore$ $R2$ உறுதிப்பட்டது.

அட்டவணைப்படி 0 என்பது $+_3$-ன் முற்றொருமை. அதாவது $0 + a = a, \forall a \in Z_3$ $\therefore$ R_3 உறுதிப்பட்டது.

$+_3$ அட்டவணையில் ஒவ்வொரு நிரையிலும் நிரலிலும் ஓர் உறுப்பு ஒரு தடவை தான் காணப்படுகிறது.

$$1^{-1} = 2 ; 2^{-1} = 1$$

$\therefore$ Z_3-ல் $+_3$-ன் கீழ் நேர் மாறுகள் உண்டு.

$\therefore$ $R4$ உறுதிப்பட்டது.

$1 +_3 2 = 0 = 2 +_3 1 \quad \therefore \quad (Z_3 +_3)$ அபீலியன் குலம்.

$\cdot_3$ அட்டவணைப்படி, $\cdot_3$ ஆல் Z_3 அடைக்கப்பட்டது.

$\cdot_3$ -க்குச் சேர்ப்புப் பண்பு உண்டு.

உதாரணமாக $(2 \cdot_3 1) \cdot_3 2 = 2 \cdot_3 2 = 1$

$$2 \cdot_3 (1 \cdot_3 2) = 2 \cdot_3 (2) = 1$$

$+_3$ மீது $\cdot_3$-க்கு இடது, வலது பங்கீட்டு விதிகளுண்டு.

உதாரணமாக $2 \cdot_3 (1 +_3 2) = 2 \cdot_3 0 = 0$

$$2 \cdot_3 1 +_3 2 \cdot_3 2 = 2 +_3 1 = 0$$

$$\therefore \quad 2 \cdot (1 + 2) = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2$$

மேலும் $\cdot_3$-ன் முற்றொருமை 1.

$(Z_3 +_3, \cdot_3)$ ஒருமையுள்ள பரிமாற்றுக் கண வளையம்.

4. மூடிய இடைவெளி (closed interval) $[0, 1] = \{ x \mid x$ மெய்யெண் $0 \leqq x \leqq 1 \}$

f என்பது $[0, 1]$ மீது வரையறுக்கப்பட்ட தொடர்ச்சிச் சார்பு continuous function) என்க.

$\forall x \in [0,1], f(x)$ என்பது x இடத்து f-ன் மதிப்பாகும்.

$C : \{[0,1]$ மீது வரையறுக்கப்பட்ட எல்லாத் தொடர்ச்சிச் சார்புகள்$\}$

$f, g \in C, f = g \Longrightarrow f(x) = g(x), \forall x \in [0,1]$

$f, g \in C$, f, g தொடர்ச்சிச் சார்புகளின் கூட்டல் $f + g$ ஐ

$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \forall x \in [0,1]$ என்றவாறு வரையறை செய். அதாவது x இடத்து $f + g$-ன் மதிப்பாவது x-ன் இடத்து f-ன் மதிப்பு, x-ன் இடத்து g-ன் மதிப்பு ஆகியவற்றின் கூட்டுத் தொகை.

$f, g \in C$, f, g தொடர்ச்சிச் சார்புகளின் பெருக்கல் $f g$ ஐ $f g (x) = f(x) \; g(x), \forall x \in [0,1]$ என்றவாறு வரையறை செய். அதாவது x-இடத்து $f g$-ன் மதிப்பாவது x இடத்து f, g-க்களின் தனித்தனி மதிப்புகளின் பெருக்குத் தொகை.

[0,1]-ன் மீது வரையறுக்கப்பட்ட தொடர்ச்சிச் சார்புகளின். கூட்டுத் தொகையும் [0,1]-ன் மீது வரையறுக்கப்பட்ட ஒரு தொடர்ச்சிச் சார்பு ஆகும்; [0,1]-ன் மீது வரையறுக்கப்பட்ட தொடர்ச்சிச் சார்புகளின் பெருக்குத் தொகையும் [0 1]-ன் மீது வரை யறுக்கப்பட்ட ஒரு தொடர்ச்சிச் சார்பு ஆகும்; இந்த உண்மைகள் வகை நுண் கணிதத்தில் (Diff*l*. Calculus) கண்டோம்.

$f, g, h \in C, \forall x \in [0,1],$

$[(f+g)+h](x) = (f+g)(x) + h(x)$ ('கூட்டலின்' வரையறை)

$= f(x) + g(x) + h(x)$

$= f(x) + (g(x) + h(x))$ (மெய்யெண்களின் சேர்ப்புப் பண்பு)

$= f(x) + (g+h)(x)$ (வரையறை)

$= [f + (g+h)](x)$

$(f+g)+h = f+(g+h)$ ∴ கூட்டலின் சேர்ப்புப் பண்பு நிறுவப்பட்டது.

$[(fg)h](x) = (fg)(x)\,h(x)$

$= (f(x)\,g(x))\,h(x)$

$= f(x)\,(g(x)\,h(x))$

$= f(x)\,(gh)(x)$

∴ $(fg)h = f(gh)$ ∴ பெருக்கலின் சேர்ப்புப் பண்பு நிறுவப் பட்டது.

$f(x)$, $g(x)$ என்பவை மெய்யெண்களாதலால் வரையறுக்கப் பட்ட கூட்டல், பெருக்கல் — இவற்றின் பரிமாற்றுப் பண்பு கூட்டல் மீது பெருக்கலின் பங்கீட்டு விதிகள் ஆகியவற்றை மெய் யெண்களினின்று உரிமை முறையாகப் பெறுகின்றன.

$\forall x \in [0,1]$ $\theta(x) = 0$ என்றவாறு $[0,1]$ மீது θ என்ற சார்பை வரையறை செய். அதாவது θ என்பது மாறிலிச் சார்பு (constant function) ஆகும்.

யாதேனுமொரு $f \in C$, $(f+\theta)(x) = f(x) + \theta(x)$

$$= f(x) + 0 = f(x) \;\forall\; x \in [0, 1]$$

$\therefore$ $f + \theta = f \Longrightarrow \theta$ என்பது $(C, +, \cdot)$-ன் பூச்சியம். (Zero)

ஒவ்வொரு $f \in C$-க்கும், $\forall\; x \in [0, 1]$, $f^*(x) = -f(x)$ என்றவாறு f^* சார்பை வரையறை செய்.

அப்படியானால் $(f + f^*)(x) = f(x) + f^*(x)$

$= f(x) - f(x) = 0 = \theta(x), \forall\; x \in [0, 1]$

$\therefore$ f^* என்பது f-ன் எதிர் ஆகும். அதாவது கூட்டலின் நேர்மாறு ஆகும். மேலும் $u(x) = 1, \;\forall\; x \in [0, 1]$ என்றவாறு u என்ற சார்பை $[0, 1]$ மீது வரையறை செய்.

யாதேனுமொரு $f \in C$,

$$(fu)(x) = f(x)\,u(x) = (f(x))\,(1)$$
$$= f(x), \forall\; x \in [0, 1]$$

$\therefore$ C-ல் $\cdot$-ன் முற்றொருமையாவது; $u(x) \equiv 1, \forall\; x \in [0, 1]$ என்றவாறு அமைந்த u என்னும் சார்பு ஆகும்.

$\therefore$ $(C, +, \cdot)$ என்பது ஒருமையுள்ள பரிமாற்றுக் கண வளையம்.

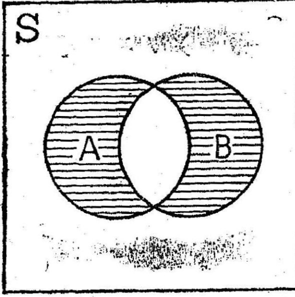
5. S: கொடுக்கப்பட்ட ஒரு கணம்.

R: S-ன் எல்லா உட்கணங்களையும் உறுப்புகளாகக் கொண்ட கணம்.

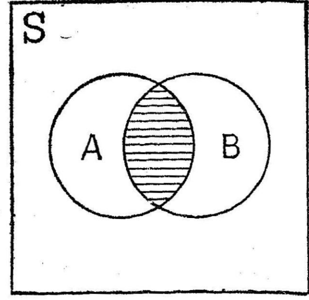
R-ன் மீது 'கூட்டல்' $+$ ஐ

$\forall A, B \in R \;\; A + B = \{ x \in S \mid x \in A \cup B, x \notin A \cap B\}$

அதாவது $A + B = \{ x \in S \mid x \in A \vee x \in B$, ஆனால் $\notin A \cap B\}$ என்றவாறும் R-ன் மீது 'பெருக்கல்' $\cdot$ ஐ, $B \in R$, $A \cdot B = A \cap B$ என்றவாறும் வரையறை செய்.



படம் 59



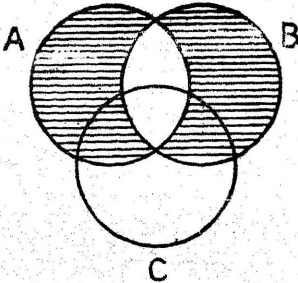
படம் 60

$A, B \in R;\ A + B \subset S\ \therefore\ A + B \in R$ (R । உறுதிப்பட்டது)

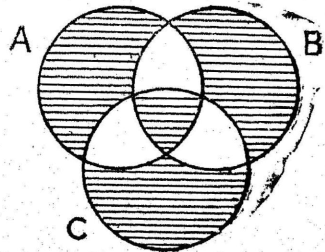
$A, B\ C \in R,$

$$\begin{aligned}(A + B) + C &= \{ x \in S \mid x \in A + B \vee x \in C, \\ &\qquad x \notin (A + B) \wedge C \} \\ &= \{ x \in S \mid x \in A \vee x \in B \vee x \in C, \\ &\qquad x \notin A \cap B, x \notin A + B \cap C \} \\ &= \{ x \in S \mid x \in A \vee x \in B \vee x \in C, \\ &\qquad x \notin A \cap B, B \cap C, C \cap A \} \\ &= \{ x \in S \mid x \in A \vee x \in B \vee x \in C, \\ &\qquad x \notin B \cap C, x \notin A \cap (B + C) \} \\ &= \{ x \in S \mid x \in A \vee x \in B + C, \\ &\qquad x \notin A \cap (B + C) \} \\ &= A + (B + C)\end{aligned}$$

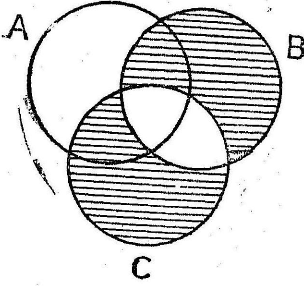
இதை 'வென்' விளக்கப்படம் மூலமாகவும் சரி பார்க்கலாம்.



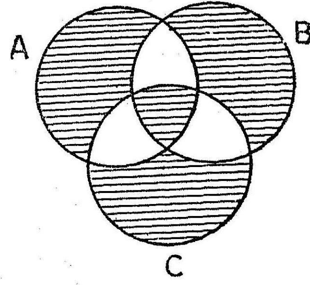
படம் 61



படம் 62



படம் 63



படம் 64

∴ R-ல் $+$ ன் சேர்ப்புப் பண்பு நிலை நிறுத்தப்பட்டது.

∴ $R2$ நிறைவேறியது.

வெற்றுக் கணம் $\emptyset$ என்ருல் $A + \emptyset = A, \forall A \in R$.

∴ R-ல் $+$ ன் முற்றொருமை $\emptyset$. ∴ $R3$ நிறைவேறியது.

R-ல் யாதாவதோர் உறுப்பு A எனில் அதாவது A என்பது S-ன் யாதாவதோர் உட்கணம் எனில் $+$-ன் வரை இலக்கணப்படி

$$A + A = \{ x \mid x \in A \cup A, x \notin A \cap A \}$$
$$= \emptyset$$

∴ எந்த ஓர் உறுப்பின் கூட்டலின் நேர்மாறும் அந்த உறுப்பே. ∴ $R4$ நிறைவேறியது.

$A \cup B = B \cup A$ என்பதாலும், $A \cap B = B \cap A$ என்பதாலும்

$$A + B = \{ x \in S \mid x \in A \cup B, x \notin A \cap B \}$$
$$= \{ x \in S \mid x \in B \cup A, x \notin B \cap A \}$$
$$= B + A$$

∴ R-ல் $+$ -க்குப் பரிமாற்றுப் பண்பு உண்டு.

$\in$ $R5$ நிறைவேறியது.

$A, B \in R$, $A \cdot B = \{ x \in S \mid x e A \cap B \}$ என்பதில் $A \cap B \subset S$ ஆதலால் $A \cdot B \in R$.

∴ R-ல் $\cdot$ -க்கு அடைப்புப் பண்பு உண்டு.

∴ $R6$ நிறைவேறியது.

$A, B, C \in R,$

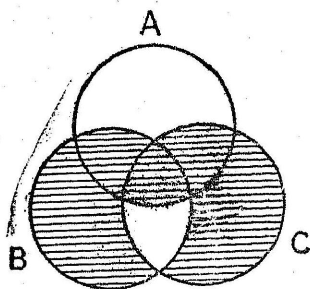
$$(A \cdot B) \cdot C = \{ x \in S \mid x \in (A \cdot B) \cap C \}$$
$$= \{ x \in S \mid x \in A \cap B \cap C \}$$
$$= \{ x \in S \mid x \in A \cap (B \cap C) \}$$
$$= A \cdot (B \cdot C)$$

∴ R-ல் $\cdot$ -க்குச் சேர்ப்புப் பண்பு உண்டு.

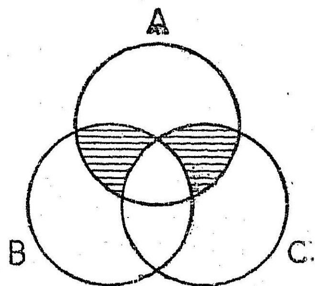
∴ $R7$ நிறைவேறியது.

$$A \cdot (B + C) = \{ x \in S \mid x \in A \cap (B + C) \}$$
$$= \{ x \in S \mid x \in A \wedge x \in (B + C) \}$$
$$= \{ x \in S \mid x \in A \wedge (x \in B \cup C, x \notin B \cap C) \}$$
$$= \{ x \in S \mid x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C), x \notin B \cap C \}$$
$$= \{ x \in S \mid (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C), x \in B \cap C \}$$
$$= \{ x \in S \mid x \in (A \cap B) \cup (A \cap C), x \notin B \cap C \}$$
$$= \{ x \in S \mid x \in (A \cap B) \cup (A \cap C), x \notin (A \cap B) \cap (A \cap C) \}$$
$$= \{ x \in S \mid x \in (A \cap B) \cup (A \cap C), x \notin (A \cdot B) \cap (A \cdot C) \}$$
$$= \{ x \in S \mid x \in (A \cdot B) \cup (A \cdot C), x \notin (A \cdot B) \cap (A \cdot C) \}$$
$$= A \cdot B + A \cdot C$$

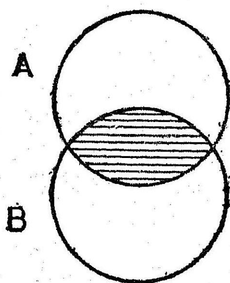
∴ $\cdot$-க்குக் கூட்டலின் மீது இடது பங்கீட்டுப் பண்பு உண்டு. இதனை 'வென்' விளக்கப் படம்' மூலமாகவும் சரி பார்க்கலாம்.



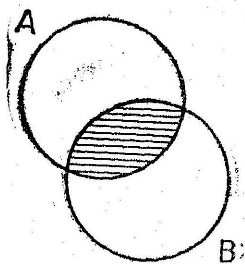
படம் 65



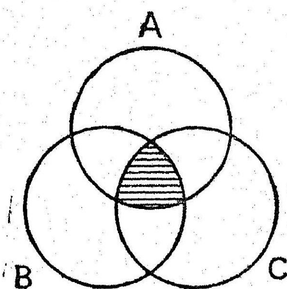
படம் 66



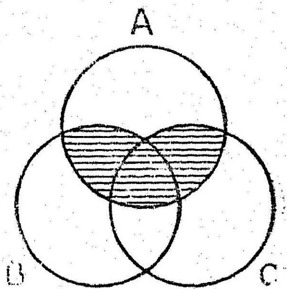
படம் 67



படம் 68



படம் 69



படம் 70

$A \cap B = B \cap A$ என்பதலால், $A \cdot B = B \cdot A$

$\therefore$ $\cdot$-க்குப் பரிமாற்றுப் பண்பு உண்டு.

ஏற்கெனவே $+$-க்குப் பரிமாற்றுப் பண்பு உண்டென்று காண்பித்தோம்,

$\therefore$ $\cdot$-க்குக் கூட்டலின் மீது இடது பங்கீட்டு விதி உண்மையானுல் வலது பங்கீட்டு விதியும் உண்மையாகும்.

$\therefore$ $R8$ நிறைவேறியது.

$S \cap A, = A, \forall A \in R$ என்பதால் S என்பது R-ல் $\cdot$-ன் முற்றொருமை.

$(R, +, \cdot)$ என்பது ஒருமையுள்ள பரிமாற்றுக் கண வளையம்.

குறிப்பு :

1. இந்த உதாரணத்தில் வரையறுக்கப்பட்ட 'கூட்டலை'ச் சமச்சீர் கணங்களின், சமச்சீர் வேறுபாடு என்பார்கள்.

2. $(R, +, \cdot)$ என்ற இந்த உதாரணத்துக் கண வளையத்தைப் பூலியன் கண வளையம் (Boolean ring) என்றும், S-ன் உட்கணங்களின் கண வளையம் என்றும் சொல்லுவர்.

6. $R = \{ a + b\sqrt{2} \mid a, b \in Z \}$. இதை $J(\sqrt{2})$ என்றும் குறியிடுவது வழக்கம்.

$+$: வழக்கமான கூட்டல்.

$\cdot$: வழக்கமான பெருக்கல்.

இரு முழு எண்களை வழக்கமாகக் கூட்டவோ, பெருக்கவோ, விளைவதும் முழு எண்களே.

ஆகவே $(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{2}, \in R$ $\quad \therefore \; a + c \in \mathbf{Z}, b + d \in \mathbf{Z}$

$(a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2} \in R$ $\quad \because \; ac + 2bd \in \mathbf{Z}, \; ad + bc \in \mathbf{Z}$

$\therefore$ R என்பது $\cdot$ ஆலும், $+$ ஆலும் அடைக்கப்பட்டது.

மெய்யெண்களும், வழக்கமான பெருக்கலும், வழக்கமான கூட்டலும் சம்பந்தப்பட்டிருப்பதால், $+$-க்கும் $\cdot$-க்கும் சேர்ப்புப் பரிமாற்றுப் பண்புகளும் $\cdot$-க்கு $+$-ன் மீதான பங்கீட்டு விதிகளும் உண்டு.

$0 + 0\sqrt{2} \in R$ என்பது கூட்டலின் முற்றொருமை.

$1 + 0\sqrt{2} \in R$ என்பது பெருக்கலின் முற்றொருமை.

$a + b\sqrt{2}$-ன் கூட்டலின் நேர்மாறு $-a-b\sqrt{2}$.

$\therefore$ $(R, +, \cdot)$ என்பது ஒருமை உள்ள பரிமாற்றுக் கண வளையம்.

3·1·6. மாதிரிக் கணக்குகள்

1. $(Z_e, +, \cdot)$ என்பதில் Ze : இரட்டை முழு எண்கள்;

$+$: முழு எண்களின் வழக்கமான கூட்டல்,

$\cdot$: முழு எண்களின் வழக்கமான பெருக்கல்

$a, b, c \in Ze$ என்றால்

$2a, 2b \in Ze \Longrightarrow 2a + 2b = 2(a + b) \in Ze.$

$2a, 2b, 2c \in Ze \Longrightarrow 2a + (2b + 2c) = (2a + 2b) + 2c$

$a \in Ze$-ன் $+$-ன் கீழ் நேர்மாறு $-2a \in Ze$; $0+2a=2a=Ze$

$\therefore$ $(Ze, +)$ அபீலியன் குலம்.

$2a \cdot 2b = 2(2ab) \in Ze$

$(2a \cdot 2b) \cdot 2c = 2a \cdot (2b \cdot 2c)$

$$\begin{cases} 2a \cdot (2b + 2c) = 2a + 2b + 2a \cdot 2c \\ (2a + 2b) \cdot 2c = 2a \cdot 2c + 2b \cdot 2c \end{cases}$$

$\therefore$ $(Ze, +, \cdot)$ ஒரு கண வளையமாகும்.

$2a \cdot 2b = 2b \cdot 2a$

$\therefore$ $(Ze, +, \cdot)$ பரிமாற்றுக் கண வளையமாகும்.

$e \cdot 2a = 2a \cdot e = 2a$ என்றால் $e = 1 \notin Ze$

$\therefore$ $\cdot$-க்கு முற்றொருமை உறுப்பு இல்லை.

$\therefore$ $(Ze, +, \cdot)$-க்கு ஒருமை இல்லை.

2. G: இரட்டை முழு எண்களை உறுப்புகளாகக் கொண்ட 2×2 அணிகள்.

$+$: அணிகளின் கூட்டல்.

$\cdot$: அணிகளின் பெருக்கல்.

$(G, +, \cdot)$ என்பது கண வளையம்.

$(G, +)$-ன் முற்றொருமை : $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$(G, +, \cdot)$-க்கு ஒருமை இல்லை.

முடியுமானல் $\cdot$-க்கு ஒருமை I என்றல்

$\forall\ g \in G,\ g \cdot I = I \cdot g = g$ என்பது உண்மையாக வேண்டும்.

உதாரணமாக, $g = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ என்க.

$I = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix}$ என்க. $a, b, c, d \in Z$.

$$gI = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a & 4b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore\ 4a = 2 \Longrightarrow 2a = 1 \Longrightarrow 2a$ என்பது இரட்டை எண்கள் அல்ல. இந்த முடிவு தவறனது.

$\therefore\ I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ என்ற அணி G-ல் இல்லை.

$\therefore\ (G, +, \cdot)$-க்கு ஒருமை இல்லை.

இந்தக் கண வளையம் பரிமாற்று விதிக்குட்பட்டதல்ல.

ஏனெனில், $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. $R = \{a, b, c, d\}$ என்க.

+ ஐயும் . ஐயும்,

+	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

·	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	c	d
c	a	c	d	b
d	a	d	b	c

என்றவாறு வரையறு.

+ ஆல் R அடைக்கப்பட்டது. (அட்டவணை)

+-க்குச் சேர்ப்புப் பண்பு உண்டு. (சரி பார்).

உதாரணமாக $d + (b + c) = d + d = a$

$(d + b) + c = c + c = a$

$\therefore \quad d + (b + c) = (d + b) + c.$

R-ல் +-ன் முற்றொருமை a ஆகும்.

b, c, d-ன் +-ன் நேர்மாறுகள் முறையே b, c, d ஆவன.

$\therefore \quad R$-ல் +-க்கு நேர்மாறுகள் உண்டு.

$b + c = d = c + b; \quad b + d = c = d + b; \quad c + d = b = d + c$

$\therefore$ +-க்குப் பரிமாற்றுப் பண்பு உண்டு.

$\therefore \quad (R, +)$ அபீலியன் குலமாகும்.

· ஆல் R அடைக்கப்பட்டது (அட்டவணை)

R-ல் $\cdot$-ன் முற்றொருமை b ஆகும்.

$\therefore$ b உடன் எந்த உறுப்பும் $\cdot$ ஐப் பொறுத்து பரிமாறும் $\cdot$ அட்டவணையில், a உடன் R-ன் எந்த உறுப்பும் $\cdot$ ஆல் இணையக் கிடைப்பது a தான்.

$\therefore$ a உடன் எந்த உறுப்பும் $\cdot$ ஐப் பொறுத்துப் பரிமாறும். $c \cdot d = b = d\,c$. R-ல் $\cdot$-க்குப் பரிமாற்றுப் பண்பு உண்டு.

4. G : { மெய்யெண்களின் எல்லா வரிசைப்பட்ட ஜோடிகள். } அதாவது $G : R \times R$

$\forall\ (a, b), (c, d) \in G$, G-ன் மீது $+$ கூட்டலை $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ என்றும்,

$\cdot$ பெருக்கலை $(a, b) \cdot (c, d) = (ac, bd)$ என்றும் வரையறு.

கவனிக்க

$a + c$, $b + d$ என்பவற்றுள் $+$ என்பது வழக்கமான கூட்டல்.

ac-ல் a ஐயும், c ஐயும் பிணைப்பது வழக்கமான பெருக்கல்.

bd -ல் b ஐயும், d ஐயும் பிணைப்பது வழக்கமான பெருக்கல்.

மெய்யெண்களின் வழக்கமான கூட்டல், பெருக்கல் சம்பந்தப் பட்டிருப்பதால் G-ல் $+$-ம் $\cdot$-ம், அடைப்புப் பண்புடையன.

$\therefore$ $R1$-ம் $R6$-ம் நிறைவேறின.

$[(a, b) + (c, d) + (e, f)$

$= (a + c, b + d) + (e, f) = [(a + c) + e, (b + d) + f]$ 'கூட்டலின்' வரையறை.

$= [a + (c + e), \quad b + (d + f)]$ மெய்யெண்கள் கூட்டலின் சேர்ப்புப் பண்பு

$= (a, b) + [(c + e, d + f)]$

$\therefore$ 'கூட்டல்' G-ல் சேர்ப்புப் பண்பு உடையது.

$\therefore$ $R2$ நிறைவேறியது.

$(0, 0) + (a, b) = (0 + a, 0 + b) = (a, b)\ \forall\ (a, b) \in G$

$\therefore$ $(0, 0)$ என்பது G-ல் கூட்டலின் முற்றொருமை.

∴ $R3$ நிறைவேறியது.

$$(-a, -b) + (a, b) = (-a + a, -b + b = (0, 0)$$
$$\forall\ (a, b) \in G$$

∴ (a, b)-ன் 'கூட்டலின்' நேர்மாறு $(-a, -b) \in G$

∴ $R4$ நிறைவேறியது.

$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ மெய்யெண்களின் வழக்க

$= (c + a, d + b)$ மான கூட்டலின் பரி

$= (c, d) + (a, b)$ மாற்றுப்பண்பு,

∴ G-ல் 'கூட்டல்' பரிமாற்றுப் பண்பு உடையது.

∴ R5 நிறைவேறியது.

$[(a, b) \cdot (c, d)] \cdot (e, f)$

$= (ac, bd)\ \ (e, f) = [(ac)\ e,\ \ (bd)\ f]$ 'பெருக்கலின்' வரையறை,

$= [a(ce),\ b\ (df)]$ மெய்யெண்களின் வழக்கமான பெருக்கலின் சேர்ப்புப் பண்பு.

$= (a, b) \cdot (ce, df)$

$= (a, b)\ [(c, d) \cdot (e, f)],\ \forall\ (a, b), (c, d), (e, f) \in G$

∴ G-ல் 'பெருக்கல்' சேர்ப்புப் பண்பு உடையது.

∴ $R7$ நிறைவேறியது.

$(a, b) \cdot (c, d) = (ac, bd) = (ca, db)$ மெய்யெண்களின் வழக்கமான பெருக்கலின் பரிமாற்றுப் பண்பு.

$= (c, d) \cdot (a, b)$

∴ G-ல் $\cdot$-க்கு பரிமாற்றுப் பண்பு உண்டு.

$(a, b) \cdot [(c, d) + (e, f)]$

$= (a, b) \cdot [c + e,\ d + f]$

$= [a\ (c + e),\ b\ (d + f)]$

$= [ac + ae,\ bd + bf]$

$= (ac, bd) + (ae, bf)$

$= (a, b) \cdot (c, d) + (a, b) \cdot (e, f)$

$\therefore$ $\cdot$-க்கு $+$-ன் மீது இடது பங்கீட்டுப் பண்பு உண்டு. G-ல் $\cdot$-க்குப் பரிமாற்றுப்பண்பு உண்டென்பதால், $\cdot$-க்கு $+$-ன்மீது வலது பங்கீட்டுப் பண்பு உண்டு.

$\therefore$ $R8$ நிறைவேறியது.

$(a, b) \cdot (1, 1) = (a \cdot 1, b \cdot 1) = (a, b) \ \forall \ (a, b) \in G.$

$\therefore$ $(1, 1)$ என்பது G-ல் $\cdot$-ன் முற்றொருமை.

$\therefore$ $(G, +, \cdot)$ ஒருமையுள்ள பரிமாற்றுக் கண வளையம்.

5. $a, b, c, d \in$ கண வளையம் $(R, +, \cdot)$ என்றால்,

(i) $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$

(ii) $(a + b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2$ என்று நிறுவுக.

விடை

(i) $(a + b)(c + d) = (a + b) \cdot k;$ ($k = c + d$ என்றால்)

$= a \cdot k + b \cdot k$ ......($R8$) வலது பங்கீட்டு விதி

$= a \cdot (c + d) + b \cdot (c + d)$

$= a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$

($R8$) இடது பங்கீட்டு விதி

(ii) (i)-ல் கண்டபடி

$(a + b)(c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$

$c = a, d = b$ என்று பிரதியிட்டால்.

$(a + b) \cdot (a + b) = a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b$

$(a + b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2$

பயிற்சி 12

1. $(\{0, 3, 6, 9\}, +_{12}, \cdot_{12})$ என்ற கணித முறை கண வளையம் என்று நிறுவுக.

2. ஒருமையுள்ள கண வளையத்தில், பூச்சிய வகுப்பான்களுக்குப் பெருக்கலின் நேர்மாறுகள் இல்லை என்று நிறுவுக.

3. $R = \{ a + b\sqrt{3} \mid a, b \in Z \}$ என்றால் $(R, +, .)$ ஒரு கண வளையம் என்று காண்பி. $+$ என்பது வழக்கமான கூட்டல், . என்பது வழக்கமான பெருக்கல்.

4. $a, b, c, d \in$ கணவளையம் $(R, +, .)$ என்றால்

(i) $a - b = c - d \Longleftrightarrow a + d = b + c$

(ii) $(a - b)\ (c - d) = (a c + b d) - (a d + b c)$

5 $(R, +, \cdot)$ கண வளையத்தின் யாதாவதோர் உறுப்பு a என்பது $a^2 = a$ என்றவாறு இருந்தால்.

(i) $a + a = 0 \quad \forall\, a \in R$

(ii) $a \cdot b = b \cdot a \quad \forall\, a,\ b \in R$ என்பவை உண்மை என்று நிறுவுக.

6. $(Z_m, +_m, \cdot_m)$ ஒரு கண வளையம் என்று நிறுவுக.

7. $(R, +, \cdot)$ என்ற கண வளையத்தில்,

$R = \{ a + b\sqrt{3} \mid a, b \in Z \}$ என்றால்,

$f(a + b\sqrt{3}) = a - b\sqrt{3}$ என்றவாறு வரையறுக்கப்பட்ட கோர்த்தல் $f : R \rightarrow R$ ஆனது செயல் மாற்றுக் கோர்த்தல் என்று நிறுவுக.

8. $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| \ a, b, c \in Z \right\}$ என்ற கணம் வழக்கமான கூட்டல், பெருக்கல்களின் கீழ், கண வளையமா என்று ஆராய்க.

9. $(R. +, .)$ கண வளையம் என்பதில் $R = \{ a, b, c, d \}$,

$+$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

$\cdot$	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	—	a	c
c	a	a	a	—
d	a	c	a	—

என்றால்,

சேர்ப்பு விதியைக் கொண்டு பெருக்கல் அட்டவணையில் காலி யிடங்களை நிரப்பு.

10. ஓர் உறுப்புக்கு மேற்பட்ட உறுப்புகளைக் கொண்ட கண வளையத்தின் ஒருமை e என்றால், $e \neq 0$ என்று நிறுவுக.

3·2. கணவளையத்தின் எளிய பண்புகள் (Simple properties of a Ring)

3·2·1. தேற்றம்

$(R, +, \cdot)$ என்பது ஒருமையுள்ள கண வளையமானால், R-ல் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட ஒருமை உறுப்புகள் இல்லை.

நிறுவல்

$(R, +, \cdot)$-ன் ஓர் ஒருமை உறுப்பு, அதாவது, $\cdot$-ன் முற்றொருமை உறுப்பு 1 என்க. முடியுமானால், மற்றோர் ஒருமை உறுப்பு e என்க.

e என்பது R-ன் ஓர் உறுப்பு என்பதால், $1 \cdot e = e$ (1 என்பது ஒருமை)

1 என்பது R-ன் ஓர் உறுப்பு என்பதால். $e \cdot 1 = 1$ (e என்பது ஒருமை)

1 என்பது R-ன் ஒருமையாதலால், $1 \cdot e = e \cdot 1$. ∴ $e = 1$.

∴ R-ன் ஒருமை ஒரே ஓர் உறுப்புத்தான்.

3·2·2. தேற்றம்

$(R, +, .)$ என்ற ஒருமையுள்ள கண வளையத்தில் யாதாவதோர் உறுப்பு a-ன் பெருக்கலின் நேர்மாறு R-ல் இருப்பின், அது ஒன்றுக்கு மேற்பட்டதல்ல.

நிறுவல்

$(R, +, \cdot)$-ன் ஒருமை 1 என்க.

முடியுமானால், $a \in R$-ன் பெருக்கலின் நேர்மாறுகள் b, c என்க. வரை இலக்கணப்படி,

$$\begin{cases} a \cdot b = b \cdot a = 1 \quad \ldots \quad \text{(i)} \\ a \cdot c = c \cdot a = 1 \quad \ldots \quad \text{(ii)} \end{cases}$$

$b = b \cdot 1$ (1 என்பது ஒருமை)

$= b \cdot (a \cdot c)$ (ii)-ன்படி

$= (b \cdot a) \cdot c$ (பெருக்கலின் சேர்ப்புப் பண்பு)

$= 1 \cdot c$ ((i)-ன் படி)

$= c$ (1 என்பது ஒருமை)

$\therefore\ b = c$ $\therefore$ a-ன் பெருக்கலின் நேர்மாறு ஒரே ஓர் உறுப்பே.

3·2·3. தேற்றம்

0 என்பது $(R, +, \cdot)$ கண வளையத்தின் பூச்சியம் (zero) என்றால் $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0 \quad \forall\ a \in R$.

நிறுவல்

$a \in R$ என்க.

$a = a + 0$ (0 என்பது $+$-ன் முற்றொருமை). இந்தச் சமன்பாட்டின் இரு பக்கங்களையும் வலப் புறமாக a ஆல் 'பெருக்கு.'

$\therefore\ a \cdot a = (a + 0) \cdot a$

$= a \cdot a + 0 \cdot a$ ($\cdot$-ன் $+$ மீது வலது பங்கீட்டுப் பண்பு)

$\therefore\ a \cdot a + 0 = a \cdot a + 0 \cdot a$ (0-ன் வரை இலக்கணம்)

$(R, +)$ குலமாதலால், R-ல் $+$-க்கு அடித்தல் விதியுண்டு.

$\therefore\ 0 = 0 \cdot a$

இது போல்

$a \cdot a = a \cdot (a + 0)$

$= a \cdot a + a \cdot 0$

$a \cdot a + 0 = a \cdot a + a \cdot 0$

$0 = a \cdot 0$

$\therefore\ a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0 \quad \forall\ a \in \mathrm{R}$.

குறிப்பு : 1. $a, b \in (\mathrm{R}, +, .)$ என்றால் $a + (-b)$ என்பதை $a - b$ என்று குறியிடுவோம்

2. ஒரு குலத்தில் ஓர் உறுப்புக்கு ஒரே ஓர் எதிர் உறுப்புத் தான் என்பதால் $-a$-ன் ஒரே எதிர் a ஆகும். இதனையே $-(-a) = a$ என்று எழுதுவோம்.

3·2·4 தேற்றம்

a, b, c என்பன $(R, +, \cdot)$ கணவளையத்தில் எவையேனும் மூன்று உறுப்புகள் என்றால்

1. $a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$

2. $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$

3. $(-a)(-b) = a \cdot b$

4. $a \cdot (b - c) = (a \cdot b) - (a \cdot c)$

5. $(a - b) \cdot c = (a \cdot c) - (b \cdot c)$

என்பவை உண்மையானவை.

மேலும், $(R, +, \cdot)$-க்கு ஒருமை உறுப்பு 1 உண்டானால்

6. $(-1)\ a = -a$

7. $(-1)(-1) = 1$.

நிறுவல்

1. $(a \cdot b) + a \cdot (-b) = a \cdot (b + (-b))$ (பங்கீட்டு விதி)

$= a \cdot (0)$ ($-b$-ன் வரை இலக்கணம்)

$= 0$

R-ல் $+$-க்குப் பரிமாற்றுப் பண்பு உள்ளதால்,

$a \cdot (-b) + (a \cdot b) = (a \cdot b) + a \cdot (-b) = 0$. அதாவது $a \cdot (-b)$ என்பது $a \cdot b$-ன் கூட்டலின் நேர்மாறு ஆகும். ஆனால் $(a \cdot b)$-ன் கூட்டலின் நேர்மாறு ஒரே ஓர் உறுப்பு என்பதால்,

$$a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$$

2. $(-a) \cdot b + (a \cdot b) = (-a + a) \cdot b$

$= 0 \cdot b$

$= 0$

R-ல் $+$-ன் பரிமாற்றுப் பண்புப்படி

$$a \cdot b + (-a) \cdot b = 0$$

$\therefore \quad (-a) \cdot b + a \cdot b = a \cdot b + (-a) \cdot b = 0$

$\therefore \quad (-a) \cdot b$ என்பது $a \cdot b$-ன் கூட்டலின் நேர்மாறு (Additive Inverse).

$(a \cdot b)$-ன் கூட்டலின் நேர்மாறு ஒரே ஓர் உறுப்பு என்பதால் $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$

3. $(-a)\ (-b) = -[a(-b)]$, மேற்கண்ட (2)-ன் படி

$= -[-ab]$, மேற்கண்ட (1)-ன் படி

$= ab$ $\quad (-ab)$-ன் எதிர் உறுப்பு.

4. $a \cdot (b - c) = a \cdot [b + (-c)]$, ($b - c$-ன் வரை இலக்கணம்)

$= a \cdot b + a \cdot (-c)$ (இடது பங்கீட்டு விதி)

$= a \cdot b - a \cdot c$ (மேற்கண்ட (1)-ன் படி)

5. $(a - b) \cdot c = [a + (-b)] \cdot c$ ($a - b$-ன் வரை இலக்கணம்)

$= a \cdot c + (-b) \cdot c$ (வலது பங்கீட்டு விதி)

$= (a \cdot c) - (b \cdot c)$ (மேற்கண்ட (2)-ன் படி)

6. $a + (-1)\, a = 1 \cdot a + (-1)\, a$ ($\cdot$ -ன் முற்றொருமை 1)

$= (1 + (-1))\, a$ (பங்கீட்டு விதி).

$= 0\, a$ ($+$-ன் நேர்மாறு)

$= 0 \Longrightarrow (-1)\, a = -a$

7. மேற்கண்ட (6)-ல் $a = -1$ என்றால்

$(-1)\ (-1) = -(-1) = 1$

அல்லது (3)-ல் $a = 1$, $b = 1$ எனில் $(-1)\ (-1) = 1$.

3·3. பொதுவான தொகைகளும், பெருக்கங்களும் (Generalized sums and Products)

$(R, +, .)$ என்ற கண வளையத்திலிருந்து $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$ என்ற உறுப்புகளை எடுத்துக்கொள். R-ல் $+$ என்பது ஈரிணைச் செயலியாவதால் இந்த உறுப்புகளில் எவையேனும் இரு உறுப்பு களைக் கூட்டுவதற்கு நமக்குத் தெரியும். இரண்டுக்கு மேற்பட்ட உறுப்புகளை எப்படிக் கூட்டுவது? இந்த இக்கட்டான நிலைமை யைச் சமாளிக்க, சில வரை இலக்கணங்களை ஏற்படுத்துவோம்.

மூன்று உறுப்புகளுக்கு,

$a_1 + a_2 + a_3 = (a_1 + a_2) + a_3$ என்று வரையறுப்போம். 'கூட்டலின்' சேர்ப்புத் தன்மையினல் $a_1 + a_2 + a_3 = a_1 + (a_2 + a_3)$

ஆதலால் உறுப்புகளின் தொகுப்பு எப்படி வேண்டுமானுலும் இருக்கலாம். பொதுவாக, கீழ்க் காணும் 'தொகுத்தறி வரை இலக்கண'த்தைக் (Inductive Definition) காண்போம்.

3·3·1. வரை இலக்கணம்

$a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$ என்பவை $(R, +, .)$ கண வளையத்தின் சில உறுப்புகள் என்க.

$a_1 + \ldots\ldots + a_k$ என்பது வரையறுக்கப்பட்டிருந்தால்,

$a_1 + \ldots\ldots + a_{k+1} = (a_1 + \ldots + a_k) + a_{k+1}$ என்று வரையறை.

இம்மாதிரியான (கூட்டுத்) தொகைக்குப் 'பொதுவான தொகை' என்பது பெயர்.

3·3·2. தேற்றம்

$(R, +, .)$ ஒரு கண வளையம் என்றும், n ஒரு நேர் முழு எண் என்றும், $a_1, \ldots, a_n \in R$ என்றும், $1 \leqq S < n$ என்றவாறு S என்பது ஒரு முழு எண் என்றும் கொண்டால்,

$$a_1 + \ldots + a_n = (a_1 + \ldots + a_s) + (a_{s+1} + \ldots + a_n)$$

நிறுவல் (கணிதத்தின் தொகுத்தறி முறையில்)

இந்தத் தேற்றத்தின் கூற்றை S_n என்க.

$n = 2$ என்றால், $a_1 + a_2 = a_1 + a_2$. இது சரி.

∴ S_2 என்பது உண்மையாயிற்று.

தற்கோள் :

S_k உண்மை என்க.

அதாவது, $a_1 + \cdots + a_k = (a_1 + \cdots + a_s) + (a_{s+1} + \cdots + a_k)$, $1 \leqq S < k$ என்க.

∴ $1 \leqq S < k$,

$a_1 + \cdots + a_{k+1} = (a_1 + \cdots + a_k) + a_{k+1}$ (வரை இலக்கணம்)

$= ((a_1 + \cdots + a_s) + (a_{s+1} + \cdots + a_k)) + a_{k+1}$ (தற்கோள் : S_k)

$= (a_1 + \cdots + a_s) + ((a_{s+1} + \cdots + a_k) + a_{k+1}$ (கண வளையத்தின் $R2$)

$= (a_1 + \cdots + a_s) + (a_{s+1} + \cdots + a_{k+1})$ (வரை இலக்கணம்).

மேலும் $s = k$ என்றால்

$a_1 + \cdots + a_{k+1} = (a_1 + \cdots + a_s) + (a_{s+1} + \cdots + a_{k+1})$ (வரை இலக்கணம்)

∴ S_{k+1} என்பது உண்மையாயிற்று.

∴ கணிதத்தின் தொகுத்தறி முறையின் படி $\forall\, n \in Z+$, S_n என்பது உண்மை.

குறிப்பு: கூட்டுத் தொகைகளுக்குப் போலவே பொதுவான பெருக்கங்களையும் வரையறுப்போம்.

3·3·3. தேற்றம்

$(R, +, \cdot)$ என்பது கண வளையமென்றும், n என்பது ஏதோ ஒருநேர் முழு எண் என்றும், $a_1 \cdots a_n \in R$ என்றும் $i_1 \cdots i_n$ என்பது 1, 2, ..., n-ன் ஒரு வரிசை மாற்றம் என்றும் கொண்டால்

$$a_1 + \cdots + a_n = a_{i1} + \cdots + a_{in}$$

நிறுவுக!

துணை முடிவு

$(R, +, \cdot)$ என்பது பரிமாற்றுக் கண வளையம் என்றும், n என்பது யாதேனும் ஒரு நேர் முழு எண் என்றும், $a_1 \dots a_n \in R$ என்றும், $i_1 \dots i_n$ என்பது $1, 2, \dots n$-ன் ஒரு வரிசை மாற்றம் என்றும் கொண்டால்,

$$a_1 a_2 \dots a_n = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_n}$$

3·3·4. தேற்றம்

$(R, +, \cdot)$ கண வளையமென்றும், n யாதேனுமொரு நேர் முழு எண் என்றும் $a, b_1, b_2, \dots, b_n \in (R, +, \cdot)$ என்றும் கொண்டால்,
$a(b_1 + b_2 + \dots + b_n) = ab_1 + ab_2 + \dots + ab_n$ (பொதுவான பங்கீட்டு விதி)

நிறுவல்

தேற்றத்தின் கூற்றை S_n என்க.

$a(b_1 + b_2) = ab_1 + ab_2$ (கண வளையத்தின் பங்கீட்டு விதி R_8) என்பது உண்மை.

∴ S_2 என்பது உண்மை.

தற்கோள் :

S_k உண்மை என்க.

அதாவது $a(b_1 + \dots + b_k) = ab_1 + \dots + a\,b_k$ என்க.

∴ $a(b_1 + \dots + b_{k+1}) = a((b_1 + \dots + b_k) + b_{k+1})$ (வரை இலக்கணம்)

$= a(b_1 + \dots\dots + b_k) + ab_{k+1}$ (R_8)

$= (ab_1 + \dots\dots + ab_k) + ab_{k+1}$ (S_k தற்கோள்)

$= ab_1 + \dots\dots + ab_{k+1}$ (வரை இலக்கணம்)

∴ S_{k+1} என்பது உண்மையாயிற்று.

∴ கணிதத்தின் தொகுத்தறி முறைப்படி, $\forall\, n \in \mathbf{Z}+$ S_n என்பது உண்மை.

3·4 உட்கண வளையங்கள் (Subrings)

3·4·1 வரை இலக்கணம்

$(R, +, \cdot)$ ஒரு கண வளையம் என்க. $\emptyset \neq S \subseteq R$ என்பது R-ன் வெற்றற்ற உட்கணம் என்க. அதே செயலிகளைப் பொறுத்து, $(S, +, \cdot)$-ம் கண வளையமானால் $(S, +, \cdot)$ என்பது $(R, +, \cdot)$-ன் உட்கண வளையம் எனப்படும்.

கவனிக்க :

$(S, +, \cdot)$ கண வளையம் என்பதால் $(S, +)$ என்பது குலம். $S \subseteq R$ என்பதால், $(S, +)$ என்பது $(R, +)$-ன் உட்குலம்.

3·4·2 தேற்றம்.

$(R, +, \cdot)$ கண வளையம் என்க.

1. $\emptyset \neq S \subseteq R$
2. $\forall\, a, b \in S, \quad a + (-b) \in S$
3. $\forall\, a, b \in S, \quad a \cdot b \in S$

என்றால்தான், $(S, +, \cdot)$ என்பது $(R, +, \cdot)$-ன் உட்கண வளையம் எனப்படும்.

நிறுவல்

பாகம் 1

தற்கோள்

$(S, +, \cdot)$ என்பது $(R, +, \cdot)$-ன் உட்கண வளையம் என்க.

$\because$ $(S, +, \cdot)$ என்பது கண வளையம் என்பதால்,

$(S, +)$ என்பது குலம்.

$S \subseteq R \Longrightarrow (S, +)$ என்பது $(R, +)$-ன் உட்குலம்

$\Longrightarrow 0 \in (S, +)$

$\Longrightarrow \emptyset \neq S$

மேலும் $(R, +)$-ன் உட்குலம் $(S, +)$ என்பதால்

$a, b \in S, \Longrightarrow a + (-b) \in S$ (உட்குலத்தின் தேற்றம்)

(காண்க: தேற்றம் 2·9.5).

$(S, +, \cdot)$ கண வளையம் என்பதால், S ஆவது $\cdot$ ஆல் அடைக்கப்பட்டது. $(R6)$

$\therefore\ a \in S,\ b \in S \Longrightarrow a \cdot b \in S$

பாகம் 2

தற்கோள்கள் : தேற்றத்தின் (1), (2), (3)

$a \in S, \Longrightarrow a + (-a) \in S$ ((2)-ல் b-க்குப் பதில் a ஐயே எழுதினால்)

$\therefore\ 0 \in S$ $\therefore$ S-ல் $+$ -ன் முற்றொருமை உண்டு.

$0 \in S,\ a \in S \Longrightarrow 0 + (-a) \in S$

$\Longrightarrow -a \in S$ $\therefore$ S-ல் $+$ -ன் நேர்மாறு உண்டு.

இதுபோல் $b \in S \Longrightarrow -b \in S$

$\therefore\ a \in S - b \in S \Longrightarrow a - (-b) = a + b \in S$

$\therefore$ $+$ ஆல் S அடைக்கப்பட்டது.

$\therefore$ $(S, +)$ ஒரு குலம். (1)-ன் படி $S \subseteq R$ என்பதால் $(S, +)$ என்பது $(R, +)$-ன் உட்குலம்.

$S \subseteq R$ என்பதால்,

$(R, +)$-ல் $+$ -ன் பரிமாற்றுப் பண்பை $(S, +)$-ல் $+$ ஆனது உரிமை முறையோடு பெறுகின்றது.

$\therefore$ $(S, +)$ ஓர் அபீலியன் குலம்.

(3)-ன்படி $a, b, \in S, a \cdot b \in S$ என்பதால் S-ல் $\cdot$ என்பது ஈரிணைச் செயலி.

மேலும் $(R, +, \cdot)$-ல் $\cdot$ -ன் சேர்ப்புப் பண்பையும் $\cdot$-ன் $+$ மீது பங்கீட்டுப் பண்பையும் $(S, +, \cdot)$-ல் $\cdot$ ஆனது உரிமை முறையோடு பெறுகின்றது.

$\therefore$ $(S, +, \cdot)$ என்பது கண வளையம்.

3·4·3 உட்கண வளையங்களுக்கு உதாரணங்கள்

1. $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$ முழு எண்கள் கண வளையம், $+, \cdot$ முறையே வழக்கமான கூட்டல், பெருக்கல்.

$(Z\ +, \cdot)$, Z_e: இரட்டை முழு எண்கள் கணம் (நிறுவுக).

இது $(Z, +, .)$-ன் உட்கண வளையம்.

Z-ல் ஒருமை 1. ஆனால் Z-ன் உட்கண வளையமான Z_e-ல் ஒருமை கிடையாது.

2. G : கலப்பெண்கள் கணம், + : வழக்கமான கூட்டல், · வழக்கமான பெருக்கல்

$(G, +, \cdot)$ ஒரு கண வளையம் (நிறுவுக !)

$(Z, +, \cdot)$ என்பது $(G, +, \cdot)$-ன் உட்கண வளையம் (நிறுவுக!

3. எந்த ஒரு கண வளையம் $(R, +, \cdot)$-க்கும் $(\{0\}, +, \cdot)$, $(R, +, .)$ என்பவை அற்ப உட்கண வளையங்கள்.

4. $(R, +, \cdot)$ என்ற கணவளையத்தில், $R = \{ a + b\sqrt{2} \mid a, b \in Z \}$,

+ : வழக்கமான கூட்டல், · வழக்கமான பெருக்கல்.

$S = \{ a + 0\sqrt{2} \mid a \in Z \}$ என்றால்

$(S, +, \cdot)$ என்பது $(R; +, .)$-ன் உட்கண வளையம்.

5. $(Z_e, +, \cdot)$ என்ற கண வளையத்தில் Z_e : இரட்டை முழு எண்கள் : $\{ \ldots\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\ldots \}$

+, · முறையே வழக்கமான கூட்டல், பெருக்கல்.

$S = \{ 8n \mid n \in Z \}$ என்றால்

$(S, +, \cdot)$ என்பது $(Z_e, +, \cdot)$-ன் உட்கண வளையம்.

6. $(Z_6, +_6, \cdot_6)$: முழு எண்கள் மட்டு 6-ன் கணவளையம் $(S, +, \cdot) = (\{0, 2, 4\}, +_6, \cdot_6)$ என்பது

$(Z_6, +_6, \cdot_6)$-ன் உட்கண வளையம்.

$+_6$	0	2	4
0	0	2	4
2	2	4	0
4	4	0	2

$\cdot_6$	0	2	4
0	0	0	0
2	0	4	2
4	0	2	4

7. $(R, +, \cdot)$ என்ற கண வளையத்தில் R: மெய்யான எண்களை உறுப்புகளாகக் கொண்ட 2×2 அணிகள். $+, \cdot$ முறையே வழக்கமான கூட்டல், பெருக்கல்.

$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ என்ற உரு மாதிரியுள்ள 2×2 அணிகள் கொண்ட கணம் G என்க.

$(G, +, \cdot)$ என்பது $(R, +, \cdot)$-ன் உட்கண வளையம்.

மேற்கண்ட உதாரணங்களை நிறுவுக!

3.4.4. தேற்றம்

இரு உட்கண வளையங்களின் இடைவெட்டும் ஓர் உட்கண வளையமாகும்.

நிறுவல்

$(R, +, \cdot)$ என்ற கண வளையத்தின் இரு உட்கண வளையங்கள் $(S, +, \cdot)$, $(H, +, \cdot)$ என்க.

$a, b \in S \cap H$ என்க

$a \in S \cap H \Longrightarrow a \in S \wedge a \in H$

$b \in S \cap H \Longrightarrow b \in S \wedge b \in H$

S, H உட்கண வளையங்கள் என்பதால்

$a \in S,\ b \in S \Longrightarrow a - b \in S,\ ab \in S$

$a \in H,\ b \in H \Longrightarrow a - b \in S,\ ab \in H$

மேலும்,

$a - b \in S,\ a - b \in H \Longrightarrow a - b \in S \cap H$

$ab \in S,\ ab \in H \Longrightarrow ab \in S \cap H$

$\therefore\ a \in S \cap H,\ b \in S \cap H \Longrightarrow$

$a - b \in S \cap \mathrm{H},\ ab \in S \cap \mathrm{H}$

$\in\ S \cap \mathrm{H}$ என்பது உட்கண வளையம்.

3·4·5· தேற்றம்

$(R, +, \cdot)$ என்ற ஒருமையுள்ள கண வளையத்தில் $R \neq \{0\}$ என்றால் 0-ம், 1-ம் வெவ்வேறானவை, சமமல்ல.

நிறுவல்

$R \neq \{0\} \Longrightarrow$ பூச்சியமில்லாத உறுப்பு a, R-ல் உள்ளது.

$1 = 0 \Longrightarrow \quad a = a \cdot 1 = a \cdot 0 = 0$

$\Longrightarrow \quad a = 0$; இது எதிர் மறுப்பு.

$\therefore \quad 1 \neq 0.$

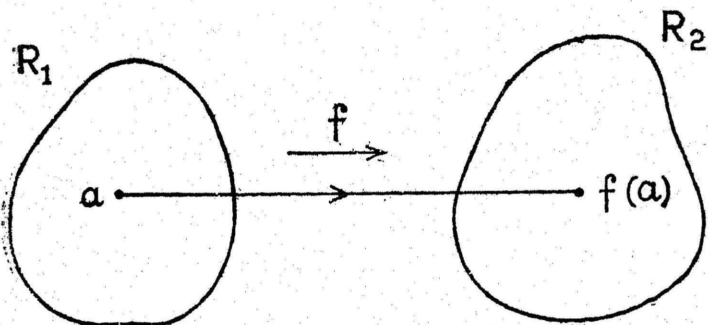
3·5. கண வளையங்களின் செயல் மாற்றுக் கோர்த்தல்கள் (Ring Homomorphisms)

3·5·1. வரை இலக்கணம்

$(R_1, +, \cdot)$ கண வளையத்திலிருந்து

$(R_2, \oplus, \odot)$ கணவளையத்து உள் கோர்த்தல்

$f: R_1 \longrightarrow R_2$ என்பது



படம் 71

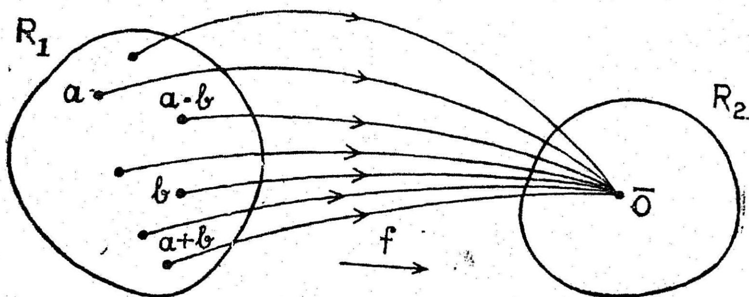
$$\left.\begin{aligned} f(a + b) &= f(a) \oplus f(b) \\ f(a \cdot b) &= f(a) \odot f(b) \end{aligned}\right\} \forall\, a, b \in R_1$$

என்ற இரு நிபந்தனைகளுக்குட்பட்டால்தான், f என்பது செயல் மாற்றுக் கோர்த்தல் எனப்படும்.

குறிப்பு : $(R_2, +, .)$ என்பது செயல்மாற்றுக்கோர்த்தல் f-ன் கீழ் $(R_1, \oplus, \odot)$-ன் எதிர் உரு எனப்படும்.

3·5·2. உதாரணங்கள்

1. $(R_1, +, .)$ $(R_2, \oplus; \odot)$ என்பவை எவையேனும் இரு கண வளையங்களென்றால், $f : R_1 \longrightarrow R_2$ என்ற கோர்த்தல் R_1-ன் ஒவ்வோர் உறுப்பையும் R-ன் பூச்சிய உறுப்போடு $(\bar{0})$ கோர்க்கட்டும்.



படம் 72

$$f(a+b) = \bar{0} = \bar{0} \oplus \bar{0} = f(a) \oplus f(b)$$

$$f(a \cdot b) = \bar{0} = \bar{0} \odot \bar{0} = f(a) \odot f(b)$$

$\therefore$ f என்பது செயல் மாற்றுக் கோர்த்தல்.

இதனை 0-செயல்மாற்றுக் கோர்த்தல் என்றும் சொல்வதுண்டு.

2 $(Z_4; +_4, \cdot_4)$ கண வளையத்தில், $Z_4 = \{0, 1, 2, 3\}$

$+_4$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$\cdot_4$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

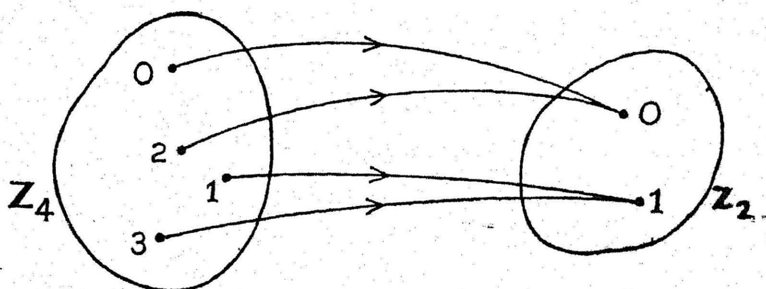
$(Z_2, +_2, \cdot_2)$ கண வளையத்தில், $Z_2 = \{0, 1\}$,

$+_2$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot_2$	0	1
0	0	0
1	0	1

கோர்த்தல் $f \in Z_4 \times Z_2 = \{(0, 0). (2, 0), (1, 1). (3, 1)\}$ என்க.

அதாவது $f(0) = 0, f(2) = 0, f(1) = 1. f(3) = 1$ என்றவாறு $f: Z_4 \longrightarrow Z_2$ ஐ வரையறு.



படம் 73

$f(0 +_4 0) = f(0) = 0$

$f(0 +_4 2) = f(2) = 0$

$(1 +_4 1) = f(2) = 0$

$f(1 \cdot_4 x) = f(x)$

$f(0 +_4 0) = f(0) +_2 f(0) = 0 +_2 0 = 0$

$f(0 +_4 2) = f(0) +_2 f(2) = 0 +_2 0 = 0$

$f((1 +_4 1 = f(1) +_2 f(1) = 1 +_2 1 = 0$

$f(0 \cdot_4 x) = f(0) \cdot_2 f(x) = 0 \cdot_2 f(x) = 0$

$f(1 \cdot_4 x) = f(1) \cdot_2 f(x) = 1 \cdot_2 f(x) = (x)$

முதலியன.

$\therefore$ f என்பது செயல் மாற்றுக் கோர்த்தல்

3. $f: (Z, +, \cdot) \longrightarrow (Z_e, +, \cdot)$ என்பதை $\forall a \in Z$, $f(a) = 2a$ என்றவாறு வரையறு.

$+$: வழக்கமான கூட்டல்

$\cdot$: வழக்கமான பெருக்கல்

$\forall\ a,\ b \in Z,\ f(a+b) = 2(a+b) = 2a + 2b = f(a) + f(b)$

$\therefore f$ ஆல் $+$ போற்றப்பட்டது.

$f(a \cdot b) + 2(a \cdot b)$

ஆனால் $f(a) \cdot f(b) = 2a \cdot 2b$

$\therefore f(a \cdot b) \neq f(a) \cdot f(b)$

$\therefore f$ ஆல் $\cdot$ போற்றப்படவில்லை.

$\therefore f$ என்பது செயல் மாற்றுக் கோர்த்தல் அல்ல.

4. $J(\sqrt{2})$: { x மெய்யெண் } x-ன் உருமாதிரி $a + b\sqrt{2}$, $a, b \in Z$ }

$(J(\sqrt{2}), +, \cdot)$ என்பது கண வளையம் (காண்க : 3·1·5(6))

$f: J(\sqrt{2}) \longrightarrow J(\sqrt{2})$ என்பதை $f(a + b\sqrt{2}) = a - b\sqrt{2}$

என்றவாறு வரையறை செய்.

$$f[(a+b\sqrt{2})+(c+d\sqrt{2})] = f[(a+c)+(b+d)\sqrt{2}]$$
$$=(a+c)-\sqrt{2}(b+d)$$
$$=(a-b\sqrt{2})+(c-d+\sqrt{2})$$
$$=f(a+b\sqrt{2})+f(c+d\sqrt{2})$$
$$f[(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2}) = f[(ac+2bd)$$
$$+(ad+bc)\sqrt{2})$$
$$=(ac+2bd)-\sqrt{2}(ad+bc)$$
$$=(ac-ad\sqrt{2})+(2bd-bc\sqrt{2})$$
$$=(a-b\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})$$
$$=f(a+b\sqrt{2})\cdot f(c+d\sqrt{2})$$

$\therefore$ f என்பது செயல் மாற்றுக் கோர்த்தல்.

5. $(\mathbf{R}\times\mathbf{R}, +, \cdot)$ என்ற கணித முறையில்

$\mathbf{R}$: எல்லா மெய்யெண்கள் கணம்

$+$ என்பதை $(a, b)+(c, d)=(a+c, b+d)$ என்றவாறும்,

$\cdot$ என்பதை $(a, b)\cdot(c, d)=(ac, bd)$ என்றவாறும் வரையறு.

$(\mathbf{R}\times\mathbf{R}, +, \cdot)$ என்பது கண வளையம் என்பதை (3·1·6 (4) ஐக் காண்) ஏற்கெனவே நிறுவியுள்ளோம்.

$S=\{(a, a) \mid a\in\mathbf{R}\}$

$\therefore S\subset\mathbf{R}\times\mathbf{R}$

$(a, a), (b, b)\in S, [(a, a)-(b, b)]=[a-b, a-b]\in S$

$\because [(a-b), (a-b)]\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ கூறுகள் சமம்.

$(a, a)\cdot(b, b)=(ab, ab)\in S$

$\because (ab, ab)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}$, கூறுகள் சமம்.

$\therefore (S, +, \cdot)$ என்பது $(\mathbf{R}\times\mathbf{R}, +, \cdot)$-ன் உட் கண வளையம்.

$f: S \longrightarrow \mathbf{R}$ என்பதை $f[(a, a)] = a$ என்றவாறு வரையறு.

$$f[(a, a) + (b, b)] = +[(a + b), (a + b)] = a + b$$
$$= f(a, a) + f(b, b)$$

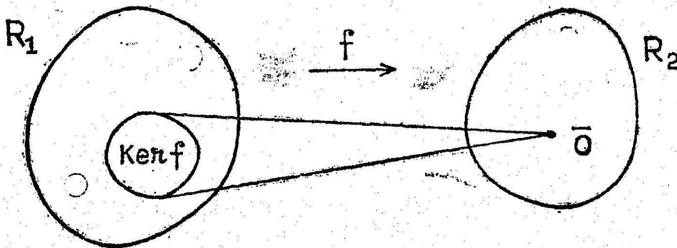
$$f[(a, a) \cdot (b, b)] = f[(ab, ab)] = ab = +[(a, a)] \cdot f[(b, b)]$$

$\therefore$ f என்பது செயல் மாற்றுக் கோர்த்தல் ஆகும்.

3·5·3. வரை இலக்கணம்

$(R_1 +, \cdot)$ கண வளையத்திலிருந்து $\bar{0}$ ஐப் பூச்சியமாகக் கொண்ட $(R_2, \oplus, \circ) f$ என்பது செயல் மாற்றுக் கோர்த்தல் என்றால் f-ன் உட்கரு (Kernal) எனப்படுவது.

Ker $(f) = \{ a \in R_1 \mid f(a) = \bar{0} \}$ என்ற கணமாகும்.



படம் 74

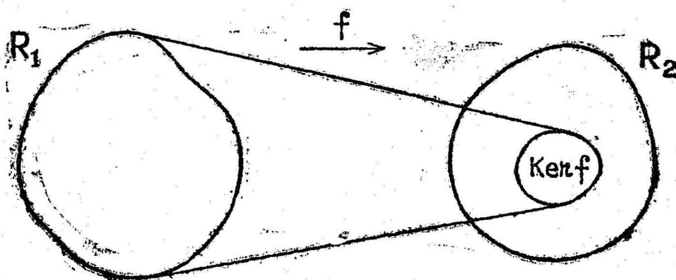
இந்த வரை இலக்கணத்தில் கண வளையத்தின் 'பெருக்கல்' சம்பந்தப்படவில்லை.

ஆகையால் கூட்டல் குலங்களுக்கான (additive groups) Ker (f) வரை இலக்கணமும், கண வளையங்களுக்கான வரை இலக்கணமும் ஒன்றே.

3·5·4. வரை இலக்கணம்

R_2-ல் செயல் மாற்றுக் கோர்த்தல் f-ன் கீழ் R_1-ன் உறுப்புகளின் எதிர் உருக்கள் கணத்தை $f(R_1)$ அல்லது $Im\,f$ என்பர்!

$$Im\, f = \{ x \mid f(a) = x, \forall a \in R_1 \}$$



படம் 75

3·5·5. தேற்றம்

O என்ற பூச்சியமுள்ள $(R_1, +, \cdot)$ கண வளையத்திலிருந்து $\bar{O}$ என்ற பூச்சியமுள்ள $(R_2, \oplus, \odot)$ கண வளையத்துள் f என்பது செயல் மாற்றுக் கோர்த்தல் என்றால்

1. $f(0) = \bar{O}$

2. $f(-a) = -f(a)$

3. $(\text{Ker } f, +, \cdot)$ என்பது $(R_1, +, \cdot)$-ன் உட்கண வளையம்.

4. $(f(R_1), \oplus, \odot)$ என்பது $(R_2, \oplus, \odot)$-ன் உட்கண வளையம்.

5. $\text{Ker } f = \{ 0 \}$ என்றால்தான் f ஆனது $(1-1)$ ஆகும். மேலும், $(R_1, +, \cdot)$, $(R_2, \oplus \cdot \odot)$ கணவளையங்களுக்கு முறையே 1-ம், T-ம் ஒருமைகளானால், $f(R_1) = R_2$ என்றும் கூட இருந்தால்

6. $f(1) = T$

7. R_1-ல் a^{-1} இருந்தால், $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$

நிறுவல்

(1), (2), (5), (6), (7) (காண்க : 2·12·4) குலங்களுக்கான செயல் மாற்றுக் கோர்த்தல்களுக்கான தேற்றங்கள் 1 (a), (b)

(2)-ன் நிறுவல் முறைகளும் நமது தேற்றப் பிரிவுகள் (1), (2), (5), (6), (7) (குறியீடுகளில் சிறு மாற்றங்களோடு) நிறுவல் முறைகளும் முற்றிலும் ஒத்தவையே.

உதாரணமாக, குலத்திற்கான தேற்றத்தில் a^{-1} என்றிருந்தால், நமது தேற்றத்தில் $+$-ன் கீழ் $-a$ என்று எழுதவேண்டும்; அதே மாதிரி அங்கே e, ē என்பவற்றை முறையே இங்கே கூட்டலின் கீழ் 0, $\bar{0}$ என்றும் பெருக்கலின் கீழ் 1, T என்றும் எழுதவேண்டும். அங்கே பெருக்கலின் கீழ் a^{-1} என்ருல் இங்கேயும் பெருக்கலின் கீழ் a^{-1} தான்.

நிறுவல் (3)

(1)-ன் படி $O \in \text{Ker } f$; $\therefore \phi \neq \text{Ker } f$ குலத்திற்கான செயல் மாற்றுக் கோர்த்தல் தேற்றத்தின் படி $(\text{Ker } f, +)$ ஆனது $(R_1, +)$-ன் உட்குலம் (நிறுவுக; இங்கே காண்க 2·12 4 (c)). R_1 கணம் · ஆல் அடைக்கப்பட்டிருப்பதாலும், $\text{Ker } f \subseteq R_1$ என்பதாலும் Ker f-ம் · ஆல் அடைக்கப்படுகிறது.

$\therefore$ $(\text{Ker } f, +, \cdot)$ என்பது $(R_1, +, \cdot)$-ன் உட்கண வளையம்

நிறுவல் (4)

(1)-ன் படி $\bar{0} = f(0) \in f(R_1) \Longrightarrow \phi \neq f(R_1)$ குலத்திற்கான செயல் மாற்றுக் கோர்த்தல் தேற்றத்தின்படி $(f(R_1), \oplus)$ ஆனது $(R_2, \oplus)$-ன் உட்குலம். (நிறுவுக இங்கே. காண்க 2·12·4 (d))

R_2 கணம் $\odot$ ஆல் அடைக்கப்பட்டிருப்பதால், $f(R_1)$-ம் $\odot$ ஆல் அடைக்கப்பட்டது.

$\therefore$ $(f(\ _1), \oplus, \odot)$ என்பது $(R_2, \oplus, \odot)$-ன் உட்கண வளையம்.

3·6. கண வளையங்களின் இயல் மாற்றுக் கோர்த்தல்கள் (Ring Isomorphisms)

3·6·1· வரை இலக்கணம்

கண வளையம் $(R_1 +, \cdot)$-லிருந்து கண வளையம் $(R_2, \oplus, \odot)$-க்கு

$f : R_1 \longrightarrow R_2$ என்ற கோர்த்தல்

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ f(a+b) = f(a) \oplus f(b) \\ 2.\ f(a \cdot b) = f(a) \odot f(b) \end{array}\right\} \forall\, a, b \in R_1$$

என்றவாறும்,

3. (1—1) ஆகவும்,

4. முழுக் கோர்த்தலாகவும் அதாவது $f(R_1) = R_2$ ஆகிய இலக்கணங்களை உடைத்தாயிருந்தால் f ஐ இயல் மாற்றுக் கோர்த்தல் (isomorphism) என்போம். இயல் மாற்றுகக் கோர்த்தலில் சம்பந்தப்பட்ட கண வளையங்களுக்கு இயல் மாறுக் கண வளையங்கள் (isomorphic rings) என்பது பெயர்.

3·6.2. உதாரணங்கள்

1. கண வளையத்துச் செயல் மாற்றுக் கோர்த்தலுக்கான (உதாரணம் 5-ல்)

$f : S \to \mathbf{R}$ என்பது செயல் மாற்றுக் கோர்த்தல் என்று நிறுவினோம்.

R-ன் a என்ற எந்த உறுப்புக்கும் ஏற்ப (a, a) என்பது S-ல் உள்ளதால் f என்பது முழுக் கோர்த்தல்.

∵ $(a, a) = (b, b)$ என்றால் $a = b$ அதாவது

$f(a, a) = f(b, b)$.

∴ f என்பது $(1 = 1)$

∴ S-ம் R-ம் இயல் மாறுக் கண வளையங்கள்.

2. $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$ கண வளையத்தில் $\mathbf{Z}$: முழு எண்கள், $+$: வழக்கமான கூட்டல், $\cdot$: வழக்கமான பெருக்கல்.

$(\mathbf{Z}_e, +, \odot)$ என்ற கணித முறையில் $\mathbf{Z}_e$: இரட்டை முழு எண்கள்.

$+$: வழக்கமான கூட்டல்

$\odot : a \odot b$.

$$= \frac{a \cdot b}{2}, \forall\ a, b \in \mathbf{Z}^e$$

$(\mathbf{Z}_e, +)$ என்பது அபீலியன் குலம். இந்தக் குலத்தின் $+$-ன் முற்றொருமை $0 \in \mathbf{Z}_e$.

$\forall\, k, l \in Z_e$ ∴ $2k, 2l \in Z_e$ என்றால்

$$2k \odot 2l = \frac{2k \cdot 2l}{2} = 2kl$$

$=$ இரட்டை முழு எண் $\in Z_e$

∴ Z_e என்பது $\odot$ ஆல் அடைக்கப்பட்டது.

$\forall\, k, l, m \in Z, 2k, 2l, 2m \in Z_e$ என்றால்

$$\begin{aligned} & 2k \odot (2l \odot 2m) \\ &= 2k \odot (2\,lm) \\ &= 2k\,(lm) \\ &= 2\,(kl)\,m \\ &= \frac{2kl \cdot 2m}{2} \\ &= 2kl \odot 2m \\ &= (2k \odot 2l) \odot 2m \end{aligned}$$

∴ $\odot$ -க்குச் சேர்ப்புப் பண்பு உடையது.

$\forall\, k, l, m \in Z$, $2k \odot (2l + 2m) = 2k \odot 2(l + m)$

$= 2k\,(l + m)$ ($\odot$ -ன் வரை இலக்கணம்)

$= 2kl + 2km$ (மெய்யெண்களின் $\cdot$ -ன் $+$ மீது பங்கீட்டுப் பண்பு)

$= 2k \odot 2l + 2k \odot 2m$

∴ $\odot$ -க்கு $+$ -ன் மீது இடது பங்கீட்டு விதியுள்ளது.

$2k \odot 2l = 2kl = 2lk$ (மெய்யெண்களின் $\cdot$ -க்குப் பரிமாற்று விதி உண்டு.)

$= 2l \odot 2k$

∴ $\odot$ -க்குப் பரிமாற்று விதியுண்டு.

∴ $\odot$ -க்கு $+$ -ன் மீது வலது பங்கீட்டு விதியுள்ளது.

∴ $(Z_e, +, \odot)$ என்பது கண வளையமாயிற்று.

$a \in Z, f(a) = 2a$ என்றவாறு $f : Z \to Z_e$ ஐ வரையறு.

Z_e-ல் யாதாவதோர் உறுப்பினுடைய உரு மாதிரி $2k$ என்றால் $k \in Z$.

$\therefore$ f என்பது முழுக் கோர்த்தல்

$a, b \in Z$, என்றால் $a \longmapsto 2\,a$, $b \longmapsto 2\,b$.

$a = b$ என்றால் $2\,a = 2\,b$

அதாவது $f\,(a) = f\,(b)$

$\therefore$ f என்பது $(1 - 1)$ கோர்த்தல்.

$\forall\; a, b \in Z, f\,(a + b) = 2\,(a + b) = 2\,a + 2\,b$

$= f\,(a) + f\,(b)$

$f\,(a\,b) = 2\,a\,b = \frac{[illegible]}{2} = 2\,a \odot 2\,b = f\,(a) \odot f\,(b)$

$\therefore$ f என்பது Z-லிருந்து Z_e மீது இயல் மாற்றுக் கோர்த்தல்.

3·6·3. வரை இலக்கணம்

ஒருமையுள்ள கண வளையத்தின் பூச்சியமல்லாத ஒவ்வோர் உறுப்புக்கும் 'பெருக்க' லைப் பொறுத்து நேர்மாறுகள் அந்தக் கண வளையத்தில் இருப்பின் அந்தக் கண வளையத்திற்கு வகுத்தல் கண வளையம் (Division Ring) என்பது பெயர்.

3.6·4. தேற்றம்

$(G_1, +, \cdot)$ கண வளையத்திலிருந்து முழுக் கோர்த்தலாக $(R_2, \oplus, \odot)$-க்கு f என்பது இயல் மாற்றுக் கோர்த்தல் என்றால்,

1. $(R_1, +, \cdot)$-க்கு ஒருமை உண்டு $\Longleftrightarrow$ $(R_2, \oplus, \odot)$-க்கு ஒருமை உண்டு.

2. $(R_1, +, \cdot)$-க்கு ஒருமை உண்டு என்றால்

$(R_1, +, \cdot)$-க்கு ஒரு வகுத்தல் கண வளையம் $\Longleftrightarrow$ $(R_2, \oplus, \odot)$ ஒரு வகுத்தல் கண வளையம்.

3. $(R_1, +, \cdot)$ பரிமாற்றுக் கண வளையம் $\Longleftrightarrow$ $(R_2, \oplus, \odot)$ பரிமாற்றுக் கண வளையம்.

நிறுவல் 1.

பாகம் 1

1. $(R_1, +, \cdot)$-ன் ஒருமை 1 என்க.

யாதாவதோர் உறுப்பு $a_2 \in R_2$ என்க.

f முழுக் கோர்த்தல் என்பதால், R_1-ல், a_1 என்ற ஓர் உறுப்பு, $f(a_1) = a_2$ என்றவாறு இருக்கும்.

$$\therefore \quad a_1 \cdot 1 = 1 \cdot a_1 = a_1$$

f என்பது செயல் மாற்றுக் கோர்த்தல் என்பதால்

$$a_2 = f(a_1) = f(a_1 \cdot 1) = f(a_1) \odot f(1) = a_2 \odot f(1)$$

$$a_2 = f(a_1) = f(1 \cdot a_1) = f(1) \odot f(a_1) = f(1) \odot a_2$$

$$\therefore \quad a_2 = a_2 \odot f(1) = f(1) \odot a_2 \quad \forall\, a_2$$

$\therefore$ $f(1)$ என்பது $(R_2, \oplus, \odot)$-ன் ஒருமை.

இதை T என்போம்.

பாகம் 2

$(R_2, \oplus, \odot)$-ன் ஒருமை T என்க.

f என்பது இயல் மாற்றுக் கோர்த்தல் என்பதால்,

$f(1) = T$ என்றவாறு R_1-ல் ஒரே ஓர் உறுப்பு 1 இருக்கும்.

$a_1 \in R_1$ என்க.

f என்பது செயல் மாற்றுக் கோர்த்தல் என்பதால்

$$f(a_1 \cdot 1) = f(a_1) \cdot f(1) = f(a_1) \cdot T = f(a_1)$$

f, (1 : 1) என்பதால், $a_1 \cdot 1 = a_1$

இதேபோல், $1 \cdot a_1 = a_1$

$$\therefore \quad a_1 = a_1 \cdot 1 = 1 \cdot a_1$$

$\therefore$ 1 என்பது R_1-ன் ஒருமை.

நிறுவல் 2.

பாகம் 1

$(R_1, +, \cdot)$-ன் ஒருமை 1 என்க.

$(R_1, +, \cdot)$ ஒரு வகுத்தல் கண வளையம் என்க.

அதாவது R_1-ல் பூச்சியமல்லாத உறுப்பு ஒவ்வொன்றுக்கும் ஒரு பெருக்கலின் நேர்மாறு R_1-ல் இருக்கும்.

யாதாவதோர் உறுப்பு $\bar{0} \neq a_2 \in R_2$ என்க.

f, முழுக் கோர்த்தல் என்பதால் $f(a_1) = a_2$ என்றவாறு R_1-ல் a_1 என்ற உறுப்பு இருக்கும்.

R_1 என்பது வகுத்தல் கண வளையமாதலால் a_1-ன் பெருக்கலின் நேர்மாறு a_1^{-1}, R_1-ல் இருக்கும்.

$$\therefore \quad a_1 \cdot a_1^{-1} = a_1^{-1} \cdot a_1 = 1$$

f என்பது செயல்மாற்றுக் கோர்த்தல் என்பதால்

$$f(1) = f(a_1 \cdot a_1^{-1}) = f(a_1) \circ f(a_1^{-1}) = a_2 \circ f(a_1^{-1})$$
$$= a_2 \circ f(a_1^{-1})$$

இதேபோல் $f(1) = f(a_1^{-1} \cdot a_1) = f(a_1^{-1}) \circ f(a_1)$
$$= f(a_1^{-1}) \circ a_2$$

$$\therefore \quad \forall\, \bar{0} \neq a_2 \in R_2, f(1) = a_2 \circ f(a_1^{-1}) = f(a_1^{-1}) \circ a_2$$

மேலும் மேற்கண்ட (1)-ன் படி $f(1)$ என்பது R_2-ன் ஒருமை $= T$

$\therefore$ $f(a_1^{-1})$ என்பது a_2-ன் பெருக்கலின் கீழ் நேர்மாறு, $\forall\, \bar{0} \neq a_2 \in R_2$

$\therefore$ R_2-ன் பூச்சியமில்லாத ஒவ்வோர் உறு பெருக்கலின் கீழ் நேர்மாறு R_2-ல் உண்டு.

$\therefore$ $(R_2, \oplus, \circ)$ என்பது வகுத்தல் கண வளையம்.

பாகம் 2

$(R_2, \oplus, \odot)$ என்பது வகுத்தல் கண வளையம் என்க.

$\therefore$ $(R_2, \odot)$-க்கு ஒருமை இருக்கவேண்டும். அது T என்க. மேற்கண்ட முடிவு (1)-ன் படி, R_2-க்கு ஒருமை உண்டானால், R_1-க்கும் ஒருமை உண்டு,

R_1-ன் ஒருமை 1 என்றால் $f(1) = T$

யாதாவதொரு $0 \neq a_2 \in R_2$ என்றால், $a_2 \odot a_2^{-1} = a_2^{-1} \odot a_2 = T$ என்றவாறு, a_2^{-1} என்ற ஓர் உறுப்பு R_2-ல் இருக்க வேண்டும். ($\because$ $(R_2, \oplus, \odot)$ வகுத்தல் கண வளையம்)

f, ஒரு முழுக் கோர்த்தல் என்பதால் $f(a_1) = a_2, f(b_1) = a_2^{-1}$ என்றவாறு R_1-ல் a_1, b_1 என்ற உறுப்புகள் உண்டு.

f, ஒரு செயல்மாற்றுக் கோர்த்தல் என்பதால் $f(a_1 \cdot b_1) = f(a_1) \odot f(b_1) = a_2 \odot a_2^{-1} = T$

$$= f(1)$$

f, 1 : 1 என்பதால் $a_1 \cdot b_1 = 1$

இதுபோல். $b_1 . a_1 = 1$

$\therefore$ $a_1 \cdot b_1 = b_1 \cdot a_1 = 1, \forall a, b, \in R_1$ ($\because f$ 1 : 1)

$\therefore$ b_1 என்பது a_1-ன் பெருக்கலின் கீழ் நேர்மாறு; இது R_1-ல் உள்ளது.

$\therefore$ $(R_1, +, \cdot)$ என்பது வகுத்தல் கண வளையம்.

நிறுவல் 3.

பாகம் 1

$(R_1, +, \cdot)$ என்பது பரிமாற்றுக் கண வளையமாக இருக்கட்டும்.

a_2, b_2 என்பவை $(R_2, \oplus, \odot)$-ன் எவையேனும் இரு உறுப்புகள் என்க. f ஒரு முழுக்கோர்த்தல் என்பதால் $f(a_1) = a_2$, $f(b_1) = b_2$ என்றவாறு a_1, b_1 என்ற உறுப்புகள் $(R_1, +, \cdot)$-ல் உள்ளன.

$(a_1 \cdot b_1) = (b_1 : a_1)$ $\cdot (R_1, +, \cdot)$ பரிமாற்றுக் கண வளையம்.

$\therefore \quad f(a_1 \cdot b_1) = f(b_1 \cdot a_1)$

f ஒரு செயல்மாற்றுக் கோர்த்தல் என்பதால்

$$f(a_1 \cdot b_1) = f(a_1) \odot f(b_1) = a_2 \odot b_2$$

$$f(b_1 \cdot a_1) = f(b_1) \odot f(a_1) = b_2 \odot a_2$$

$$\therefore \quad f(a_1 \cdot b_1) = f(b_1 \cdot a_1) \Longrightarrow a_2 \odot b_2 = b_2 \odot a_2$$

$$\forall\, a_2, b_2 \in R_2$$

$\therefore \quad (R_2, \oplus, \odot)$ பரிமாற்றுக் கண வளையம்.

பாகம் 2

$(R_2, \oplus, \odot)$ என்பது பரிமாற்றுக் கண வளையம் என்க.

அதாவது, $\forall\, a_2, b_2 \in R_2, a_2 \odot b_2 = b_2 \odot a_2$

f முழுக்கோர்த்தல் என்பதால் $f(a_1) = a_2$,

$f(b_1) = b_2$ என்றவாறு a_1, b_1 என்ற உறுப்புகள் R_1-ல் உள்ளன.

f செயல் மாற்றுக் கோர்த்தல் என்பதால்

$$f(a_1 \cdot b_1) = f(a_1) \odot f(b_1) = a_2 \odot b_2$$

$$f(b_1 \cdot a_1) = f(b_1) \odot f(a_1) = b_2 \odot a_2$$

$$a_2 \odot b_2 = b_2 \odot a_2 \Longrightarrow f(a_1 \cdot b_1) = f(b_1 \cdot a_1)$$

$$\Longrightarrow a_1 \cdot b_1 = b_1 \cdot a_1 \; (f\; 1:1)$$

$$\forall\, a_1, b_1 \in R_1$$

$\Longrightarrow R_1$ என்பது பரிமாற்றுக் கண வளையம்.

3.7. ஒருங்கிசைவு இனங்கள் (Congruence classes)

ஏற்கெனவே 'முழு எண்கள் மட்டு n' என்பதை $\mathbf{Z}_n$ என்று குறித்து, $\mathbf{Z}_n = \{ 0, 1, 2, \ldots\ldots, n - 1 \}$.

'கூட்டல்' $+_n$, 'பெருக்கல்' $\cdot_n$ ஆகிய ஈரிணைச் செயலிகளை வரையறுத்து $(\mathbf{Z}n, +_n)$, $(\mathbf{Z}n, \cdot_n)$ கணித முறைகளை ஆராய்ந்தோம்.

இப்பொழுது 'ஒருங்கிசைவு இனம் மட்டு n' (congruence class modulo n) என்பதை ஆராய்வோம்.

a என்பது ஒரு குறிப்பிட்ட முழு எண் என்றால், $[a]$ என்ற குறியீடு, a-க்கு, ஒருங்கிசைவு, மட்டு n-ல் உள்ள எல்லா முழு எண்களையும் கொண்ட கணமாகும் என்று முதல் அத்தியாயத்தில் கண்டோம்.

அதாவது, $a \in \mathbf{Z}, [a] = \{ x \in \mathbf{Z} \mid x \equiv a \pmod{n} \}$
$= \{ x \in \mathbf{Z} \mid x = a + kn, \forall k \in \mathbf{Z} \}$

$[a]$ ஐ a ஆல் நிர்ணயிக்கப்பட்ட, ஒருங்கிசைவு, மட்டு n என்போம்.

உதாரணமாக, ஒருங்கிசைவு, மட்டு 3 ஐ எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$[0] = \{ x \in \mathbf{Z} \mid x = 0 + 3k, \ \forall k \in \mathbf{Z} \}$$
$$= \{ \ldots\ldots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9. \ldots\ldots \}$$
$$[1] = \{ x \in \mathbf{Z} \mid x = 1 + 3k, \forall k \in \mathbf{Z} \}$$
$$= \{ \ldots\ldots, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \ldots\ldots \}$$

இதுபோல்,

$$[2] = \{ x \in \mathbf{Z} \mid x = 2 + 3k, \forall k \in \mathbf{Z} \}$$
$$= \{ \ldots\ldots, -7, -4, -1, 2, 5, 8, 11 \ldots\ldots \}$$

இந்த மூன்று இனங்களில், ஒரே ஒருங்கிசைவு இனத்திலுள்ள முழு எண்கள் ஒருங்கிசைவு, மட்டு 3-ல் உள்ளது.

அதாவது ஓர் இனத்திலுள்ள ஒரு முழு எண்ணும் மற்றோர் இனத்திலுள்ள ஒரு முழு எண்ணும், ஒருங்கிசைவு, மட்டு 3-ல் இருக்க மாட்டா.

மேற்கண்ட உதாரணத்தில், ஒருங்கிசைவு, மட்டு 3-க்கு மூன்று சமநிலைக் கணங்கள் உள்ளன.

$[0], [1], [2]$—இவற்றை மட்டும் உறுப்புகளாகக் கொண்ட கணத்தை $\mathbf{Z}/3$ என்று குறியிடுவது வழக்கம். சில ஆசிரியர்கள் இதனை C_3 என்று குறிப்பதும் உண்டு.

பொதுவாக, $Z/n = \{ [0], [1], [2] \ldots\ldots, [n-1] \}$

Z/n-ல் உள்ள உறுப்புகள் தனி முழு எண்கள் அல்ல, ஆனால் ஒவ்வோர் உறுப்பும் முடிவிலா முழு எண்கள் கணம்.

சில ஆசிரியர்கள் Z/n ஐயே முழு எண்கள் மட்டு n என்பர். ஆதலால், Zn வேறு, Z/n வேறு.

$$Zn = \{ 0, 1, \ldots\ldots, n-1 \}$$
$$Z/n = \{ [0], [1], \ldots\ldots, [n-1] \}$$

3·7·1. வரை இலக்கணம்

$\forall [a], [b] \in Z/n, \; [a] +_n [b] = [a+b]$. என்றவாறு Z_n மீது $+_n$ (கூட்டல், மட்டு) ஐ வரையறு. கவனி : $+$ என்பது வழக்கமான கூட்டல். இது நல்வரையறுக்கப்பட்டதா (well defined)? அதாவது, 'a-ன் சமநிலை இனத்தையும், b-ன் சமநிலை இனத்தையும் 'கூட்ட'க் கிடைப்பது $(a+b)$-ன் சமநிலை இனம்' என்பதுதான் $+_n$ கூறுவது.

ஆதலால் $[a], [b]$ என்ற சமநிலை இனங்களின் 'கூட்டல்' தொகை, a, b என்ற முழு எண்களைப் பொறுத்து உள்ளது என்ற மாதிரித் தோற்றம் அளிக்கிறது. இது பொய்த் தோற்றமே.

$a_1 \in [a], b_1 \in [b]$ என்றால், $[a_1] = [a], [b_1] = [b]$

$\therefore \; [a] +_n [b] = [a_1] +_n [b_1] = [a_1 + b_1]$

$+_n$ என்பது ஈரிணைச் செயலி என்று நிறுவ, $[a_1 + b_1] = [a+b]$ என்று நிறுவ வேண்டும்.

அதாவது, Z/n-ல் $[a], [b]$ என்ற உறுப்புகளுக்கு ஏற்ப Z/n-ல் $[a] + [b]$ என்ற ஒரே ஓர் உறுப்புத்தான் உள்ளது. என்று நிறுவினால். 'கூட்டல் மட்டு n', அதாவது $+_n$ நல்வரையறுக்கப் பட்டதாகும்.

$[a] = [a_1]$; $[b] = [b_1]$ என்க.

அப்படியானால் $a_1 \equiv a \pmod{n}$, $b_1 \equiv b \pmod{n}$

$\therefore \; a_1 = a + qn, b_1 = b + pn, p, q \in \mathbf{Z}$

$\therefore \; a_1 + b_1 = (a+b) + (p+q)\,n$

$\therefore \; (a_1 + b_1) \equiv (a+b) \bmod n$

$\therefore \quad a_1 + b_1 \in [a+b]$

$\therefore \quad [a+b] = [a_1 + b_1]$ $\quad$ $\therefore$ $+_n$ நல்வரையறுக்கப் பட்டது.

3.7.2. வரை இலக்கணம்

$\forall [a], [b] \in Z/n, [a] \cdot_n [b] = [a \cdot b]$

கவனி

$\cdot$ என்பது வழக்கமான பெருக்கல்.

இது நல்வரையறையா (well-defined operation) ?

$[a \cdot b]$ என்பது $[a], [b]$—இனங்களினின்று தேர்ந்தெடுக்கப் பட்ட உரு மாதிரிகளைப் பொறுத்ததல்ல என்று நிறுவினுல் போதும்.

அதாவது $[a'] = [a], \quad [b'] = [b]$ என்ருல்

$[a' \cdot b'] = [a \cdot b]$ என்று நிறுவினுல் போதும்,

$$a' \in [a'] = [a], b' \in [b'] = [b] \Longrightarrow a' \equiv a \pmod{n},$$

$$b' \equiv b \pmod{n}$$

$$\Longrightarrow a' = a + qn, b' = b + pn, p, q \in Z$$

$$\Longrightarrow a' b' = ab + (ap + bq + pqn)n$$

$$\Longrightarrow a' b' \equiv ab \pmod{n}$$

$$\Longrightarrow a' b' \in [ab]$$

$$\Longrightarrow [a' b'] = [ab]$$

$\therefore \quad \cdot_n$ நல்வரையறுக்கப்பட்டது.

3·7·3. ‘முழு எண்கள் மட்டு n குலம்’ (Group of Integers modulo n)

தேற்றம்

$\forall n \in Z_+$, $(Z/n, +_n)$ என்ற கணித முறை ஒரு பரிமாற்றுக் குலமாகும். பொதுவாக, இந்தக் குலத்தை ‘முழு எண்கள், மட்டு n குலம்’ என்று சில ஆசிரியர்கள் கூறுவர்.

நிறுவல்

$+_n$ ஐ வரையறு.

$+_n$-ன் வரை இலக்கணப்படி, Z/n, $+_n$-ன் கீழ் அடைக்கப்பட்டது.

$\forall [a], [b], [c] \in Z/n,$

$$([a] +_n [b]) +_n [c] = [a+b] +_n [c]$$
$$= [a+b+c]$$
$$= [a+(b+c)]$$
$$= [a] +_n [b+c]$$
$$= [a] +_n ([b] +_n [c])$$

$\therefore$ $+_n$-க்குச் சேர்ப்புப் பண்பு,

$\forall [a], [b] \in Z/n, [a] +_n [b] = [a+b] = [b+a]$

$= [b] +_n [a]$ (வழக்கமான கூட்டலுக்குப் பரிமாற்றுப் பண்பு உண்டு)

$\therefore$ $+_n$-க்குப் பரிமாற்றுப் பண்பு உண்டு.

$[0] \in Z/n$ (Z/n-ன் வரை இலக்கணப்படி)

$\forall [a] \in Z/n, [a] + [0] = [a+0] = [a];$

$[0] + [a] = [0+a] = [a]$

$\therefore$ $[0]$ என்பது Z/n-ன் முற்றொருமை.

$[a] \in Z/n \Longrightarrow [n-a] \in Z/n.$

$\therefore$ $[a] +_n [n-a] = [a+n-a] = [n] = [0]$

$[n-a] +_n [a] = [n-a+a] = [n] = [0]$

$\therefore$ $[a]^{-1} = [n-a]$

$\therefore$ Z/n-ல் $+_n$-க்கு நேர்மாறுகள் உண்டு.

$\therefore$ $(Z/n, +_n)$ என்பது பரிமாற்றுக் குலம்.

பொதுவாக, $Z_n = \{[0], [1] \ldots [n-1]\}$ என்பதில் சுருக்கத்திற்காக [ ] ஐ நீக்கிவிட்டு,

$Z/n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ என்று எழுதுவது வழக்கமாகி விட்டது. இது தவறல்ல.

உதாரணமாக, $(Z/_5, +_5)$ ஐ

$+_5$	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]
[0]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]
[1]	[1]	[2]	[3]	[4]	[0]
[2	[2]	[3]	[4]	[0]	[1]
[3]	[3]	[4]	[0]	[1]	[2]
[4]	[4]	[0]	[1]	[2]	[3]

என்பதனை [ ] ஐ நீக்கிவிட்டு,

$+_5$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

என்ற மாதிரியும் எழுதுவதுண்டு.

3·7·4. முழு எண்கள் மட்டு n —கண வளையம் (Ring of integers modulo, n)

தேற்றம்

$\forall\, n \in Z, (Z/n, +_n, \cdot_n)$ என்பது ஒருமையுள்ள பரிமாற்றுக் கண வளையம்.

நிறுவல்

$+_n$ ஐயும் $\cdot_n$ ஐயும் வரையறு.

ஏற்கெனவே $(\mathbf{Z}/n, +_n)$ என்பது பரிமாற்றுக் குலம் என்று நிறுவினோம்.

வரை இலக்கணப்படி $\cdot n$ ஆல் $\mathbf{Z}/n$ அடைக்கப்பட்டது.

$\forall\ [a], [b], [c], \in \mathbf{Z}/n,$

$$
\begin{aligned}
[a] \cdot n\,([b] \cdot n\,[c]) &= [a] \cdot n\,([bc]) \\
&= [a\,b\,c] \\
&= [\,(ab)\,c] \\
&= [ab] \cdot [c] \\
&= ([a] \cdot n\,[b]) \cdot n\,[c]
\end{aligned}
$$

$\therefore$ $\cdot n$-க்குச் சேர்ப்புப் பண்பு உண்டு.

மேலும் $[a] \cdot n\,[b] = [ab] = [ba]$ [வழக்கமான பெருக்கலுக்குப் பரிமாற்றுப் பண்பு உண்டு.]

$$
\begin{aligned}
[a] \cdot n\,([b] +_n [c]) &= [a] \cdot n\,([b + c]) \\
&= [a\,(b + c\,] \\
&= [ab + ac]
\end{aligned}
$$
(வழக்கமான பெருக்கலுக்கு வழக்கமான கூட்டலின் மீது பங்கீட்டு விதி உண்டு)

$$
\begin{aligned}
&= [ab] +_n [ac] \\
&= [a] \cdot n\,[b] +_n [a] \cdot n\,[c]
\end{aligned}
$$

$\therefore$ $\cdot n$-க்கு $+_n$ மீது இடது பங்கீட்டு விதியுண்டு.

$\cdot n$-க்குப் பரிமாற்று விதியுண்டு என்பதால் $\cdot n$-க்கு $+_n$ மீது வலது பங்கீட்டு விதியுண்டு.

$[1] \in \mathbf{Z}/n$

$$
\begin{aligned}
\forall\ [a] \in \mathbf{Z}/n,\quad [a] \cdot [1] &= [\,(a)\,(1)\,] = [a] \\
[1] \cdot [a] &= [\,(1)\,(a)\,] = [a]
\end{aligned}
$$

$\therefore$ $[1]$ என்பது $\mathbf{Z}/n$-ல் $\cdot$ -ன் முற்றொருமை.

$\therefore$ $(\mathbf{Z}/n, +_n, \cdot n)$ என்பது ஒருமையுள்ள பரிமாற்றுக் கணவளையம்.

4. எண் அரங்கங்களும் களங்களும்

(Integral Domains and Fields)

4·1. வரை இலக்கணம்

பூச்சிய வகுப்பான்கள் (Zero divisors)

$(R, +, \cdot)$ என்ற கண வளையத்தில் a, b என்ற **பூச்சியமில்லா** (non zero) உறுப்புகள் $a \cdot b = 0$ என்றவாறு இருந்தால், a, b என்பவை $(R, +, \cdot)$-ன் பூச்சிய வகுப்பான்கள் எனப்படும்.

4·1·1. உதாரணங்கள்

1. 3·1·5 உதாரணம் 5 ஐப் பார்க்கவும்!

$S =$ கொடுக்கப்பட்ட ஒரு குறிப்பிட்ட கணம்.

$R = S$-ன் எல்லா உட்கணங்கள்

$+ : \ A + B = \{x \mid x \in A \cup B, x \notin A \cap B\}$

$\cdot : \ A \cdot B = \{x \mid x \in A \cap B\}$

என்றால், $(R, +, \cdot)$ என்பது ஒருமையுள்ள பரிமாற்றுக் கண வளையம் என்று கண்டோம்.

$S = \{1, 2, 3, 4\}$ என்க.

$R = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \ldots\}$

$\{2\} \neq \emptyset \ \{4\} \neq \emptyset$

ஆனால் $\{2\} \cap \{4\} = \emptyset$ $\quad \therefore \ \{2\} \cdot \{4\} = \emptyset$

$\therefore \ \{2\}, \{4\}$ என்பவை R-ன் பூச்சிய வகுப்பான்கள்.

2. $(M, +, \cdot)$ என்ற கண வளையத்தில்

M : 2×2 மெய்யான அணிகள்.

$+$: அணிகளின் கூட்டல்.

$\cdot$: அணிகளின் பெருக்கல்

M-ன் பூச்சிய உறுப்பு $= [0] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$[0] \neq A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad [0] \neq B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M$$

என்றால்,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = [0]$$

அதாவது $AB = [0], \quad A \neq [0], B \neq [0]$

∴ A-ம் B-ம் M-ன் பூச்சிய வகுப்பான்கள்.

3. $(Z_4, +_4, \cdot_4)$ ஒருமையுள்ள பரிமாற்றுக் கணவளையம்.

$+_4$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$\cdot_4$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

$2 \cdot_4 2 = 0$ என்பதில் $2 \neq 0$

$\therefore$ Z_4-க்கு 2 என்பது பூச்சிய வகுப்பான்.

4. $(Z_6, +_6, \cdot_6)$ ஒருமையுள்ள பரிமாற்றுக் கண வளையம்.

Z_6-க்கு 2, 3, 4 என்பவை பூச்சிய வகுப்பான்கள்.

5. 3·1·6 (4) ஐக் காண்க.

$(G, +, \cdot)$ என்ற ஒருமையுள்ள பரிமாற்றுக் கண வளையத்தில்

$G = R \times R$

$+ :\ (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$

$\cdot :\ (a, b) \cdot (c, d) = (ac, bd)$

$a \neq 0, \Longrightarrow (a, 0) \neq 0.$

$d \neq 0 \Longrightarrow (0, d) \neq 0.$

ஆனால் $(a, 0) \cdot (0, d) = (a \cdot 0, 0 \cdot d) = (0, 0).$

$\therefore$ G-ல் பூச்சிய வகுப்பான்கள் உண்டு.

4·1·2. தேற்றம்

$(R, +, \cdot)$ கண வளையமானால்,

(i) $r, s \in R, rs = 0 \Longrightarrow r = 0$ அல்லது $s = 0$

(ii) $a, b, c \in R, \quad c \neq 0, \quad ac = bc \Longrightarrow a = b$

என்பவை முற்றிலும் ஒன்றுனவை (equivalent).

நிபந்தனை (ii)-க்குப் 'பெருக்கலின் அடித்தல் விதி' என்பது பெயர். பூச்சியமில்லாத உறுப்புகளைத்தான் அடிக்க முடியும்.

நிபந்தனை (i) ஐ '$(R, +, \cdot)$-ல் பூச்சிய வகுப்பான்கள் இல்லை' என்றும் சொல்லலாம்.

இந்தத் தேற்றத்தை நிறுவவேண்டின், (i) $\Longrightarrow$ (ii) என்றும், (ii) $\Longrightarrow$ (i) என்றும் நிறுவவேண்டும்.

நிறுவல்

பாகம் 1

(i) $\Longrightarrow$ (ii) என்பதை நிறுவலாம்.

தற்கோள் : நிபந்தனை (i) உண்மை என்க.

$a, b, c \in R, \quad c \neq 0, \quad ac = bc$ என்க.

$\therefore \quad ac + (-bc) = bc + (-bc)$

$\therefore \quad ac - bc = 0$

$(a - b)\, c = 0$ (பங்கீட்டு விதி)

$\because \quad c \neq 0, a - b = 0$ (தற்கோள்)

$\therefore \quad a = b$

$\therefore$ (ii) உண்மை. $\in$ (i) $\Longrightarrow$ (ii)

பாகம் 2

(ii) $\Longrightarrow$ (i) என்பதை நிறுவலாம்.

தற்கோள் : நிபந்தனை (ii) உண்மை என்க.

$r, s \in R, rs = 0$ என்றும் $r \neq 0$ என்றும் கொள்க.

இப்பொழுது நிறுவ வேண்டியது $s = 0$

$r\,0 = 0$ (கண வளையத்தின் பண்பு : 3·2·3 காண்க.)

$= rs \qquad (\because \quad rs = 0)$

$\therefore \quad rs = r0$

$\because \quad r \neq 0$, தற்கோள்படி, $s = 0$

$\therefore$ (i) உண்மை.

$\therefore$ (ii) $\Longrightarrow$ (i)

$\therefore$ (i) $\Longleftrightarrow$ (ii)

4·1·3. வரை இலக்கணம்

எண் அரங்கம் (Integral Domain)

பூச்சிய வகுப்பான்கள் அற்ற ஒருமையுள்ள பரிமாற்றுக் கண வளையத்திற்கு எண் அரங்கம் (Integral Domain) என்பது பெயர்.

4·1·4. மாற்று வரை இலக்கணங்கள்

1. $(R, +, \cdot)$ என்ற ஒருமையுள்ள பரிமாற்றுக் கண வளையத்தில், $r, s \in (R\ +, \cdot), r \neq 0, s \neq 0 \Longrightarrow rs \neq 0$ என்றால் $(R, +, \cdot)$ எண் அரங்கம் எனப்படும்.

2. $(R, +, \cdot)$ என்ற ஒருமையுள்ள பரிமாற்றுக் கண வளையத்தில், $r, s \in (R, +, .)$, $rs = 0 \Longrightarrow r = 0$ அல்லது $s = 0$ என்றால் $(R, +, .)$ என்பது எண் அரங்கம் எனப்படும்.

3. $(R, +, .)$ என்ற ஒருமையுள்ள பரிமாற்றுக் கண வளையத்தில், $\forall\ a, b, x \in R, x \neq 0, ax = bx \Longrightarrow a = b$ என்றால் $(R, +, \cdot)$ என்பது எண் அரங்கம் எனப்படும்.

4·1·5. உதாரணங்கள்

1. முழு எண்களின் கண வளையம் (Ring of Integers) என்பது எண் அரங்கம். அதாவது $(Z, +, .)$ (Z : முழு எண்கள், $+$: வழக்கமான கூட்டல், $\cdot$: வழக்கமான பெருக்கல்) என்பது ஒருமையுள்ள பரிமாற்றுக் கண வளையம்.

இது உண்மை. ஏனெனில் Z-ல் எவையேனும் இரு உறுப்புகள் $a \neq 0, b \neq 0$ என்றால், $a \cdot b \neq 0$ என்பது உண்மை.

அதாவது, $(Z, +, .)$ -ல் பூச்சிய வகுப்பான்கள் கிடையாது.

2. $(Z_7, +_7, \cdot_7)$ என்பது ஒருமையுள்ள பரிமாற்றுக் கண வளையம்.

$+_7$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	0
2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	6	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4
6	6	0	1	2	3	4	5

$\cdot_7$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	1	3	5
3	0	3	6	2	5	1	4
4	0	4	1	5	2	6	3
5	0	5	3	1	6	4	2
6	0	6	5	4	3	2	1

$\cdot_7$ அட்டவணையிலிருந்து நாம் அறிவது,

$\forall\, x, y \in Z_7, \quad x \neq 0, y \neq 0 \Longrightarrow xy \neq 0.$

$0 \cdot 0 = 0$

$x \,.\, y = 0 \Longrightarrow x = 0,\ y \in 1, 2, 3, 4, 5, 6$

$x \cdot y = 0 \Longrightarrow y = 0,\ x \in 1, 2, 3, 4, 5, 6$

$\therefore$ $(Z_7, +_7, \cdot_7)$ என்பது எண் அரங்கம்.

3. $(M, +, \cdot)$ என்ற ஒருமையுள்ள பரிமாற்றுக் கணவளையத்தில்,

M : முழு எண்களை உறுப்புகளாகக் கொண்ட 2×2 அணிகள்.

$+$: அணிகளின் கூட்டல்

$\cdot$: அணிகளின் பெருக்கல்

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \text{ என்பதில், } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

$\therefore$ $(M, +, \cdot)$-ல் பூச்சிய வகுப்பான்கள் உண்டு.

$\therefore$ $(M, +, \cdot)$ எண் அரங்கம் அல்ல.

4. $(Z_4, +_4, \cdot_4)$ என்ற ஒருமையுள்ள பரிமாற்றுக் கண வளையம் எண் அரங்கம் அல்ல. ஏன்?

$$1 \cdot_4 2 = 2$$

$$3 \cdot_4 2 = 2$$

$\therefore \quad 1 \cdot_4 2 = 3 \cdot_4 2$ ஆனால் $1 \neq 3$

எண் அரங்கத்தின் மாற்று வ.இ. (3)-ன் படி $(Z_4, +_4, \cdot_4)$ எண் அரங்கம் அல்ல.

(அல்லது) $1 \cdot_4 2 = 0$ என்பதில் $1 \neq 0, \; 2 \neq 0$

$2 \cdot_4 2 = 0$ என்பதில் $2 \neq 0$

$1 \cdot_4 3 = 0$ என்பதில் $1 \neq 0 \; 3 \neq 0$

$1 \cdot_4 1 = 0$ என்பதில் $1 \neq 0$

$\therefore \quad (Z_4, +_4, \cdot_4)$-ல் பூச்சிய வகுப்பான்கள் உண்டு.

$\therefore \quad (Z_4, +_4, \cdot_4)$ என்பது எண் அரங்கமல்ல.

5. ஒரு குறிப்பிட்ட கணத்தின் எல்லா உட்கணங்கள் கண வளையம் (Ring of subsets of a set) என்பது எண் அரங்கமல்ல.

S: கொடுக்கப்பட்ட கணம்.

R: { S-ன் எல்லா உட்கணங்கள் }

$+$: $A + B \; \{x \mid x \in A \cup B, \, x \notin A \cap B\}$, அதாவது கணங்களின் சமச்சீர் வேறுபாடு (Symmetric difference of the sets)

$\therefore \quad A \cdot B \; \{x \mid x \in A \cap B\}$

$(R, +, \cdot)$ என்ற ஒருமையுள்ள பரிமாற்றுக் கண வளையம் எண் அரங்கமல்ல.

ஏனெனில், $S = \{1, 2, 3\}$ என்றால்

$$\{1\} \cap \{2\} = \emptyset, \quad \{1\} \neq \emptyset, \quad \{2\} \neq \emptyset.$$

$\therefore \quad (R, +, \cdot)$-ல் பூச்சிய வகுப்பான்கள் உண்டு.

6. 3·1·5 (6)-ல் கண்டவாறு

$J(\sqrt{\ })$: $\{a+b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$

$+$: வழக்கமான கூட்டல்.

$\cdot$: வழக்கமான பெருக்கல்.

$(J(\sqrt{2}), +, \cdot)$ என்பது ஒருமையுள்ள பரிமாற்றுக் கணவளையம் என்று படித்தோம்.

$$(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})=0 \Longrightarrow (ac+2bd)+(bc+ad)\sqrt{2}=0$$

$$\Longrightarrow ac+2bd=0 \text{ அல்லது } bc+ad=0$$

$$\Longrightarrow a=b=0 \text{ அல்லது } c=d=0$$

$$\Longrightarrow a+b\sqrt{2}=0 \text{ அல்லது } c+d\sqrt{2}=0$$

$\therefore$ $(J(\sqrt{2}), +, \cdot)$-ல் பூச்சிய வகுப்பான்கள் இல்லை.

$\therefore$ $(J(\sqrt{2}), +, \cdot)$ என்பது எண் அரங்கம்.

4·1·6. தேற்றம்

$(\mathbf{Z}/_{(n)}, +_n, \cdot_n)$ ஓர் எண் அரங்கம் $\Longleftrightarrow$ n ஒரு பகா எண்.

கவனிக்க

கணிதத் தர்க்க நூலில் (Mathematical logic)

$p \Longrightarrow q$ என்பதும், $\sim q \Longrightarrow \sim p$ என்பதும் முற்றிலும் ஒன்றுனவையே. இதைத் தழுவிக் கீழே பாகம் 1 நிறுவப்பட்டுள்ளது.

நிறுவல்

பாகம் 1

n ஒரு பகா எண் அல்ல என்க.

$\therefore$ n ஒரு பகுநிலை எண்

$\therefore\ n = n_1 n_2;\ 0 \neq n_1,\ n_2 < n$ என்றவாறு n ஐக் காரணிப் படுத்தலாம்.

$$[n_1] \cdot_n [n_2] = [n_1 n_2] = [n] = [0]$$

ஆனால் $[n_1] \neq 0, \quad [n_2] \neq 0.$

$\therefore\ [n_1], [n_2]$ என்பவை Z_n-ன் பூச்சிய வகுப்பான்கள்.

$\therefore\ (Z_n, +_n, \cdot_n)$ எண் அரங்கமல்ல.

பாகம் 2

n பகா எண் என்றும் $[a] \cdot_n [b] = [0],\ [a], [b], \in Z/(n)$ என்றும் கொள்க.

$$\therefore\ [0] = [a]\,[b] = [ab]$$

$[ab] = [0] \Longrightarrow ab$ என்பது n-ன் மடங்கு

$\Longrightarrow n/ab$

$\Longrightarrow n/a$ அல்லது $n/b \quad \because\ n$ பகா எண்.

$n/a \Longrightarrow [a] = [0]$

$n/b \Longrightarrow [b] = [0]$

$\therefore\ Z/(n)$-ல் பூச்சிய வகுப்பான்கள் இல்லை.

$\therefore\ (Z_{(n)}, +_n, \cdot_n)$ ஓர் எண் அரங்கம்.

4·2. களங்கள் (Fields)

4·2·1. வரை இலக்கணம்

களம்

ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட உறுப்புகளைக் கொண்ட ஒருமையுடைய பரிமாற்றுக் கண வளையம் $(R, +, .)$-ல் ஒவ்வொரு பூச்சியமில்லா உறுப்புக்கும் பெருக்கலின் நேர்மாறு $(R, +, .)$-ல் இருந்தால், $(R, +, \cdot)$ ஐக் 'களம்' என்போம். களத்தை F என்று குறியிடுவது வழக்கம்.

இதையே வேறு விதமாக வரையறுக்கலாம்.

4·2·2. வரை இலக்கணம்

F: வெற்றற்ற கணம்

$+$: 'கூட்டல்'
$\cdot$: 'பெருக்கல்'
} F-ன் மீதான ஈரிணைச் செயலிகள்.

$(F, +, .)$ என்ற கணித முறை

(i) $(F, +)$: 0 ஐ முற்றொருமையாக உடைய ஒரு பரிமாற்றுக் குலம்.

(ii) $(F - \{0\}, \cdot)$: 1 ஐ முற்றொருமையாக உடைய பரிமாற்றுக் குலம்.

(iii) $\forall$ மும்மை $a, b, c \in F$,

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

என்றவாறு அமைந்தால், $(F, +, .)$ என்பது 'களம்' எனப்படும்.

4·2·3. உதாரணங்கள்

1. $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$ என்பது களம்.

$\mathbf{Q}$: எல்லா விகிதமுறு (பின்னங்கள்) எண்கள் கணம்.

$= \{ x \mid x = \frac{m}{n}, m, n \in \mathbf{Z}, n \neq 0 \}$

$+$: வழக்கமான கூட்டல்

$\cdot$: வழக்கமான பெருக்கல்.

$(\mathbf{Q}, +, \cdot)$ என்பது ஒருமையுள்ள பரிமாற்றுக் கண வளையம் (நிறுவுக!)

$n \neq 0, m \neq 0, \frac{m}{n} \in \mathbf{Q}$-ன் ; $\cdot$-ன் நேர்மாறு $\frac{n}{m} \in \mathbf{Q}$ என்க.

$\therefore$ $\mathbf{Q}$ என்பது களம்.

2. $(\mathbf{R}, +, \cdot)$ என்பது ஒருமையுள்ள பரிமாற்றுக் கண வளையம் (நிறுவுக!)

$0 \neq a \in \mathbf{R}$ என்றால், $a \cdot \frac{1}{a}$ என்றவாறு $\frac{1}{a}$ என்ற மெய்யெண் $\mathbf{R}$-ல் உள்ளது. $\therefore$ $(\mathbf{R}, +, \cdot)$ ஒரு களம்.

3. $(C, +, \cdot)$ என்ற கணித முறையில்

C: கலப்பெண்கள் கணம்

$+$: வழக்கமான கூட்டல்

$\cdot$: வழக்கமான பெருக்கல்

$(C, +, \cdot)$ என்பது களம். எப்படி?

C-ன் உறுப்பின் உரு மாதிரி: $a + bi, \quad a, b \in \mathbf{R}$;

$a + bi, c + di \in C$ என்றால் $(a + bi) + (c + di)$

$$= (a + c) + (b + d)i \quad \in C$$

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i \quad \in C$$

$\therefore$ C என்பது $+$ ஆலும், $\cdot$ ஆலும் அடைக்கப்பட்டது.

$$[(a+bi)+(c+di)]+(e+fi) = [(a+c)+(b+d)i]+(e+fi)$$
$$= (a + c + e) + (b + d + f)i$$
$$= [a + (c+e)] + [b+(d+f)]i$$
$$= (a+bi)+[(c+e)+(d+f)i]$$
$$= (a+bi)+[(c+di)+(e+fi)]$$

$\therefore$ $+$-க்குப் பரிமாற்றுப் பண்பு உண்டு.

$$(a + bi) + (0 + 0i) = (a + 0) + (b + 0)i$$
$$= a + bi$$
$$(0 + 0i) + (a + bi) = (0 + a) + (0 + b)i$$
$$= a + bi$$

$\therefore$ $(0 + 0i)$ என்பது C-ன் முற்றொருமை.

$$(a + bi) + (-a-bi) = (a - a) + (b - b)i = 0 + 0i$$
$$(-a-bi) + (a + bi) = (-a + a) + (-b + b)i$$
$$= 0 + 0i$$

$\therefore$ $a + bi$-ன்கூட்டலின் நேர்மாறு $-a-bi \in C$.

$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)\, i$

$= (c + a) + (d + b)\, i$ (மெய்யெண்களின் +-ன் பரிமாற்றுப் பண்பு)

$= (c + di) + (a + bi)$

∴ +-க்குப் பரிமாற்றுப் பண்பு உண்டு.

∴ $(C, +)$ என்பது அபீலியன் குலம்.

$[(a + bi) \cdot (c + di)] \cdot (e + fi) = [(ac - bd) + (bc + ad)\, i] \cdot (e + fi)$

$= [(ac - bd)\, e - (bc + ad)\, f]$

$+ [(bc + ad)e + (ac - bd)f]i$

$= [a\,(ce - df) - b\,(de + cf)]$

$+ [b\,(ce - df) + a\,(de + cf)]\, i$

$= (a + bi) \cdot [(c + di) \cdot (e + fi)]$

∴ •-க்குச் சேர்ப்பு விதி உண்டு.

$(a + bi) \cdot [(c + di) + (e + fi)] = (a + bi)\, [(c + e) + (d + f)\, i]$

$= [a\,(c + e) - b\,(d + f)]$
$+ [b\,(c + e) + a\,(d + f)]\, i$

$= [(ac - bd) + (ae - bf)]$
$+ [(bc + ad) + (be + af)]\, i$

$= [(ac - bd) + (bc + ad)\, i]$

$+ [(ae - bf) + (be + af)i]$
(+-ன் வ.இ.)

$= (a + bi) \cdot (c + di)$
$+ (a + bi) \cdot (e + fi)$

∴ •-க்கு +-ன் மீது இடது பங்கீட்டு விதி உண்டு.

$$(a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (bc+ad)i$$
$$= (ca-db) + (cb+da)i$$
$$= (c+di)\cdot(a+bi)$$

$\therefore$ $\cdot$-க்குப் பரிமாற்று விதி உண்டு.

$\therefore$ $\cdot$-க்கு $+$-ன் மீது வலது பங்கீட்டு விதி உண்டு.

$$(a+bi)\cdot(1+0i) = (a\cdot 1-b\cdot 0) + (b\cdot 1+a\cdot 0)i$$
$$= a+bi$$
$$(1+0i)\cdot(a+bi) = a+bi$$

$\therefore$ $1+0i$ என்பது $(C, +, \cdot)$-ன் ஒருமை.

$\therefore$ $(C, +, \cdot)$ என்பது ஒருமையுள்ள பரிமாற்றுக் கண வளையம்.

$$a^2+b^2 \neq 0, \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{(-b)i}{a^2+b^2} \in C,$$

$$(a+bi)\cdot\left[\frac{a}{a^2+b^2} + \frac{(-b)i}{a^2+b^2}\right] = \left[a\cdot\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b(-b)}{a^2+b^2}\right] + \left[b\cdot\frac{a}{a^2+b^2} + \frac{a(-b)}{a^2+b^2}\right]i$$
$$= 1+0i$$

$\therefore$ $\cdot$-க்குப் பரிமாற்று விதி உண்டானதால்,

$\frac{a}{a^2+b^2} + \frac{(-b)i}{a^2+b^2}$ என்பது $(C, +, \cdot)$-ன், $\cdot$-ன் நேர்மாறு $\in C$

$\therefore$ $(C, +, .)$ என்பது கணம்.

5. 3.1·5 (6)-ல் $(J(\sqrt{2}), +, \cdot)$ என்பது ஒருமையுள்ள பரிமாற்றுக் கண வளையம் என்று கண்டோம்.

$J(\sqrt{2})$-ன் ஒருமை $1+0\sqrt{2}$.

$$\frac{1}{a+b\sqrt{2}} = \frac{1}{a+b\sqrt{2}} \cdot \frac{a-b\sqrt{2}}{a-b\sqrt{2}} = \frac{a-b\sqrt{2}}{a^2-2b^2}$$

$$= \frac{a}{a^2-2b^2} + \frac{(-b)\sqrt{2}}{a^2-2b^2}, \quad a^2-b^2 \neq 0$$

$$(a+b\sqrt{2}) \cdot \frac{1}{a+b\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{a+b\sqrt{2}} \cdot (a+b\sqrt{2}) = 1 = 1+0\sqrt{2}$$

$a+b\sqrt{2}$ ன் பெருக்கலின் நேர்மாறு $= \dfrac{1}{a+b\sqrt{2}}$

$$= \frac{a}{a^2-2b^2} + \frac{(-b)\sqrt{2}}{a^2-2b^2}$$

பொதுவாக, $\dfrac{a}{a^2-2b^2}, \quad \dfrac{-b}{a^2-2b^2} \notin Z$

$$\therefore \frac{a}{a^2-2b^2} + \frac{(-b)\sqrt{2}}{a^2-2b^2} \notin J(\sqrt{2})$$

$\therefore (a+b\sqrt{2})$-ன் பெருக்கலின் நேர்மாறு $\notin J(\sqrt{2})$

மற்ருேர் உதாரணம் :

$3+0\sqrt{2} \in J(\sqrt{2})$

பெருக்கலின் நேர்மாறு $= \dfrac{1}{3+0\sqrt{2}} = \dfrac{1}{3},$

ஏனெனில் $\dfrac{1}{3} \cdot 3 = 3 \cdot \dfrac{1}{3} = 1$

ஆனுல் $\dfrac{1}{3+0\sqrt{2}} = \dfrac{1}{3} \notin J(\sqrt{2})$

$\therefore (J(\sqrt{2}), +, \cdot)$ களமல்ல.

6. $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$ என்பது ஒருமையுள்ள பரிமாற்றுக் கண வளையம். $3 \in \mathbf{Z}$-க்குப் பெருக்கலின் நேர்மாறு $\frac{1}{3}$ · ஆனுல் $\frac{1}{3}$ என்பது முழு எண் அல்ல. $\therefore$ $\frac{1}{3} \notin \mathbf{Z}$ ∴ $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$ என்பது களமல்ல.

7. $F = \{ a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbf{Q} \}$ என்ருல்

$(F, +, \cdot)$: ஒருமையுள்ள பரிமாற்றுக் கண வளையம்.

$(a + b\sqrt{2})^{-1} = a^2 - b^2 \neq 0,\ \frac{a}{a^2 - 2b^2} + \frac{(-b)\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2} \in \mathbf{Q}$

$\therefore$ $(F, +, \cdot)$ என்பது களம்.

8. $(F, +, \cdot)$ என்ற கணித முறையில்

$F = \{ 0, 1 \}$, அதாவது, முழு எண்கள், மட்டு 2

+-ன் வரையறை

+	0	1
0	0	1
1	1	0

· -ன் வரையறை

·	0	1
0	0	0
1	0	1

என்ருல், $(F, +, \cdot)$ என்பது களமாகும். எப்படி ?

+ அட்டவணைப்படி, F ஆனது, + ஆல் அடைக்கப்பட்டது (R1 நிறைவேறியது.

0 என்பது +-ன் முற்றொருமை. (R3 நிறைவேறியது)

$1 + 1 = 1 = 0 + 1 = 1 + 0$. ∴ + க்குப் பரிமாற்றுப் பண்பு உண்டு. (R5 நிறைவேறியது)

$(0+1)+1 = 1+1 = 0 = 0+0 = 0+(1+1)$.

∴ $+$, சேர்ப்புப் பண்பு உடையது ($R2$ சரி).

$1+1=0$ என்பதால், 1-ன் $+$-ன் நேர்மாறு $1 \in F$.

($R4$ நிறைவேறியது)

∴ $(F, +)$ அபீலியன் குலம்.

∴ அட்டவணைப்படி, F ஆனது $\cdot$ ஆல் அடைக்கப்பட்டது ($R6$ சரி)

$1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0$ ∴ $\cdot$க்குச் சேர்ப்புப் பண்பு உண்டு ($R7$ சரி)

$$\left.\begin{array}{l} 1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0 \\ 1 \cdot 1 = 1 \end{array}\right\}$$ ∴ 1 என்பது $\cdot$-ன் ஒருமை.

∴ $\cdot$-க்குப் பரிமாற்றுப் பண்பு உண்டு.

$$1 \cdot (0+1) = 1 \cdot 1 = 1 = 0+1 = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1$$

$$1 \cdot (1+1) = 1 \cdot 0 = 0 = 1+1 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1$$

$$0 \cdot (1+0) = 0 \cdot 1 = 0 = 0+0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0$$

∴ $\cdot$-க்கு $+$-ன்மீது இடது பங்கீட்டு விதி உண்டு.

$\cdot$-க்கும், $+$-க்கும் பரிமாற்றுப்பண்பு உண்டென்பதால், $\cdot$-க்கு $+$-ன் மீது வலது பங்கீட்டு விதி உண்டு.

∴ $(F, +, \cdot)$ ஒருமையுள்ள பரிமாற்றுக் கண வளையம்.

பெருக்கலில், $1^{-1} = 1 \in F$, $0^{-1} = 1 \in F$

∴ $(F, +, \cdot)$ ஒரு களம்.

4·3. களத்தின் எளிய பண்புகள்

4·3·1. தேற்றம்

$(F, +, \cdot)$ என்ற களத்தில், $a, b \in F$, $a \neq 0$ என்றால்

$a \cdot x = b$ என்றவாறு F-ல் ஒரே ஓர் உறுப்பு x உள்ளது.

நிறுவல்

$a \in F$, $a \neq 0$, $(F, +, \cdot)$ ஒரு களம் $\Longrightarrow a \cdot a^{-1} = 1$

என்றவாறு,

F-ல் a^{-1} என்ற உறுப்பு உள்ளது.

$a \cdot x = b$ என்ற சமன்பாட்டில், x-க்குப் பதில் $a^{-1} \cdot b$ ஐப் பிரதியிடு.

மேலும் $a^{-1} \in F, b \in F \Longrightarrow a^{-1} \cdot b \in F$ ($\cdot$-ன் அடைப்புப் பண்பு)

$$a \cdot x = a \cdot (a^{-1} \cdot b) = (a \cdot a^{-1}) \cdot b = 1 \cdot b = b$$

x-க்கு $a^{-1}b$ ஐத் தவிர வேறெந்த F-ன் உறுப்பையும் பிரதியிட முடியாது.

முடியுமானால் $a \cdot x = b$, $a \cdot x_1 = b$ என்க.

$$\therefore \quad a \cdot x = a \cdot x_1$$

$$\therefore \quad a^{-1} \cdot (a \cdot x) = a^{-1} \cdot (a \cdot x_1)$$

$$\therefore \quad (a^{-1} \cdot a) \cdot x = (a^{-1} \cdot a)\, x_1 \quad (\cdot\text{-ன் சேர்ப்புப் பண்பு})$$

$$\therefore \quad 1 \cdot x = 1 \cdot x_1$$

$$\therefore \quad x = x_1 \qquad (1 \text{ என்பது ஒருமை}).$$

4·3·2· தேற்றம்

ஒவ்வொரு களமும் ஓர் எண் அரங்கம்.

இருந்தாலும், இந்தக் கூற்றின் மறுதலை எப்போதும் உண்மை இல்லை. அதாவது, களங்கள் ஆகாத எண் அரங்கங்களும் உண்டு.

நிறுவல்

பாகம் 1

$(F, +, \cdot)$ களமென்க.

∴ $(F, +, \cdot)$ என்பது ஒருமையுள்ள பரிமாற்றுக் கணவளையமாகும்.

$(F, +, \cdot)$ ஐ எண் அரங்கம் என நிறுவ, $(F, +, \cdot)$-ல் பூச்சிய வகுப்பான்கள் இல்லை என்று நிறுவினால் போதும்.

$r \neq 0, rs \neq 0$ என்றவாறு உறுப்புகள் r, s என்பவை $(F, +, \cdot)$-ல் இருக்கட்டும்.

$r \neq 0$, $(F, +, \cdot)$ களம் $\Longrightarrow r^{-1}$ ஆனது F-ல் இருக்கிறது.

$(F, +, \cdot)$-ன் ஒருமை 1 என்க.

$\therefore \quad 0 = r^{-1} \cdot 0 = r^{-1} \cdot (r \cdot s) = (r^{-1} \cdot r) \cdot s = 1 \cdot s = s$

$\therefore \quad s = 0 \Longrightarrow (F, +, \cdot)$ -க்குப் பூச்சிய வகுப்பான்கள் கிடையாது.

பாகம் 2

$(Z, +, \cdot)$ என்ற முழு எண்களின் கண வளையம் ஓர் எண் அரங்கம் என முன்னமேயே கண்டோம். ஆனால் இந்தக் கண வளையத்தில் 1-க்கும், — 1-க்கும் தவிர, வேறெந்த உறுப்புக்கும் பெருக்கலின் நேர்மாறு இல்லை. $\therefore$ $(Z, +, \cdot)$ களமல்ல.

இந்த எதிர் உதாரணமே (counter example) பாகம் 2 ஐ நிறுவுகிறது.

4·3·3· தேற்றம்

ஒவ்வொரு முடிவுள்ள எண் அரங்கமும் ஒரு களமாகும்.

நிறுவல்

$(R, +, \cdot)$ என்பது முடிவுள்ள எண் அரங்கம் என்க.

$0 \neq b \in R$ என்க.

$0 \neq b \in R$-ன் பெருக்கலின் நேர்மாறு R-ல் உள்ளது என்று நிறுவினால் போதும். R-ன் பூச்சியமில்லா உறுப்புகள் அனைத்தும் $a_1, a_2, \ldots, a_n$ என்க.

$S = \{ a_1, a_2, \ldots, a_n \}$ என்க.

$S' = \{ ba_1, ba_2, \ldots, ba_n \}$ என்க.

$(R, +, \cdot)$ என்பது எண் அரங்கமாதலால், எவையேனும் இரு பூச்சியமில்லா உறுப்புகளின் பெருக்கமும் ஒரு பூச்சியமில்லாத உறுப்பாகும்.

$\therefore$ S' -ல் உள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பும் S-ல் உள்ளது.

$\therefore$ $S' \subseteq S$.

S'-ல் உள்ள உறுப்புகள் எல்லாம் வெவ்வேருனவை — ஏனெனில்

S'-ல், $i \neq j$, $ba_i = ba_j$ என்ருல் $a_i = a_j$ (எண் அரங்கத்தில் பெருக்கலின் அடித்தல் விதி)

$\therefore$ S-ல் உள்ள ஒவ்வோர் உறுப்புக்கும் ஏற்ப, S-ல் ஒரே ஓர் உறுப்புத்தான் உண்டு.

S-லும், S'-லும் தனித்தனியே n உறுப்புகள் உள்ளன.

$\therefore$ $S' = S$.

$(R, +, \cdot)$-ல் ஒருமை 1 உண்டென்பதாலும், $1 \neq 0$ என்பதாலும் (காண்க. தேற்றம் 3·4·5), $1 \in S$.

$\because$ $S = S'$, $\therefore$ $1 \in S'$.

$\therefore$ S'-ல், $1 = b \cdot a_s$, ஏதோ ஒரு $a_s \in S$

$\therefore$ b-ன் பெருக்கலின் நேர்மாறு $a_s \in R$

S'ஐ அமைக்கும்போது S-ன் உறுப்புகளே, $b \in R$ என்னும் யாதாவதொரு பூச்சியமில்லா உறுப்பினுல் பெருக்கிறேம்.

$b \in R$-க்குப் ப்திலாக, R-ன் வேறெந்த பூச்சியமில்லாத உறுப்பைப் பயன்படுத்தினுலும், அந்த உறுப்பின் பெருக்கலின் நேர்மாறு R-ல் உள்ளது என்று நிறுவலாம்.

$\therefore$ $(R, +, \cdot)$ பூச்சியமில்லாத ஒவ்வோர் உறுப்பின் பெருக்கலின் நேர்மாறும் R-ல் உள்ளது. $\therefore$ $(R, +, \cdot)$ என்பது ஒரு களம்.

4·3·4· தேற்றம்

$(Z/_n, +_n, \cdot_n)$ என்ற முழு எண்கள், மட்டு n, கண வளையம் ஒரு களம் $\Longleftrightarrow$ n ஒரு பகா முழு எண்.

நிறுவல்

பாகம் 1 $\Longrightarrow$

கணிதத் தர்க்க இயலில் (Mathematical logic),

p-ம், q-ம் இரு கூற்றுகள் என்ருல், $\sim p$, $\sim q$ என்பவை முறையே. p, q-க்களின் எதிர்க் கூற்றுகள் என்ருல்,

$p \Longrightarrow q$ என்பதும், $\sim q \Longrightarrow \sim p$ என்பதும் முற்றிலும் ஒன்ருனவை. இந்த உண்மையைப் பயன்படுத்தி பாகம் 1 ஐ நிறுவுவோம்.

n பகா எண் அல்ல என்று வைத்துக் கொள்வோம். அப்படியாளுல் n பகுநிலை எண் என்பதால்,

$n = n_1 n_2$, $1 < n_1 < n$, $1 < n_2 < n$ என்றவாறு n ஐக் காரணிப்படுத்தலாம்.

n_1-ம், n_2-ம், n-ன், மடங்குகள் அல்ல.

$\therefore \quad [n_1] \neq [0], [n_2] \neq [0]$

$[n_1] \cdot_n [n_2] = [n_1 n_2] = [n] = [0], [n_1] \neq [0], [n_2] \neq [0]$

$\therefore \quad [n_1], [n_2]$ என்பவை $(Z/_n, +_n, \cdot_n)$-ன் பூச்சிய வகுப்பான்கள்.

$\therefore \quad (Z/n \ +_n, \cdot_n)$ என்பது களமல்ல.

நாம் இப்பொழுது நிறுவியது: n பகா எண் அல்ல $\Longrightarrow (Z/_n, +_n, \cdot_n)$ களமல்ல.

$\therefore \quad (Z/_n, +_n, \cdot_n)$ என்பது களம் $\Longrightarrow n$ பகா எண்.

பாகம் 2

தற்கோள். n ஒரு பகா எண் என்க.

நிறுவ: $(Z/_n, +_n, \cdot_n)$ ஒரு களம்.

$Z/_n$-ன் யாதாவதொரு பூச்சியமில்லாத உறுப்பு $[a]$ என்க. $[a] \neq 0 \Longrightarrow a$ என்பது n-ன் மடங்கு அல்ல.

$[a] \in Z/_n, 0 < a < n$

n பகா எண் ஆனதாலும், $a < n$ என்பதாலும், n-க்கும் a-க்கும் பொதுவான காரணிகள் கிடையாது.

$\therefore \quad a \cdot r + n \cdot s = 1$ என்றவாறு, r, s என்ற முழு எண்கள் உள்ளன.

$$\therefore\ 1 = a \cdot r + n \cdot s \Longrightarrow [1] = [a \cdot r + n \cdot s]$$
$$= [a \cdot r] +_n [n \cdot s]$$
$$= [a] \cdot_n [r] +_n [0]$$
$$= [a] \cdot_n [r]$$

$(Z/_n, +_n, \cdot_n)$ பரிமாற்றுக் கண வளையமாதலால்,

$[1] = [a] \cdot_n [r] = [r] \cdot_n [a]$

$\therefore$ $[a]$-ன் பெருக்கலின் நேர்மாறு $[r]$ என்பதாகும்.

$r \in Z \Longrightarrow r$ என்பது $Z/_n$-ன் பிரிவினையில் ஏதாவதொரு சமநிலை இனத்தில் இருக்கும்.

$\Longrightarrow r$ இருக்கும் சமநிலை இனத்தை $[r]$ என்றும் அழைக்கலாம்.

$\Longrightarrow [r] \in Z/_n$.

$\therefore$ $\forall\, [a] \neq [0]$, $[a]$-ன் நேர்மாறு $[r]$ ஆனது $[Z/_n, +_n, \cdot_n)$-ல் உண்டு. $\therefore$ $(Z/_n, +_n, \cdot_n)$ என்பது களம்.

4·4. வரிசைப்பட்ட எண் அரங்கங்கள் (Ordered Integral Domains)

மெய்யெண்கள் களம், விகிதமுறு எண்கள் களம்—இவற்றின் உறுப்புகளுக்குத் தனிப்பட்ட முக்கியமான ஒரு பண்பு உண்டு. இந்தப் பண்பின்படி, உறுப்புகளை ஒன்றுக்கொன்று ஒப்பிடலாம். அதாவது, ஓர் உறுப்பு மற்றொன்றை விடப் ‘பெரியது’ அல்லது ‘சிறியது’ என்று சொல்ல முடியும். இந்த மாதிரி ஒப்பிடுதலை விளக்கும் விதிக்கு (Rule) வரிசைப்படுத்தல் (Ordering) என்பது பெயர். ‘வரிசைப்படுத்த’லால் வரையறுக்கப்பட்ட இயற்கணித முறைக்கு ‘வரிசைப்பட்ட இயற்கணித முறை’ என்பது பெயர்.

முழு எண்கள் கண வளையம் $(Z, +, \cdot)$ ஓர் எண் அரங்கமாகும். முழு எண்களை ஒரு நேர்க்கோட்டின் மீது இட்ட புள்ளிகளாகக் கருதுவோம்.

நேர்க்கோட்டில் b-க்கு இடமாக a அமைந்தால், $a < b$ என்கிறோம். $(Z, +, \cdot)$ மீது வரையறுக்கப்பட்ட ஒரு வரிசைப்

படுத்தலுக்கு இது ஓர் உதாரணம். மேற்கண்ட வரிசைப்

$-2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad a \quad b$

படுத்தலைத் தவிர, (Z, +, ·)-க்கு வேறு வகையான வரிசைப் படுத்தல்கள் இருக்கலாம்.

மேற்கூறிய வரிசைப்படுத்தலை, '$a - b$ முழு எண்ணானால் $a < b$' என்று வரையறுக்கலாம்.

இந்த உதாரணத்திலுள்ள முழு எண்களுக்கும், வரையறுக்கப் பட்ட வரிசைப் படுத்தலுக்கும் உள்ள தொடர்பைக் கீழ்க்காணும் வரை இலக்கணத்தால் பொது விதியாக்கலாம் (generalise).

4·4·1. வரை இலக்கணம்

$(D, +, \cdot)$ என்ற எண் அரங்கத்தின் ஓர் உட்கணம் D_p ஆனது,

$D1$ (i) $\forall\, a, b \in D_p$, $a \cdot b$ ஆனது D_p-ல் உள்ளது.

$D2$ (ii) $\forall\, a, b \in D_p$, $a + b$ ஆனது D_p-ல் உள்ளது.

$D3$ (iii) D-ல் உள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பு a-க்கும் 'முப்பாக விதி' (Law of Trichotomy) உண்டு. அதாவது, $a = 0$ அல்லது a ஆனது D_p-ல் இருக்கிறது அல்லது $-a$ ஆனது, D_p-ல் இருக்கிறது என்பவற்றுள் ஏதாவதொன்றுதான் உண்மை.

D_p-ன் உறுப்புகளுக்கு நேர் உறுப்புகள் (Positive elements) என்றும், D_p-ல் இல்லாத பூச்சியமில்லாத உறுப்புகளுக்கு எதிர் உறுப்புகள் (negative elements) என்றும் பெயர்.

இதனால், மேற்கண்ட வரை இலக்கணத்தின் மூன்றாவது பண்பான முப்பாக விதி ஆனது, 'D-ன் ஒவ்வோர் உறுப்பு a-க்கும், a ஆனது நேர் என்றாவது, $a = 0$ என்றாவது, அல்லது $-a$ நேர், அதாவது a, எதிர் என்றாவது கூறுவனவற்றுள் ஒன்று தான் உண்மையாய் இருக்க வேண்டும்' என்றாகும்.

4·4·2. வரை இலக்கணம்

'வரிசைப்பட்ட களம்' (Ordered field)

ஒரு வரிசைப்பட்ட எண் அரங்கம் களமாகவும் இருந்தால் அந்த எண் அரங்கத்தை **'வரிசைப்பட்ட களம்'** என்போம்.

4·4·3. உதாரணங்கள்

1. $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$ என்ற முழு எண்கள் எண் அரங்கத்தில் இன்னின்ன முழுஎண்கள் நேர், இன்னின்னவை 0, இன்னின்னவை எதிர் என்று வரிசைப்படுத்த நமக்குத் தெரியும். $\therefore$ $D3$ நிறைவேறியது. Z-ல் உள்ள எல்லா நேர் முழு எண்களும் அமைக்கும் கணம் $\mathbf{Z}_p$ என்றால், $\mathbf{Z}_p$-ல் எவையேனும் இரு உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகையும், பெருக்குத் தொகையும் $\mathbf{Z}_p$-ல் உள்ளன. சுருக்கமாக, இரு நேர் முழு எண்களின் கூட்டுத் தொகையும் பெருக்குத் தொகையும் நேர் முழு எண்களே.

$\therefore$ $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$ ஒரு வரிசைப்பட்ட எண் அரங்கம்.

இது போலவே, $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbf{R}, +, \cdot)$ என்பவையும் வரிசைப் பட்ட எண் அரங்கங்களே.

2. $(J(\sqrt{2}), +, \cdot)$: ஒரு வரிசைப்பட்ட எண் அரங்கம்.

ஏனெனில்

$J(\sqrt{2})$-ன் எந்த உறுப்பும் மெய்யெண் ஆகும்.

$a + b\sqrt{2}$ என்ற உறுப்பின் உருமாதிரியில் $a, b \in \mathbf{Z}$, $+$: வழக்கமான கூட்டல்; மெய்யெண்களுக்கு $D1$, $D2$, $D3$ பண்புகள் உண்மையாவதால், $J(\sqrt{2})$-ன் உறுப்புகளுக்கும் அவை உண்மை.

$\therefore$ $(J\sqrt{2}), +, \cdot)$ ஒரு வரிசைப்பட்ட எண் அரங்கம்.

3. $(C, +, \cdot)$ என்ற கணித முறையில்,

C: கலப்பெண்கள் கணம்

$+$: வழக்கமான கூட்டல்,

$\cdot$: வழக்கமான பெருக்கல்,

$(C, +, \cdot)$ என்பது களம். (காண்க: 4·2·3. (3))

C-ன் நேர் உறுப்புகள் அடங்கிய கணம் C_p என்க.

C-ல் i என்ற உறுப்பு உண்டு.

$t \neq 0$. $D3$ உண்மையானல் $i \in C_p$ அல்லது $-i \in C_p$

$i \in C_p$ என்க. $D2$ உண்மையானல்,

$$i \in C_p,\ i \in C_p \Longrightarrow i \cdot i \in C_p$$
$$\Longrightarrow -1 \in C_p$$

மறுபடியும், $i \in C_p, -i \in C_p \Longrightarrow (i) \cdot (-1) \in C_p$
$$\Longrightarrow -i \in C_p$$

(·-ன் வ. இ. படி).

$\therefore\ i \in C_p, -i \in C_p$

ஒரே சமயத்தில் i-ம், $-i$-ம் C_p-ல் உள்ளன.

இது $D3$ முப்பாக விதியை மீறுகிறது.

$\therefore$ $(C, +, \cdot)$ என்ற களம் வரிசைப்பட்டது அல்ல.

$(D, +, \cdot)$ என்ற வரிசைப்பட்ட எண் அரங்கத்தில் D_p என்பது நேர் உறுப்புகளைக் கொண்ட கணமென்றல்,

$x, y \in D, y - x \in D_p$ என்றல் 'x என்ற உறுப்பு y என்ற உறுப்புக்குக் குறைந்தது' அல்லது, 'y என்பது x-க்கு அதிகமானது' என்போம், இதை முறையே, $x < y$, $y > x$ என்று குறியிடுவது வழக்கம்.

$a > 0$ என்றல் $a \in D_p$ என்பது பொருள்.

$\therefore$ $a > 0$ என்றல் a, நேர் என்பது பொருள்.

$a < 0$ என்றல் a எதிர் என்று பொருள்; அதாவது, $-a$ நேர்,

அதாவது, $-a \in D_p$.

இந்தக் குறியீட்டு முறைகளைப் பயன்படுத்தி, வரிசைப்பட்ட எண் அரங்கத்திற்கு மாற்று வரை இலக்கணம் அளிக்கலாம்.

4·4·3. மாற்று வரை இலக்கணம்

எண் அரங்கம் $(D, +, \cdot)$-ன் மீது வரையறுக்கப்பட்ட '$>$' என்ற தொடர்பு

1. $a, b \in D,\ a > 0, b > 0 \Longrightarrow ab > 0$

2. $a > 0, b > 0 \Longrightarrow a + b > 0$

3. $\forall a \in D$, $a = 0$ என்றுவது, $a > 0$ என்றுவது ஒன்று தான் உண்மையாக இருக்கவேண்டும்,

என்ற மூன்று நிபந்தனைகளையும் நிறைவேற்றினுல் $(D, +, \cdot)$ -க்கு வரிசைப்பட்ட எண் அரங்கம் என்பது பெயர்.

4·4·4. தேற்றம்

வரிசைப்பட்ட எண் அரங்கம் $(D, +, \cdot)$-ல் எவையேனும் மூன்று உறுப்புகள் a, b, c என்றுல்

1. $a > b \Longrightarrow a + c > b + c, \quad \forall c \in D$

2. $a > b, c > 0 \Longrightarrow ac > bc$

3. $a > b, c < 0 \Longrightarrow ac < bc$

4. $a > b, b > c \Longrightarrow a > c$

5. $a \neq 0 \qquad \Longrightarrow a^2 > 0$

நிறுவல்

1. $a > b \Longrightarrow a - b > 0$ (வ.இ.)

$$\Longrightarrow a + (c - c) - b > 0$$

$$\Longrightarrow a + c > b + c$$

2. $a > b \Longrightarrow a - b > 0$

$a - b > 0, c > 0 \Longrightarrow (a - b) \cdot c > 0$

(மாற்று வரை இலக்கணம் நிபந்தனை (1))

$$\Longrightarrow ac - bc > 0$$

$$\Longrightarrow ac > bc$$

3. $a > b \Longrightarrow a - b > 0$

$c < 0 \Longrightarrow -c \in D_p \Longrightarrow -c > 0$

மாற்று வ. இ. முதல் நிபந்தனைப்படி,

$$a - b > 0, -c > 0 \Longrightarrow -c \cdot (a - b) > 0$$

$$\Longrightarrow -c \cdot \{a + (-b)\} > 0$$

$$\Longrightarrow -c \cdot a + (-c) \cdot (-b) > 0$$

$$\Longrightarrow -ca + bc > 0$$

(கண வளையத்தின் பண்பு)

$$\Longrightarrow bc - ca > 0$$

(+-ன் பரிமாற்றுப் பண்பு)

$$\Longrightarrow bc > ca$$

(வரிசைப் படுத்தலின் வ.இ.)

(4) $a > b \Longrightarrow a - b > 0$

$b > c \Longrightarrow b - c > 0$

மாற்று வ.இ. இரண்டாவது நிபத்தனைப்படி

$$(a - b) + (b - c) > 0$$

$$\Longrightarrow [a + (-b)] + [b + (-c)] > 0$$

$$\Longrightarrow a + [(-b) + b + (-c)] > 0$$

(+-ன் சேர்ப்புப் பண்பு)

$$\Longrightarrow a + [0 + (-c)] > 0$$

$$\Longrightarrow a - c > 0 \quad \Longrightarrow a > c$$

5. $a \neq 0$ என்க.

வரிசைப்பட்ட எண் அரங்கங்களின் முப்பாக விதிப்படி,

$a > 0$, அல்லது $a < 0$ — இவற்றுள் ஏதாவது ஒன்றுதான் உண்மை.

$a > 0$ என்றால், மாற்று வ. இ. முதல் நிபந்தனைப்படி;

$$a > 0, \ a > 0 \Longrightarrow a \cdot a > 0$$

$$\Longrightarrow 0 \ a^2 >$$

இப்பொழுது $a < 0$ என்றால், $-a > 0$.

மறுபடியும் மாற்று வரை இலக்கணப்படி,

$$-a > 0, -a > 0 \Longrightarrow (-a)(-a) > 0$$

$$\Longrightarrow a \cdot a > 0$$

(கண வளையத்தின் பண்பு)

$$\Longrightarrow a^2 > 0$$

$\therefore \quad a > 0$ என்றாலும், $a < 0$ என்றாலும், $a^2 > 0$

4 4·5. வரை இலக்கணம்

தனிப் பெறுமானம் (absolute value)

ஒரு வரிசைப்பட்ட எண் அரங்கத்தின் ஓர் உறுப்பு a என்றால், $|a|$ என்ற குறியுடைய, a-ன் தனிப் பெறுமானத்தை,

$a \geqq 0$ என்றால் $|a| = a$,

$a < 0$ என்றால் $|a| = -a$

என்று வரையறுப்போம்.

மாற்று வரை

D_p என்ற நேர் உறுப்புகளைக் கொண்ட D என்ற வரிசைப் பட்ட எண் அரங்கத்தின் யாதாவதோர் உறுப்பு a என்றால்,

a-ன் தனிப் பெறுமானம் $|a|$ ஐ,

$a = 0$ அல்லது $a \in D_p$ என்றால் $|a| = a$,

$-a \in p$ என்றால் $|a| = -a$ என்று வரையறுப்போம்.

உதாரணமாக, $|5| = 5$, $|0| = 0$,

$$\left| -\frac{3}{4} \right| = -\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4}$$

4 4·6. தேற்றம்

D என்ற வரிசைப்பட்ட எண் அரங்கின் எவையேனும் இரு உறுப்புகள் a, b என்றால்,

(i) $|ab| = |a| \cdot |b|$

(ii) $|a+b| \leqq |a| + |b|$

நிறுவல்

(*i*) வெவ்வேறு செயல்கூடு நிலைகளை (Possibilities) ஆராய்வோம்.

(அ) $a = 0$, $b = 0$ என்றால், வ.இ படி, $|a| = |0| = 0$, $|b| = |0| = 0$

$$|ab| = |0 \cdot 0| = 0 \quad \therefore \quad |ab| = |a| \cdot |b|$$

(ஆ) $a > 0$, $b > 0$ என்றால், $|a| = a$, $|b| = b$, வ.இ.

$$|ab| = ab \quad \because \quad a > 0, b > 0 \Longrightarrow ab > 0$$

$$\therefore \quad |a| \cdot |b| = a \cdot b = |ab|$$

$$\therefore |ab| = |a| \cdot |b|.$$

(இ) $a < 0$, $b < 0$ என்றால், $|a| = -a$, $|b| = -b$

$$\therefore \quad |a| \cdot |b| = (-a)(-b) = ab,$$

$$|ab| = ab \quad \because \quad a < 0, b < 0 \Longrightarrow ab > 0.$$

$$\therefore \quad |ab| = |a| \cdot |b|$$

(ஈ) $a > 0$, $b < 0$ என்றால் $|a| = a$, $|b| = -b$ வ.இ.

$$\therefore \quad |a| \cdot |b| = a(-b) = -ab$$

$$|ab| = -(ab) \quad \because \quad a > 0, b < 0 \Longrightarrow ab < 0$$

$$\therefore \quad |ab| = |a| \cdot |b|$$

(ii) (அ) $a = 0$, $b = 0$ என்றால் $|a + b| = |0 + 0| = |0| = 0$

$$|a| = |0| = 0, \quad |b| = |0| = 0$$

$$\therefore \quad |a + b| = |a| + |b|$$

(ஆ) $a > 0$, $b > 0$ என்றால் $|a| = a$, $|b| = b$

$$\therefore \quad |a| + |b| = a + b$$

$\therefore \quad |a+b| = a+b \quad \because \quad a>0, b>0 \Longrightarrow a+b>0$

$\therefore \quad |a+b| = |a| + |b|$

(இ) $a<0, b<0$ என்றால் $|a| = -a, \quad |b| = -b$

$\therefore \quad |a| + |b| = (-a)+(-b) = -a-b$

$|a+b| = -(a+b) \therefore a<0, b<0 \Longrightarrow (a+b)<0$

$\therefore \quad |a+b| = |a| + |b|$

(ஈ) $a>0, b<0$ என்றால் $|a| = a, \quad |b| = -b$

$a+b<0$ என்றால் $|a+b| = -(a+b)$

ஆனால் $a>0$ என்பதால், $-(a+b) = -a-b < a-b$

$= a+(-b) = |a| + |b|$

$a+b \geqq 0$ என்றால் $|a+b| = a+b < a-b$

$= |a| + |b|$

(உ) $a<0, b>0$ என்றால் மேற்குறித்த விவாதத்தில் a, b-க்களின் பாத்திரங்களை மாற்றினால் போதும்.

4·5· சில முக்கியக் களங்கள்

4·5·1. எண் அரங்கத்தின் ஈவுகள் களம்

(Field of Quotients of an Integral Domain),

இந்தப் பகுதியில், கொடுக்கப்பட்ட ஓர் எண் அரங்கத்தைத் தன்னகத்தே கொண்ட ஒரு களத்தை அமைக்கும் விதத்தை இங்கே ஆராய்வோம். வரை இலக்கணப்படி, ஒரு களத்தின் பூச்சியமற்ற உறுப்புகள் எல்லாவற்றுக்கும் பெருக்கலின் நேர் மாறுகள் அக்களத்தில் உண்டு, ஆனால் எண் அரங்கத்துக்கு, இந்தக் கட்டுப்பாடு தேவை இல்லை.

கொடுக்கப்பட்ட எண் அரங்கம் D என்க. இரண்டாவது கூறு பூச்சியமில்லாதபடி வரிசைப்பட்ட ஜோடிகள் எல்லாவற்றை யும் D-ன் உறுப்புகளினின்று அமை. இந்த வரிசைப்பட்ட ஜோடிகளால் அமைந்த களத்தை A என்க.

$$A = \{(a, b) \mid a, b \in D, b \neq 0\}$$

$(a, b) \sim (c, d) \Longleftrightarrow a d = b c,\ \forall (a, b),\ (c, d) \in A$
என்றவாறு தொடர்பு $\sim$ ஐ A-ன் மீது வரையறு.

4·5·2. தேற்றம்

$\sim$ என்பது A-ன் மீது ஒரு சமநிலைத் தொடர்பு.

நிறுவல்

$(a, b), (c, d) (i, j,) \in A$ என்க,

1. $a b = a b \quad \therefore\ (a, b) \sim (a, b)$ $\therefore$ தானுதல் பண்பு $\sim$ க்கு உண்டு.

2. $(a, b) \sim (c, d)$ என்க.

$\therefore\ a d = b c$

கணவளையம் R ஆனது பரிமாற்றுப் பண்புடையதாதலால்,

$d a = c b$

$\therefore\ (c, d) \sim (a, b)$

$\therefore\ \sim$ க்குச் சமச்சீர்ப் பண்பு உண்டு.

3. $(a, b) \sim (c, d), \quad (c, d) \sim (i, j)$ என்க.

$\therefore\ a d = b c,\ \ c j = d i.$

$\therefore\ a d j = b c j, \quad c j b = d i b.$

கண வளையத்தில், $b c j = b (c j) = (c j) b = c j b$

$\therefore\ a d j = d i b$

ஆனால் $a d j = a (d j) = a (j d) = (a j) d$

$d i b = d (i b) = (i b) d = (b i) d$

$\therefore\ (a j) d = (b i) d$

$(c, d) \in A \quad A$-ன் வரை இலக்கணப்படி, $d \neq 0.$

D ஓர் எண் அரங்கமாதலால், பெருக்கலுக்கு அடித்தல் விதி உண்டு.

$\therefore\ d$ ஐ அடித்தால்,

$a j = b i$

$\therefore\ (a, b) \sim (i, j)$

$\therefore$ $\sim$ க்குச் செல்லும் பண்பு உண்டு.

$\therefore$ $\sim$ என்பது சமநிலைத் தொடர்பு ஆகும்.

$(a, b) \in A$-ன் சமநிலை இனத்தை $[a, b]$ என்று குறியிட்டால்,

$$[a, b] = \{ (c, d) \in E \mid (c, d) \sim (a, b) \}$$
$$= \{ (c, d) \in E \mid a\,d = b\,c \}$$

$\therefore$ $a\,d = b\,c$ என்றால், அதாவது $(c, d) \sim (a\,b)$ என்றால். $[a, b]$, $[c, d]$ என்ற இரு சமநிலை இனங்களும் சமம் எனப்படுவன.

$\therefore$ எல்லாப் பூச்சியமற்ற $x \in D$-க்கும் $[a, b] = [ax, bx]$, $\forall\ (a, b) \in A$.

A-ன் மீது வரையறுக்கப்பட்ட $\sim$ ன் எல்லாச் சமநிலை இனங்களும் அமைக்கும் கணத்தை F என்க.

F-ன் மீதான, 'கூட்டல்' $[a, b] + [c, d] = [a\,d + b\,c, b\,d]$

"பெருக்கல்" $[a, b]\,[c, d] = [a\,c, b\,d]$, $\forall\,(a, b), (c, d) \in A$ என்று வரையறு.

4.5.3. F-ன் மீதான 'கூட்டல்', 'பெருக்கல்' (மேற்படி வ. இ.) என்ற செயலிகள் நல்வரையறை உடையன.

நிறுவல் பாகம் 1

'கூட்டல்' நல்வரையறையுடையது :

$[a, b] = [a_1, b_1]$, $[c, d] = [c_1, d_1]$ என்க.

$\therefore\ a\,b_1 = b\,a_1,\ c\,d_1 = d\,c_1$,

முதல் சமன்பாட்டை $d\,d_1$ ஆலும், இரண்டாவதை $b\,b_1$ ஆலும் 'பெருக்கு'.

$(a\,b_1)\,d\,d_1 = (b\,a_1)\,d\,d_1 : (c\,d_1)\,(b\,b_1) = (d\,c_1)\,(b\,b_1)$

ஆனால் $(a\,b_1)\,(d\,d_1) = a\,(b_1\,d)\,d_1$ சேர்ப்பு விதி.

$= a\,d\,b_1\,d_1$ பரிமாற்று விதி.

$b\,a_1\,(d\,d_1) = b\,a_1\,(d_1\,d)$ பரிமாற்று விதி

$= (a_1\,b)\,(d_1\,d)$,, ,,

$= a_1\,(b\,d_1)\,d$ சேர்ப்பு விதி

$= a_1\,d_1\,b\,d$ பரிமாற்று விதி

$\therefore\ a\,d\,b_1 d_1 = a_1\,d_1\,b\,d$ ... (I)

இது போல், $b\,c\,b_1\,d_1 = b_1\,c_1\,bd$ ... (II)

கண வளையத்தின் வலது பங்கீட்டு விதிப்படி,

$(a\,d + b\,c)\,b_1\,d_1 = a\,d\,b_1\,d_1 + b\,c\,b_1\,d_1$

$= a_1\,d_1\,b\,d + b_1\,c_1\,b\,d$ (I, II-லிருந்து)

$= (a_1\,d_1 + b_1\,c_1)\,b\,d$

$\therefore\ [a\,d + b\,c, b\,d] = [(a_1\,d_1 + b_1\,c_1), b_1\,d_1]$

(F-ன் மீது கூட்டலின் வரையறை)

$\therefore\ [a, b] + [c, d] = [a_1, b_1] + [c_1, d_1],$

$\therefore$ F-ன் மீதான கூட்டல் நல் வரையறைப்பட்டது.

இப்பொழுது, $a\,b_1 = b\,a_1$ என்ற சமன்பாட்டை $c\,d_1$ ஆலும்,

$c\,d_1 = d\,c_1$ ஐ $b\,a_1$ ஆலும் பெருக்கு.

$\therefore\ a\,b_1\,c\,d_1 = b\,a_1\,c\,d_1\ ;\ c\,d_1\,b\,a_1 = d\,c_1\,ba_1$

$a\,(b_1\,c)\,d_1 = a\,(c\,b_1)\,d_1$ [பரிமாற்று விதி]

$b\,a_1\,c\,d_1 = (b\,a_1)\,(c\,d_1)$

$= c\,d_1\,b\,a_1$ (பரிமாற்று விதி)

$\therefore\ a\,c\,b_1\,d_1 = c\,d_1\,b\,a_1$ ... III

$(d\,c_1)\,(b\,a_1) = (b\,a_1)\,(d\,c_1)$ (பரிமாற்று விதி)

$= b\,(d\,a_1)\,c_1$ (சேர்ப்பு விதி)

$= b\,d\,a_1\,c_1$

∴ $b\,d\,a_1\,c_1 = c\,d_1\,b\,a_1$ ... IV

III, *IV*-லிருந்து,

$(a\,c)\;(b_1\,d_1) = (b\,d)\,(a_1\,c_1)$

$[a\,c,\; b\,d] = [a_1\,c_1,\; b\,d_1]$

∴ F-ன் மீதான பெருக்கல் நல்வரையறைப்பட்டது.

4·5·4. F ஆனது மேற்குறித்த கூட்டல், பெருக்கல் செயலிகள் கீழ் ஒரு களமாகும்.

நிறுவல்

கூட்டலைப் பொறுத்து, F ஆனது அபீலியன் குலம் (நிறுவுக!) D-ன் யாதாவதொரு பூச்சியமற்ற உறுப்பு x என்றால், $[0,x]$ என்பது $(F, +)$-ன் பூச்சியம்.

$[a, b]$ -ன் கூட்டலின் நேர்மாறு : $[-a, b]$

பெருக்கலின் சேர்ப்பு, பரிமாற்று விதிகளையும் நிறுவுக.

$$\begin{aligned}[a,b]\,([c,d) + (i,j)] &= [a,b]\,[c\,j + d\,i,\; d\,j]\\ &= [a\,c\,j + a\,d\,i,\; b\,d\,j]\\ &= [a\,c\,j\,b + a\,d\,i\,b,\; b^2 d\,j]\\ &= [a\,c,\; b\,d] + [a\,i,\; b\,j]\\ &= [a, b]\,[c, d] + [a, b]\,[i, j]\end{aligned}$$

∴ பெருக்கலுக்கு இடது பங்கீட்டு விதி உண்டு.

∴ F ஒரு பரிமாற்றுக் கண வளையமாயிற்று.

மேலும், F-ன் பெருக்கலின் ஒருமை $[x, x]$, x என்பது D-ன் பூச்சியமற்ற உறுப்பு.

$[a, b]\,[x, x] = [a\,x,\; b\,x] = [a, b]$, ∴ $[x, x]$ என்பது F-ன் ஒருமை.

F-ன் பூச்சியமற்ற உறுப்பு $[m, n]$ என்க.

∴ $m, n \in D$, $n \neq 0$. $[m, n]$ பூச்சியமற்றது என்பதால், $m \neq 0$.

∴ $[n, m]$ என்ற உறுப்பு F-ல் உள்ளது.

$$[m, n]\,[n, m] = [m\,n,\ m\,n]$$

ஆனால் $[m\,n, m\,n]$ என்பது $[x, x]$-ன் உரு மாதிரி.

∴ F-ல் $[m, n]$-ன் நேர்மாறு $[n, m]$.

∴ F-ல் பூச்சியமற்ற உறுப்புகளுக்குப் பெருக்கலின் நேர்மாறு உண்டு.

∴ F ஆனது ஒரு களம்.

4·5·5. தேற்றம்

F களத்தில் ஓர் உட்கண வளையம் R-ம், எண் அரங்கம் D-ம் இயல் முறை மாருதவை.

நிறுவல்

$R = \{\,[a, 1] \mid a \in D\,\}$ என்க.

R என்பது D-ன் ஓர் உட்கண வளையம் என்று நிறுவலாம்.

$[a, 1], [b, 1] \in R$ என்க.

$[a, 1] + [b, 1] = [a + b, 1] \in R$.

மேலும்

$[-a, 1] + [a, 1] = [-a + a, 1] = [0, 1] \in R$.

∴ $[0, 1]$ என்பது R-ன் கூட்டலின் நேர்மாறு.

$[a, 1]\,[b, 1] = [a\,b, 1] \in R$.

∴ தேற்றம் 3·4·2-ன்படி, R என்பது F-ன் உட்கண வளையம்.

$f : D \to R$ என்ற கோர்த்தலை, $f(d) = [d, 1],\ \forall\ d \in D$ என்றவாறு வரையறு.

f ஆனது நல்வரையறைக் கோர்த்தலாகும்.

$c, d \in D$ என்க.

∴ $f(c + d) = [c + d, 1] = [c, 1] + [d, 1] = f(c) + f(d)$

இதுபோல்,

$f(c\,d) = f(c)\,f(d)$. ஏனெனில் $f(c\,d) = [c\,d, 1]$ $= [c, 1]\,[d, 1]$

$[d, 1] \in R$ என்க.

$f(d) = [d, 1]$ என்றவாறு d என்ற உறுப்பு D-ல் உள்ளது.

∴ f ஆனது முழுக் கோர்த்தல்.

$f(d) = f(c)$ என்க. ∴ $[d, 1] = [c, 1]$

∴ $(d, 1) \sim (\,, 1)$ ∴ $d \cdot 1 = c \cdot 1$ ∴ $d = c$

∴ f ஆனது $(1 - 1)$.

∴ f ஆனது கண வளையச் செயல் மாற்றுக் கோர்த்தல்.

மேலும், ஒவ்வொரு $[a, b] \in F$-க்கும்,

$[a, b] = [a, 1]\,[1, b] = [a, 1]\,[b, 1]^{-1}$

∴ R-ம் D-ம் இயல் முறை மாறுதவை.

குறிப்பு: களம் F-ல் D என்ற எண் அரங்கம் இல்லை. F-ல் D-ன் உறுப்புகளாலான வரிசைப்பட்ட ஜோடிகளின் சமநிலை இனங்களே உள்ளன. ஆனால் D-க்கு இயல்முறை மாறுத வகையில் F-ன் ஓர் உட்கண வளையம் R ஐக் கண்டுபிடித்து விட்டோம். இம்மாதிரி, D-க்கு இயல் முறை மாறுத வகையில் ஓர் உட்கண வளையத்தை F பெற்றிருந்தால், F-ல் D ஆனது பதிக்கப்பட்டுள்ளது (embedded) என்போம். மேற்கண்ட இயல் முறை மாற்றுக் கோர்த்தல் வழி, F, D-க்களின் உறுப்புகளை ஒருமித்து விட்டோம்.

4·6. விகித முறு எண்கள் களம்

(Field of Rational numbers)

4.5-ல் ஆராயப்பட்ட F களமானது, அரங்கம் D ஐ முழு எண்களாகக் கொண்டால், விகிதமுறு எண்களாகும். விகிதமுறு எண்கள் களத்தை Q என்ற குறியீட்டால் வழங்குவர்.

$a, b \in Z, b \neq 0$ என்றால், எல்லாச் சமநிலை இனங்கள் $[a, b]$ அமைப்பது Q ஆகும்.

இப்பொழுது $[a,b]$ ஐ $\frac{a}{b}$ என்று எழுதலாம்.

$a, b \in Z, \; b \neq 0$ என்றால் Q ஆனது $\frac{a}{b}$ பின்னங்களைக் கொண்ட கணம்.

$\forall \; \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbf{Q}.$

$$\begin{cases} a\,d = b\,c \Longrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \\ \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a\,d + b\,c}{b\,d} \\ \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a\,c}{b\,d} \end{cases}$$

$(-a)(-b) = a\,b$ என்பதால், $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$

∴ $a, b \in Z,\ b > 0$ என்றால், ஒவ்வொரு விகிதமுறு எண்ணையும் $\frac{a}{b}$ என்றவாறு எழுதலாம்.

a -க்கும் b-க்கும் பொதுக் காரணி k என்றால்,

$$a = k\,a',\ b = k\,b' \Longrightarrow \frac{a}{b} = \frac{k\,a'}{k\,b'} = \frac{a'}{b'}$$

∴ $a, b \in Z,\ b > 0$ என்றால் ஒவ்வொரு விகித முறு எண்ணையும் $\frac{a}{b}$ என்றவாறு, a-க்கும் b-க்கும் பொதுக் காரணிகள் இல்லாத வகையில் எழுதலாம். இம்மாதிரி உள்ள எண்கள் 'சுருக்கிய அமைப்பில்' (reduced form) இருக்கின்றன எனலாம்.

4·6·1. தேற்றம்

Q என்பது வரிசைப்பட்ட களம்.

Q-ன் நேர் உறுப்புகள் (Positive elements) கணம் $\mathbf{Q}_p$ ஆனது $a\,b > 0$ என்றவாறு $\frac{a}{b}$ என்ற விகிதமுறு எண்களைக் கொண்டது.

நிறுவல்

$a\,b$ என்பது முழு எண்.

∴ $a\,b > 0$ என்றால், $a\,b$ முழு எண் என்பது பொருள்.

இப்பொழுது Z மீது வரிசைப்படுத்தலைப் பயன்படுத்துவோம்.

Q_p ஆனது 4·4·3-ன் நிபந்தனைகளை நிறைவேற்றவேண்டும்.

$\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in Q$ என்க. $a, b, c, d \in Z, b > 0, d > 0$.

$\frac{a}{b}$-ம், $\frac{c}{d}$-ம், Q_p-ன் உறுப்புகள் என்றால், $ab > 0, cd > 0$.

$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \in Q_p$ என்று காண்பிக்க வேண்டுமானால், $bd\,(ad + bc) = a\,b\,d^2 + c\,d\,b^2 > 0$ என்று காண்பிக்க வேண்டும்.

$\because$ $ab > 0, d^2 > 0, \therefore$ $abd^2 > 0$ (Z வரிசைப்பட்டதால்).

இதுபோல் $cdb^2 > 0$.

$\therefore$ $abd^2 + cdb^2 > 0$. $\therefore$ 4·4·3-ன் இரண்டாவது நிபந்தனை நிறைவேறியது.

$$= abcd > 0 \quad \therefore \quad ab > 0, cd > 0$$

$\therefore$ $\frac{ac}{bd} \in Q_p$ $\therefore$ 4·4·3-ன் முதல் நிபந்தனை நிறைவேறியது.

Q-ன் பூச்சியமற்ற உறுப்பு $\frac{a}{b}$ என்றால், $a \neq 0$.

$\therefore$ $ab \neq 0$, $\because$ $b \neq 0$.

வரிசைப்பட்ட Z-ன் முப்பாக விதிப்படி.

$ab > 0$ அல்லது $ab < 0$.

$\therefore$ $\frac{a}{b} \in Q_p$, அல்லது, $-\frac{a}{b} \in Q_p$

$\therefore$ Q_p-க்கு முப்பாக விதி உண்மை.

$\therefore$ Q_p என்ற நேர் உறுப்புகளைக் கொண்ட கணத்தைக் கொண்ட களம் Q ஆனது வரிசைப்பட்டது.

குறிப்பு : இரு விகிதமுறு எண்கள் $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ என்ருல்

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Longleftrightarrow \frac{ad-bc}{bd} \in Q_P.$$

$$\Longleftrightarrow bd\,(ad-bc) > 0$$

$\frac{a}{b}$-ம் $\frac{c}{d}$-ம், சுருக்கிய அமைப்பில் இருந்தால், $b > 0,\ d > 0,$

$\therefore\ bd > 0. \quad \therefore\ ad-bc > 0$

$$\therefore\ \frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Longleftrightarrow ad > bc.$$

4·6·2. தேற்றம்

எவையேனும் இரு வெவ்வேறு விகிதமுறு எண்களுக்கிடையே ஒரு விகிதமுறு எண் இருக்கிறது. குறிப்பாக, $u < v$ என்றவாறு u-ம், v-ம் இரு விகிதமுறு எண்கள் என்ருல்,

$$u < \frac{u+v}{2} < v$$

நிறுவல்

$u < v \Longrightarrow u + u < u + v$ (Q வரிசைப்பட்டது; 4·4·4. (1) காண்க)

$$\Longrightarrow 2u < u + v$$

$$\Longrightarrow (2u)\,\tfrac{1}{2} < (u + v)\,\tfrac{1}{2}, \qquad (\tfrac{1}{2} > 0)$$

$$\Longrightarrow u < \frac{u+v}{2}$$

இதுபோல் $\frac{u+v}{2} < v$ (காண்பிக்க!)

$$\therefore\ u < \frac{u+v}{2} < v$$

$\therefore$ u-க்கும் v-க்கும் இடையே உள்ள விகிதமுறு எண் $\frac{u+v}{2}$

4·6·3. ஆர்கிமிடியன் பண்பு (Archimedean Property).

u-ம் v-ம் நேர் விகிதமுறு எண்கள் என்றால்,

$nu > v$ என்றவாறு n என்னும் நேர் முழு எண் உள்ளது.

நிறுவல்

$u = \frac{a}{b}$, $v = \frac{c}{d}$, a, b , $c, d \in Z^+$ என்க.

$n = 2bc$ என்க.

$2bc\left(\frac{a}{b}\right) > \frac{c}{d}$ என்று நிறுவ வேண்டும்.

அதாவது $2ad > 1$ என்று நிறுவினால் போதும்.

ஆனால் $a > 0, d > 0 \Longrightarrow ad > 0$

$\Longrightarrow 2ad > 1$

4·6·3. தேற்றம்

$\sqrt{2}$ என்ற எண், விகிதமுரு எண்.

நிறுவல்

$r^2 = 2$ என்றால்,

$r = \sqrt{2}$ என்ற ஒரே நேர் மெய் எண் என்பது பொருள்.

முடியுமானால் $r = \sqrt{2}$ என்பது **விகித**முறு எண்ணாக இருக்கட்டும். அப்படியானால் $r=\frac{a}{b}$ என்க. $\frac{a}{b}$ ஐச் சுருக்கிய அமைப்பில் இருப்பதாக வைத்துக் கொள்க.

அதாவது, $b > 0$, a-க்கும் b-க்கும் பொதுவான காரணிகள் இல்லை.

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \Longrightarrow 2 = \frac{a^2}{b^2}.$$

$\therefore \quad 2b^2 = a^2$

$\therefore \quad 2/a^2 \ \therefore \quad 2/a$

$\therefore \quad a = 2c, c \in$

$\therefore \quad a^2 = 4c^2$

$\therefore \quad 2b^2 = 4c^2$

$\therefore \quad b^2 = 2c^2$ (Z எண் அரங்கம். $\therefore$ அடித்தல் விதி உண்டு)

$\Longrightarrow$ b-ன் காரணி 2,

$\therefore$ a-க்கும் b-க்கும் பொதுக் காரணி 2

இது '$\frac{a}{b}$ சுருங்கிய அமைப்பு' என்பதன் எதிர் மறுப்பு.

$\therefore$ $\sqrt{2}$ விகிதமுறு எண் அல்ல.

$\sqrt{2}$ விகிதமுறு எண்ணே.

4·7. கலப்பெண்கள் களம் (Field of Complex numbers)

வரிசைப்பட்ட மெய்யெண்களின் ஜோடிகள் அமைக்கும் கணம் $R \times R$ ஐ C என்போம்.

$C = R \times R$ என்பதைக் களமாக்க வேண்டின் C-ன் மீது 'கூட்டல்', 'பெருக்கல்' செயலிகளைக் கீழ்க்கண்டவாறு வரையறுப்போம்.

+ 'கூட்டல்'

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

· 'பெருக்கல்'

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc) \quad \forall (a, b), (c, d) \in C$$

$(C, +, \cdot)$ என்பது ஒருமையுள்ள பரிமாற்றுக் கண வளையம் என்பதை நிறுவலாம் (நிறுவுக!)

$(0, 0)$ என்பது $(C, +, \cdot)$-ன் பூச்சிய உறுப்பு; $(1, 0)$ என்பது பெருக்கலின் முற்றொருமை அதாவது $(C, +, \cdot)$-ன் ஒருமை.

C-ன் யாதாவதொரு பூச்சியமற்ற உறுப்பு (a, b) என்க.

$\because \quad (a, b) \neq (0, 0)$, a ஆவது அல்லது b ஆவது பூச்சியமற்றது.

$\therefore \quad a^2 + b^2 > 0.$

$$\therefore \quad (a, b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right)$$

ஏனெனில்,

$$(a, b) \cdot \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right) = \left(\frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2}, \frac{-ab + ab}{a^2 + b^2}\right)$$

$= (1, 0) = (C, +, \cdot)$-ன் ஒருமை.

$\therefore$ C-ன் பூச்சியமற்ற உறுப்புகளுக்குப் பெருக்கலின் நேர்மாறுகள் உண்டு.

$\therefore$ $(C, +, \cdot)$ என்பது களம்.

4·7·1. தேற்றம்

மெய்யெண்கள் கண வளையத்திற்கு இயல்முறை மாறுத வகையில் களம் $(C, +, \cdot)$-ன் ஓர் உட்கண வளையம் உள்ளது.

நிறுவல்

$(C, +, \cdot)$ ஓர் உட்கண வளையம்.

$R \times 0 = \{(a, 0) \mid a \in R\}$ என்க.

$f : R \longrightarrow R \times 0$ என்ற கோர்த்தலை வரையறு.

$f(a) = (a, 0), a \in R.$

இந்தக் கோர்த்தல் நல்வரையறைப்பட்டது.

$a, b \in$ R என்ருல்,

$f(a + b) = (a + b, 0) = (a, 0) + (b, 0)$ (வ.இ.)

$= f(a) + f(b).$

$f(ab) = (ab, 0) = (a, 0) \cdot (b, 0)$

$= f(a) \cdot f(b)$

$\therefore$ $(\mathrm{R}, +, \cdot) \simeq (R \times 0, +, \cdot)$

குறிப்புகள் 1. a என்ற மெய் எண்ணை $(a, 0)$ என்ற வரிசைப்பட்ட ஜோடியுடன் ஒருமித்தால், $(R, +, \cdot)$ ஐ $(C, +, \cdot)$-ன் உட்கண வளையமாகக் கொள்ளலாம்.

2. மேற்குறித்த 'கூட்டல்', 'பெருக்கல்' செயலிகளைப் பயன்படுத்தி, C-ன் யாதாவதோர் உறுப்பு (a, b) ஐ,

$(a, b) = (a, 0) + (b, 0)\,(0, 1)$ என்று எழுதலாம்.

$$(0, 1)^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0)$$
$$= (-1, 0).$$

$(0, 1)$ ஐ i என்று குறியிட்டால்,

$(a, b) = (a, 0) + (b, 0)\, i$ என்றாகும்.

குறிப்பு (1)-ன் படி, $(a, 0)$ என்ற உருமாதிரியுள்ள வரிசைப் பட்ட ஜோடிகளை அவற்றின் முதல் கூறாக எழுதினால், அதாவது $(a, 0)$ ஐ,

a என்றே வெறுமனே எழுதினால்,

$(a, b) = a + b\, i$ என்றாகும்.

இதேபோல், $(0, 1)^2 = (-1, 0)$ என்பதும் $i^2 = -1$ என்றாகும்.

இதனால் இப்பொழுது ஆராயப்பட்ட $(C, +, \cdot)$ கணித முறையானது நமக்கு வழக்கப்பட்ட கலப்பெண்கள் கணித முறையே.

(3) N, Z, Q, R, C என்பவை முறையே இயற்கை எண்கள், முழு எண்கள், விகிதமுறு எண்கள், மெய் எண்கள், கலப்பெண்கள் ஆகியவற்றைக் குறிப்பன என்றால், 4·5, 4·6, 4·7 என்ற பகுதி களின் கீழ் விவாதங்களினின்று நாம் அறிந்து கொண்டது:

$N \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R \subseteq C$

பயிற்சி

1. முழு எண்கள், கூட்டல், மட்டு 6 வளையம், எண் அரங்கம் அல்ல என்று நிறுவுக.

2. முழு எண்கள், கூட்டல், மட்டு 5 வளையம், எண் அரங்கம் என்று நிறுவுக.

3. $(R, +, .)$ என்ற கண வளையத்தில் $x \in R$-க்கு $xx = x$ என்ருல் $x = 0$ அல்லது $x = 1$ என்று நிறுவுக.

4. ஓர் உறுப்புக்கு மேற்பட்டு, பல உறுப்புகளையுடைய பரிமாற்றுக் கண வளையத்தின், பூச்சியமில்லாத உறுப்புகள், பெருக்கலின் கீழ் குலமானுல், அந்தக் கண வளையம், ஒரு களம் என்று நிறுவுக.

5. R^+ : எல்லா நேர் மெய்யெண்களைக் கொண்ட கணம் என்க.

$1 \neq q$: நிலையான நேர் எண் என்க.

R^+ன் எவையேனுமிரு உறுப்புகள் c, b க்கு,

$a \oplus b = ab,\ a \otimes b = a^{\log^b_q}$ என்று வரையறுத்தால்

$\oplus$ ஐயும், $\otimes$ ஐயும் பொறுத்து R^+ ஆனது களம் என்று நிறுவுக.

6. $(Z_5, +_5, \cdot_5)$ என்பது களம் என நிறுவுக.

இக் களம் வரிசைப்பட்டதல்ல என்றும் நிறுவுக.

7. $S = \{0, 2, 4, 6, 8\}$-ன் மீதான செயலிகள்

$+_{10}$: கூட்டல், மட்டு 10,
$\cdot_{10}$: பெருக்கல், மட்டு 10
என்ருல் $(S, +_{10}, \cdot_{10})$ ஒரு பரிமாற்றுக் கண வளையம் என்று நிறுவுக. இவ்வளையம் ஓர் எண் அரங்கம் எனவும் நிறுவுக.

8. R : { மெய்யெண்களின் வரிசைப்பட்ட ஜோடிகள் (a,b) }

$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$,

$(a, b,) \cdot (c, d) = ac - bd, bc + ad)$

என்று கூட்டலையும், பெருக்கலையும் வரையறுத்தால்,

$(R, +, \cdot)$ என்பது களம் என்று நிறுவுக.

9. $a, b \in Q$; p பகா எண் என்றால், $a + b\sqrt{p}$ என்ற உரு மாதிரியுள்ள உறுப்புகளின் கணம், வழக்கமான கூட்டல், வழக்கமான பெருக்கல் கீழ், ஒரு களம் ஆகும் என்று நிறுவுக.

(Q : விகிதமுறு எண்கள் கணம்)

10. $S = \{ a + b\sqrt[3]{2} \mid a, b$ விகிதமுறு எண்கள் $\}$;

$+$: வழக்கமான கூட்டல், $\cdot$: வழக்கமான பெருக்கல் என்றால்,

$(S, +, \cdot)$ களமாகாது என்று நிறுவுக.

11. $S = \{ a + b\sqrt{5} \mid a, b \in Q \}$, $+$: வழக்கமான கூட்டல் $\cdot$: வழக்கமான பெருக்கல் என்றால் $(S, +, \cdot)$ ஒரு களமாகும் என்று நிறுவுக.

12. R : மெய்யெண்கள் கணம். R-ன் மீது $\oplus$, $\odot$ என்ற செயலிகளை $a \oplus b = a + b - 1$, $a \odot b = a + b - ab$, $\forall\, a, b \in R$ என்றும் வரையறுத்தால் $(R, \oplus, \odot)$ என்பது களம் என்று நிறுவுக.

5. பல்லுறுப்புக் கண வளையங்கள்

(Polynomial Rings)

5.1. பள்ளிக்கூடங்களில் பெரிய வகுப்புகளில் பல்லுறுப்புக் கோவைகளைக் கூட்டவும், பெருக்கவும், சுருக்கவும், காரணிப் படுத்தவும் கற்றுக்கொள்கிறோம்.

கல்லூரி வகுப்புகளில் நுண்கணிதம் கற்றுக்கொள்ளும்போது பல்லுறுப்புக் கோவைகளைச் சார்புகளாகக் கருதி, அவற்றின் தொடர்ச்சி (Continuity) வகைக்கெழுக்கள் (Derivatives), தொகையீடுகள் (Integrals) ஆகியவற்றைப் படிக்கிறோம்.

ஆனால் இங்கே நவீன இயற்கணிதத்தில் பல்லுறுப்புகளை வேறொரு கோணத்தில் படிப்போம். நவீன இயற்கணிதத்தில் கண வளையங்கள், களங்கள் ஆகியவற்றைப் பற்றி அதிகமாகத் தெரிந்துகொள்ள வேண்டுமானால், பல்லுறுப்புகளைப் பற்றி மிகுதியாகத் தெரிந்துகொள்ள வேண்டியது அவசியம்.

ஒருமையுள்ள பரிமாற்றுக் கண வளையத்தில் கெழுக்கள் (coefficients) இருக்குமாறு பல்லுறுப்புகளை வரையறுக்கலாம். $(R, +, .)$ என்பது ஒருமை 1 உள்ள பரிமாற்றுக் கண வளையம் என்க. x என்ற குறியீடு $(R, +, .)$-ன் உறுப்பு அல்ல என்று வைத்துக் கொள்வோம். x குறியீட்டை எந்த **இயற்கணித முறை** (algebraic system) யின் உறுப்பாகவும் கொள்ளாதே. இந்த மாதிரியான குறியீட்டிற்குத் 'தேராக் கணியம்' (Indeterminate quantity) என்பது பெயர்.

சாதாரண எண் கணிதத்தில் ஓர் எண்ணிலுள்ள இலக்கங் களின் இடப்பெறுமானத்தை (place value) 10 ஐ அடிப்படையாகக் கொண்டு அறிகிறோம். இந்த 10 ஐ இடத்தைக் குறிக்கும் எண்

அல்லது இடத்தை மதிப்பான் அல்லது இடத்தைக் குறிப்பான் (place holder) என்று சொல்லுகிறோம்.

உதாரணமாக $3278 = 3 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10$-ன் அடுக்குகள் எடுத்துக்கொண்ட எண்ணின் இலக்கங்களின் இட மதிப்பைக் குறிக்கின்றன. உதாரணமாக 10^3 என்றால் 1000; $\therefore 3 \cdot 10^3$ என்றால் 1000-ன் இடத்தில் 3 உள்ளது என்பது பொருள். இந்த உதாரணத்தின் 10-ன் வேலையை, கீழேயுள்ள, பல்லுறுப்புகள் வரை இலக்கணத்தில் x செய்கிறது.

5.1.1. வரை இலக்கணம்

R என்பது ஒருமையுள்ள பரிமாற்றுக் கண வளையமாயும் $a_0, a_1, a_2 \ldots, a_n \in R$ என்றும், n என்பது ஒரு குறையற்ற முழு எண்ணும் (non negative integer); x என்பது தேராக் கணியமாயும் இருந்தால்.

$$a_0 x^0 * a_1 x^1 * a_2 x^2 * \ldots\ldots * a_n x^n$$

என்ற குறியீடு, R-ல் கெழுக்களையுடைய x ஐப் பொறுத்த பல்லுறுப்பு எனப்படும்,

$0 \leqq i \leqq n$, a_i என்பது x^i-ன் **கெழு** எனப்படும். $a_i x^i$ என்பது a_i ஐக் கெழுவாய்க் கொண்ட **உறுப்பு** எனப்படும்.

5.1.2. கவனிக்க :

இந்த வரை இலக்கணத்தில் x-கள் வெறும் இடக்குறிப்பான்களே (place holders). x^i என்பதை x தன்னைத்தானே i தடவை பெருக்கிய பலன் என்று எண்ணாதே. x என்ற குறியீடு எந்தக் கண வளையத்தின் உறுப்பும் அல்ல என்பதையும், அதனால் x-க்குப் பெருக்கலின் வரையறை இல்லை என்பதையும் மறக்காதே. ஆகையால் $a_i x^i$ என்பது a_i, x^i என்பவற்றின் பெருக்கம் அல்ல என்பதை அறிந்துகொள். ஏனெனில் அந்த வகையான பெருக்கம் வரையறுக்கப்படவில்லை. பல்லுறுப்பின் ஓர் உறுப்புக்கும் மற்றோர் உறுப்புக்கும் இடையே உள்ள $*$ என்ற குறியீடு உறுப்புகளுக்கிடையே இடைவெளிப் படுத்துவதற்கேயன்றி வேறெதற்குமல்ல.

பல்லுறுப்புகளைப் பெயரிட்டு அழைப்பது பெரும்பாலும் வசதியாய் இருக்கும்.

சாதாரணமாக,

$$f(x) = a_0 x^0 * a_1 x^1 * a_2 x^2 * \ldots * a_n x^n,$$

$a_0, a_1, \ldots, a_n \in R$, x தேராக் கணியம்

என்றவாறு எழுதுவது வழக்கம்.

இந்தப் பல்லுறுப்பின் பெயர் $f(x)$. அவ்வளவு தானே தவிர $f(x)$ என்பது (வழக்கமான) மதிப்பிடத்தக்க சார்பு என்று ஒரு காலும் நினையாதே.

$a_0 x^0 * a_1 x^1 * \ldots * a_n x^n$ என்ற பல்லுறுப்பை, ஆராய யாயிருப்பதற்கு, $f(x)$ என்று பெயரிட்டோம்.

குறியீட்டு முறை

R என்பது ஒருமையுள்ள பரிமாற்றுக் கண வளையமென்றும் x என்பது தேராக் கணியம் என்றும் கொண்டால் $R[x]$ என்பது, R-ல் கெழுக்களைக் கொண்ட x ஐப் பொறுத்த எல்லாப் பல்லுறுப்புகளையும் கொண்ட கணம் எனப்படும்.

5.1.3. வரை இலக்கணம்

R என்பது ஒருமையுள்ள பரிமாற்றுக் கண வளையமென்றும், x என்பது தேராக் கணியம் என்றும் கொள்க.

$$f(x) = a_0 x^0 * a_1 x^1 * \ldots\ldots * a_n x^n$$

$$g(x) = b_0 x^0 * b_1 x^1 * \ldots\ldots * b_m x^m$$

என்பவை $R[x]$ ன் உறுப்புகள் என்க. $f(x)$, $g(x)$- இவற்றுள் பூச்சியக் கெழுக்களையுடைய உறுப்புகளைத் தவிர $f(x)$-ம், $g(x)$-ம் முற்றிலும் ஒத்தவையாக இருந்தால் $f(x)$-ம், $g(x)$-ம் சமமான பல்லுறுப்புகள் எனப்படுவன.

அதாவது, $\forall_i, a_i = b_i \Longrightarrow f(x) = g(x)$ ஆதலால், இரு பல்லுறுப்புகள் சமம் என்று நிறுவ, $\forall_i$, $f(x)$-ல் x^i-ன் கெழுவும் $g(x)$-ல் x^i-ன் கெழுவும் சமம் என்று காண்பித்து விடு.

மேலும் ஒரு பல்லுறுப்பைக் காணவேண்டின் $\forall_i$, x^i-ன் கெழு என்ன என்று சொன்னால் போதும். பூச்சியக் கெழுக்களையுடைய உறுப்புகளை எழுதுவது கிடையாது. உதாரணமாக $3x^0 * 0x'$ என்ற பல்லுறுப்பை $3x^0$ என்பதுடன் நிறுத்திக் கொள்க.

இப்பொழுது, $R[X]$ கணத்தைக் கண வளையமாக்க வேண்டுமென்றால் கூட்டலையும் பெருக்கலையும் வரையறுக்க வேண்டும்.

5·1·4. வரை இலக்கணம்

R என்பது ஒருமையுள்ள கண வளையமென்றும், x என்பது தோரக் கணியம் என்றும் கொள்க.

$$f(x) = a_0\,x^0 * a_1\,x^1 * a_2\,x^2 * \ldots\ldots * a_n\,x^n,$$

$$g(x) = b_0\,x^0 * b_1\,x^1 * b_2\,x^2 * \ldots\ldots * b_n\,x^n$$

என்பவை $R[x]$-ன் உறுப்புகள் என்க.

$+$-ன் வரை இலக்கணம்

$$f(x) + g(x) = (a_0 + b_0)\,x^0 * (a_1 + b_1)\,x^1 * \ldots\ldots\ldots;$$

அதாவது $f(x) + g(x)$-ல் x^i-ன் கெழு $a_i + b_i$

$\cdot$ -ன் வரை இலக்கணம்

$$f(x)\,g(x) = c_0\,x^0 * c_1\,x^1 * \ldots\ldots * c_{n+m}\,x^{n+m}$$

$$\forall_i = 0, 1, \ldots\ldots, n+m,\ c_i = a_i\,b_0 + a_{i-1}\,b_1 + a_{i-2}\,b_2 + \ldots\ldots + a_1\,b_{i-1} + a_0\,b_i$$

ஒரு பல்லுறுப்பில் பூச்சிய கெழுக்களையுடைய உறுப்புகளை எத்தனை வேண்டுமானாலும் சேர்த்துக் கொள்ள அந்தப்பல்லுறுப்பு மாறப்போவதில்லை என்றும், அதனால் ஒரு பல்லுறுப்பை வரையறுக்கும் போது, பூச்சியக் கெழுக்கள் உடைய உறுப்புகளை எழுதுவதில்லை என்றும் சொன்னோம்.

$\therefore$ வரை இலக்கணத்தில் $k > m \Longrightarrow a_k = 0$

$$j > n \Longrightarrow b_j = 0$$

மாற்று வரை இலக்கணம்

$\cdot$ -ன் வரை இலக்கணம்

$f(x)\,g(x)$-ல் x^i-ன் கெழுவானது $s + r = i$ என்றவாறு $a_s\,b_r$ உருமாதிரியுள்ள எல்லாப் பெருக்கங்களின் கூட்டுத் தொகையாகும்.

கவனிக்க : மேற்கண்ட வரை இலக்கணத்தில், $f(x) + g(x)$ என்பதில் $+$ என்பது $R[X]$-ன் செயலி, ஆனால் $\forall_i, a_i + b_i$ என்பதில் உள்ள $+$ ஆனது R கண வளையத்தின் செயலி. இது போல் $f(x) \cdot g(x)$-ல் உள்ள . ஆனது $R[X]$-ன் செயலி. ஆனால் $a_i b_0; a_{i-1} b_1 \ldots a_0 b_i$ என்பவற்றுள் இரு உறுப்புகளை இணைக்கும் செயலி R ஐச் சேர்ந்தது. $R[X]$-ன் செயலிகள் வேறு. R-ன் செயலிகள் வேறு.

5.1.5. உதாரணம் :

Z : முழு எண்களின் கண வளையம்.

Z $[X]$-ன் உறுப்புகளாவன :

$f(x) = 3x^0 * (-1)x^1 * 1x^2,$

$g(x) = 2x^1 * 2x^3$

$f(x)$-ல் x^3-ன் கெழு 0, $g(x)$ ல் x^0, x^2 - இவற்றின் கெழுக்களும் 0.

$a_0 = 3, a_1 = -1, a_2 = 1, a_3 = 0, b_0 = 0, b_1 = 2, b_2 = 3$ $b_3 = 2$

$$\therefore f(x) + g(x) = (3+0)x^0 * (-1+2)x^1 * (1+0)x^2 * (0+2)x^3$$

$$= 3x^0 * 1x^1 * 1x^2 * 2x^3$$

$f(x)\, g(x) = c_0 x^0 * c_1 x^1 * c_2 x^2 * c_3 x^3 * c_4 x^4 * c_5 x^5$ என்பதில்,

$c_0 = a_0 b_0 = 3 \cdot 0 = 0$

$c_1 = a_1 b_0 + a_0 b_1 = (-1)(0) + 3(2) = 6$

$c_2 = a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2 = (1)(0) + (-1)(2) + (3)(3) = 7$

$c_3 = a_3 b_0 + a_2 b_1 + a_1 b_2 + a_0 b_3 = (0)(0) + (1)(2) + (-1)(3) + (3)(2) = 5$

$c_4 = a_4 b_0 + a_3 b_1 + a_2 b_2 + a_1 b_3 + a_0 b_4 = (0)(0) + (0)(2) + (1)(3) + (-1)(2) + (3)(0) = 1$

$$c_5 = a_5 b_0 + a_4 b_1 + a_3 b_2 + a_2 b_3 + a_1 b_4 + a_0 b_5$$
$$= (0)(0) + (0)(2) + (0)(3) + (1)(2) + (-1)(0) + (3)(0) = 2$$

$$f(x)\, g(x) = 6\, x^1 * 7\, x^2 * 5\, x^3 * 1\, x^4 * 2\, x^5$$

5·1·6. தேற்றம்

R : ஒருமையுள்ள பரிமாற்றுக் கண வளையம்;

x : ஒரு தேராக் கணியம்

என்றால், $R[X]$-ன் மீது பல்லுறுப்புகளின் 'கூட்டல்' 'பெருக்க'லின் கீழ், $R[x]$ என்பது ஒருமையுள்ள பரிமாற்றுக் கண வளையமாகும்.

குறிப்பாக $R[x]$ என்பது, கெழுக்களை R-ல் கொண்ட பல்லுறுப்புகள் கண வளையம் எனப்படும்.

நிறுவல்

$f(x), g(x) \in R[x]$, $a_0, a_1, \ldots, a_n; b_0, b_1, \ldots, b_m \in R$ என்க.

$$f(x) + g(x) = (a_0 + b_0)\, x^0 * (a_1 + b_1)\, x^1 * \ldots$$
($+$-ன் வரை இலக்கணம்)

$a_i + b_i$ என்பதில் $+$ என்பது R-ன் செயலியாவதால் $\forall i,\ a_i + b_i \in R$.

$\therefore$ $f(x) + g(x)$ என்பது கெழுக்களை R-ல் உடைய பல்லுறுப்பு.

$\therefore$ $f(x) + g(x) \in R[X]$

$\therefore$ $R[X]$, $+$ ஆல் அடைக்கப்பட்டது.

$\therefore$ $+$ ஓர் ஈரிணைச் செயலி. ($R1$ நிறைவேறியது)

$f(x), g(x), h(x) \in R[x]$, $h(x)$

$$= c_0\, x^0 * c_1\, x^1 * \ldots * c_p\, x^p$$

என்ருல், $(f(x) + g(x)) + h(x)$

$$= ((a_0 + b_0) x^0 * (a_1 + b_1) x^1 * \ldots) + (c_0 x^0 * c_1 x^1 * \ldots)$$

($R[X]$-ல் $+$-ன் வரை இலக்கணம்)

$$= ((a_0 + b_0) + c_0) x^0 * ((a_1 + b_1) + c_1) x^1 * \ldots$$

($R[X]$-ல் $+$-ன் வரை இலக்கணம்)

$$= (a_0 + (b_0 + c_0)) x^0 * (a_1 + (b_1 + c_1)) x^1 * \ldots$$

(R-ன் $+$-ன் சேர்ப்பு விதி)

$$= (a_0 x^0 * a_1 x^1 * \ldots) + ((b_0 + c_0) x^0 * (b_1 + c_1) x^1 * \ldots)$$

$$= f(x) + (g(x) + h(x))$$

$\therefore$ $R[X]$-ல் $+$-க்குச் சேர்ப்பு விதி உண்டு.

(R 2 நிறைவேறியது)

ஒரு பல்லுறுப்பின் கெழுக்கள் எல்லாம் R-ன் பூச்சியம் என்ருல் அதைப் பூச்சியப் பல்லுறுப்பு என்றும், $R[X]$-ன் பூச்சிய உறுப்பு என்றும் வழங்கப்படும். இதை $0 x^0$ என்று குறியிடலாம்.

$$f(x) + 0 x^0 = (a_0 + 0) x^0 * a_1 x^1 * \ldots * a_n x^n$$

$$= a_0 x^0 * a_1 x^1 * \ldots * a_n x^n$$

[$(R, +)$ குலம் $\therefore a_0 + 0 = a_0$]

$$= f(x)$$

அதேபோல் $0 x^0 + f(x) = f(x)$, [$(R, +)$ குலம் $\therefore a_0 + 0 = 0 + a_0$]

$\therefore$ $R[X]$-ன் பூச்சியமாவது, பூச்சியப் பல்லுறுப்பு $0 x^0$

$\therefore$ $R[X]$-ல் பூச்சிய உறுப்பு உண்டு. [R 3 நிறைவேறியது]

$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$: இவற்றின் கூட்டலின் நேர்மாறுகள் $-a_0, -a_1, -a_2, \ldots, -a_n$ என்பதால்

$R[X]$-ல் $f(x)$-ன் 'கூட்டலி'ன் நேர்மாறு

$$(-a_0) x^0 * (-a_1) x * (-a_2) x^2 * \ldots * (-a_n) x^n$$

$\therefore$ $R[X]$-ல் கூட்டலின் நேர்மாறுகள் உண்டு.

$\therefore$ [R 4 நிறைவேறியது]

$$f(x) + g(x) = (a_0 + b_0)\, x^0 * (a_1 + b_1)\, x^1 * (a_2 + b_2)\, x^2 * \ldots$$

(வரை இலக்கணம்)

$$= (b_0 + a_0)\, x^0 * (b_1 + a_1)\, x^1 * (b_2 + a_2)\, x^2 * \ldots$$

($+$-ன் பரிமாற்று விதி)

$$= g(x) + f(x)$$

$R[X]$-ல் $+$ f-ன் பரிமாற்று விதி உண்டு.

$\therefore$ $(R[X], +)$ அபீலியன் குலம்.

$$f(x) \cdot g(x) = C_0\, x^0 * C_1\, x^1 * \ldots * C_{n+m}\, x^{n+m}$$

$$C_i = a_i\, b_0 + a_{i-1}\, b_1 + \ldots + a_0\, b_i$$

C_i-ல் ஒவ்வோர் உறுப்பும் R-ன் இரு உறுப்புகளின் பெருக்கம், R-ன் பெருக்கலுக்கு அடைப்பு விதி உள்ளதால் $a_i\, b_0,\ a_{i-1}\, b_1, \ldots, a_0\, b_i$ என்பவை R-லேயே உள்ளன.

இவற்றின் கூட்டல் $\in R$. ஏனெனில் R-ல் கூட்டலுக்குச் சேர்ப்பு விதியுண்டு.

$\therefore$ $C_0, C_1, \ldots, C_{n+m} \in R$.

$\therefore$ $f(x) \cdot g(x) \in R[X]$

$R[X]$-ல் $\cdot$-க்கு அடைப்புப் பண்பு உண்டு.

$\therefore$ $R6$ நிறைவேறியது.

$f(x) \cdot g(x)$-ல் x^i-ன் கெழு

$$a_i\, b_0 + a_{i-1}\, b_1 + \ldots + a_1\, b_{i-1} + a_0\, b_i$$

$$= b_i\, a_0 + b_{i-1}\, a_1 + \ldots + b_1\, a_{i-1} + b_0\, a_i$$ ($\because$ R பரிமாற்றுக் கண வளையம்)

$= g(x) f(x)$-ல் x^i-ன் கெழு.

$\therefore \quad f(x)\, g(x) = g(x)\, f(x)$

$\therefore \quad R[X]$-ல் $\cdot$ பரிமாற்றுப் பண்பு உடையது.

$f(x)\, g(x) = d_0\, x^0 * d_1\, x^1 * \dots * d_{n+m}\, x^{n+m}$

$= a_s\, b_0 + a_{s-1}\, b_1 + \dots + a_1\, b_{s-1} + a_0\, b_s$

$= a_u\, b_v$ உரு மாதிரியுள்ள பெருக்கங்களின் கூட்டுத் தொகை, $u + v = s$.

$(f(x)\, g(x))\, h(x)$-ல் x^k-ன் கெழு,

$d_k\, c_0 + d_{k-1}\, c_1 + \dots + d_1\, c_{k-1} + d_0\, c_k$,
$0 \leqq s \leqq k$,

$d_s = a_s\, b_0 + a_{s-1}\, b_1 + \dots + a_0\, b_s$

$\therefore \quad (f(x)\, g(x))\, h(x)$-ல் x^k-ன் கெழு $= d_s\, c_w$ உருமாதிரியுள்ள பெருக்கங்களின் கூட்டுத் தொகை, $s + w = k$.

$(a_u\, b_v)\, c_w$ உரு மாதிரியுள்ள பெருக்கங்களின்கூட்டுத்தொகை $u + v + w = k$.

$g(x)\, h(x) = e_0\, x^0 * e_1\, x^1 * \dots * e_{m+p}\, x^{n+p}$

$f(x)(g(x)\, h(x))$-ல் x^k-ன் கெழு.

$= a_k e_0 + a_{k-1}\, e_1 + \dots + a_1\, e_{k-1} + a_0\, e_k$.

$0 \leqq t \leqq k$,

$e_t = b_t\, c_0 + b_{t-1}\, c_1 + \dots + b_1\, c_{t-1} + b_0\, c_t$

$= b_v\, c_w$ உரு மாதிரியுள்ள பெருக்கங்களின் கூட்டு தொகை $v + w = t$

$\therefore \quad f(x)\, (g(x)\, h(x))$-ல் x^k-ன் கெழு.

$= a_u\, (b_v\, c_w)$ உரு மாதிரியுள்ள பெருக்கங்களின் கூட்டுத் தொகை $u + v + w = k$

R-ல் பெருக்கலுக்குச் சேர்ப்புப் பண்பு உண்டாதலால்

$(f(x)\, g(x))\, h(x)$-ல் x^k-ன் கெழு $= f(x)\, (g(x)\, h(x))$-ல் x^k-ன் கெழு.

$\therefore \quad (f(x)\, g(x))\, h(x) = f(x)\, (g(x)\, h(x))$

$\therefore$ $R7$ நிறைவேறியது.

$f(x), g(x), h(x) \in R[X]$

$$f(x) = a_0 x^0 * a_1 x^1 * \dots * a_n x^n$$

$$g(x) = b_0 x^0 * b_1 x^1 * \dots * b_m x^m$$

$$h(x) = c_0 x^0 * c_1 x^1 * \dots * c_p x^p$$

$$g(x) + h(x) = (b_0 + c_0)\, x^0 * (b_1 + c_1)\, x^1 * \dots$$

$$f(x) \cdot [g(x) + h(x)] = (a_0 x^0 * a_1 x^1 * \dots)\, [(b_0 + b_0)\, x^0 * (b_1 + c_1)\, x' * \dots]$$

$= d_0 x^0 * d_1 x^1 * \dots$ என்பதில்

x^i-ன் கெழு $= d_i = a_s (b_r + c_r)$ உரு மாதிரியுள்ள பெருக்கங்களின் கூட்டுத்தொகை, $s + r = i$

$$d_i = a_s (b_r + c_r),\ s + r = i$$

$= a_s b_r + a_s c_r,\ s + r = i$ (R கண வளையத்தின் பங்கீட்டு விதி)

$= \alpha_i + \beta_i$ என்க.

$$f(x)\, g(x) = (a_0 x^0 * a_1 x^1 * \dots)\, (b_0 x^0 * b_1 x^1 * \dots)$$

$= a_s b_r$ உரு மாதிரியுள்ள பெருக்கங்களின்கூட்டுத்தொகை.

$= \alpha_0 x^0 * \alpha_1 x^1 * \dots$

$$f(x)\, h(x) = (a_0 x^0 * a_1 x^1 * \dots)\, (c_0 x^0 * c_1 x^1 * \dots)$$

$= a_s c_r$ உருமாதிரியுள்ள பெருக்கங்களின் கூட்டுத் தொகை.

$= \beta_0 x^0 * \beta_1 x^1 * \dots$

$$f(x)\, g(x) + f(x)\, h(x) = (\alpha_0 + \beta_0)\, x^0 * (\alpha_1 + \beta_1) x^1 * \dots \dots$$

$\therefore \quad f(x)\, g(x) + f(x)\, h(x)$-ல் x^i-ன் கெழு $\alpha_i + \beta_i$

$$= d_i$$

$$= f(x) \cdot [g(x) + h(x)]\text{-ல் } x_i\text{-ன் கெழு.}$$

$$\therefore \quad f(x) \cdot [g(x) + h(x)] = f(x)\, g(x) + f(x)\, h(x)$$

$\therefore$ $R[X]$-ல் பல்லுறுப்பின் $\cdot$-க்குப் பல்லுறுப்பு $+$-ன் மீது இடது பங்கீட்டு விதி உண்டு. மேலும்

$$f(x)\, g(x) = (a_0 x^0 * a_1 x^1 * \ldots * a_n x^n)(b_0 x^0 * b_1 x^1 * \ldots * b_m x^m)$$

$$= (a_0 b_0) x^0 * (a_1 b_0 + a_0 b_1) x^1 * \ldots * (a_{n+m} b_0 + a_{n+m-1} b_1 + \ldots + a_0 b_{n+m}) x^{n+m}$$

$$= (b_0 a_0) x^0 * (b_0 a_1 + b_1 a_0) x^1 * \ldots * (b_0 a_{n+m} + b_1 a_{n+m-1} + \ldots + b_{n+m} a_0) x^{n+m} \quad (R\text{-ன் பரிமாற்றுப் பண்பு})$$

$$= (b_0 x^0 * b_1 x^1 * \ldots * b_m x^m)(a_0 x^0 * a_1 x^1 * \ldots * a_n x^n)$$

$$= g(x)\, f(x)$$

$$\therefore \quad f(x)\, g(x) = g(x)\, f(x)$$

$\therefore$ $R[X]$-ல் $\cdot$-க்குப் பரிமாற்றுப் பண்பு உண்டு.

$\therefore$ $R[X]$-ல் $\cdot$-க்கு $+$-ன் மீது வலது பரிமாற்றுப் பண்பு உண்டு.

மேலும் $f(x) \cdot (1 x^0) = (a_0 x^0 * a_1 x^1 * \ldots\ldots) 1x^0$

$$= a_0 (1) x^0 * a_1 (1) x^1 * \ldots\ldots$$

$$= (1) a_0 x^0 * (1) a_1 x^1 * \ldots\ldots \quad (R\text{-ல் பெருக்கலின் பரிமாற்றுப் பண்பு})$$

$$= (1x^0) f(x)$$

$$= a_0 \, x^0 * a_1 \, x^1 * \ldots\ldots$$

(R-ல் ஒருமை உண்டு.)

$$= f(x)$$

$\therefore \quad f(x) \cdot (1x^0) \quad = (1x^0) \cdot f(x) = f(x)$

$\therefore \quad R[X]$-ல் $1x^0$ என்ற பல்லுறுப்பு, ஒருமையாகும்.

$\therefore \quad (R[X], +, \cdot)$ என்பது ஒருமையுள்ள பரிமாற்றுக் கண வளையம்.

5.1.7. தேற்றம்

$R[X]$ என்ற பல்லுறுப்புக் கணவளையத்தின் R' என்ற ஒரு பல்லுறுப்பு உட்கண வளையமும் R-ம் இயல் முறை மாறுதவை.

நிறுவல்

$R^1[X] = \{ ax^0 \mid a \in R \}$

அதாவது $R^1[X]$ என்பது, $\forall_i, i > 0$, $R[X]$-ல் x^i-ன் கெழு, 0 ஆக உள்ள பல்லுறுப்புகள் கணமாகும்.

$ax^0, bx^0 \in R^1[X]$ என்க.

$(ax^0)(bx^0) = (ab)\, x^0$, ($R[X] \cdot$-ல் $\cdot$-ன் வரை இலக்கணம்.)

$\in R^1[X]$ (வரை இலக்கணம்)

$ax^0 + bx^0 = (a + b)\, x^0$, ($R[X]$ -ல் $+$ன் வரை இலக்கணம்.)

$\in R'[X]$ (வரை இலக்கணம்)

$\therefore \quad R[X]$ என்பது $+, \cdot$ ஆகியவற்றால் அடைக்கப்பட்டது.

$b \in R \Longrightarrow -b \in R$ (R ஒரு கண வளையம்)

$\therefore \quad a + (-b) \in R.$ அதாவது $a - b \in R.$

$\therefore \quad -b \in R \Longrightarrow (-b)\, x^0 \in R[X]$

$\therefore \quad ax^0 \in R[X], (-b)\, x^0 \in R[X] \Longrightarrow (a + (-b)\, x^0 \in R[X]$

$$\Longrightarrow (a-b)\,x^0 \in R\ [X]\ a-b \in R$$

$$\Longrightarrow (a-b)\,x^0 \in R'\,[X],$$

(R^1 $[X]$-ன் வரை இலக்கணம்)

$\therefore\ (ax^0)\,(bx^0) \in R^1\,[X],\ (a-b)\,x^0 \in R^1\,[X]$

$R^1\,[X]$ என்பது $R\,[X]$-ன் உட்கண வளையம்.

$\alpha:\ R^1\,[X] \longrightarrow R$ என்ற கோர்த்தலை,

$ax^0 \longmapsto a,\ \forall\ ax^0 \in R^1\,[X]$ என்றவாறு வரையறு. பல்லுறுப்புகளின் கெழுக்கள் R-ல் உள்ளதால், ஒவ்வொரு $a \in R$-க்கும் ax^0 என்ற பல்லுறுப்பு $R^1\,[X]$-ல் உள்ளது.

$\therefore\ \alpha$ ஒரு முழுக் கோர்த்தல்,

சம பல்லுறுப்புகளின் வரை இலக்கணப்படி

$a = b \Longrightarrow ax^0 = bx^0$

$\therefore\ \alpha$ ஒரு $1:1$ கோர்த்தல்.

$\therefore\ \alpha$ என்பது $1:1$ முழுக் கோர்த்தல்.

மேலும்,

$ax^0,\ bx^0 \in R'\ [X],\ \alpha\ (ax^0 + bx^0) = \alpha\ ((a+b)\ x^0)$

பல்லுறுப்புகளின் கூட்டல் வரை இலக்கணம்.

$= a + b \in R$ கோர்த்தல் வரை இலக்கணம்.

$= \alpha\,(ax^0) + \alpha\,(bx^0) \in R.$

$\therefore\ \alpha$ கோர்த்தல் $+$ஐப் போற்றுகிறது.

$ax^0,\ bx^0 \in R'\,[X],\ \alpha\ ((ax^0)\ \ (bx^0)) = \alpha\ \ ((ab)\ x^0)$

பல்லுறுப்புக்களின் பெருக்கல் வரை இலக்கணம்.

$= ab \in R$

$= \alpha\,(ax^0)\,\alpha\,(bx^0) \in R$

$\therefore\ \alpha$ கோர்த்தல் $\cdot$ ஐப் போற்றுகிறது.

$\therefore\ \alpha$ ஒரு செயல் மாற்றுக் கோர்த்தல்.

$\therefore$ $\alpha : R^1 \to R$ என்பது $1:1$ முழுக் கோர்த்தல், செயல் மாற்றுக் கோர்த்தல்,

$\therefore$ α என்பது இயல் முறை மாற்றுக் கோர்த்தல்.

$\therefore$ $R^1 [X]$-ம் R-ம் இயல் முறை மாருதவை.

இந்தத் தேற்றத்தின் உண்மையை, '$R \ [X]$-ல் R ஐப் பதிக்க முடியும்' (R can be embedded in $R \ [X]$) எனலாம்.

5.1.8. மேற்கண்ட தேற்றத்திஞல் பெறப்படும் அழகான முடிவு

இந்தத் தேற்றத்திஞல் நமது குறியீட்டு முறை மிகவும் எளிதாகின்றது. R-ம், $R^1 (x)$-ம் இயல்முறை மாருதவையாதலால், $R^1 [X]$-ல் உள்ள உறுப்புகளுக்குப் பதில் R-ன் உறுப்புகளை எழுதலாம். அதாவது ax^0 என்ற பல்லுறுப்புக்குப் பதிலாக a என்றே எழுதலாம்.

R-ன் ஒருமை 1 என்ருல் $1 \ x^1$-க்குப் பதில் x என்றும் என்ருல் $i > 1$ $1x^i$-க்குப் பதில் x^i என்றும் எழுதலாம். அப்படியென்ருல், $(-a)x^i$-க்குப் பதில் $-ax^i$ என்றும் எழுதலாம்; x ஆனது $R \ [X]$ ஐச் சேர்ந்த பல்லுறுப்பு எனலாம்.

இந்தக் குறிப்புகளிஞல், ஒரு வகையில் R ஐயும், x ஐயும் கொண்டது $R \ [X]$ எனலாம். ஆகையால் இந்தப் புதிய குறியீட்டு முறையில் $x \in R \ [X]$ என்பதைப் பழைய குறியீட்டு முறையில் $0x^0 + 1 \ x^1$ என்று எழுதலாம்.

$\therefore$ $x \cdot x$ அதாவது x^2 என்பதை $(0x^0 + 1 \ x^1)(0x^0 + 1x^1)$ என்று எழுதலாம்.

பழைய குறியீட்டு முறையில், $(0x^0 + 1 \ x^1)(0x^0 + 1 \ x^1) = 0x^0 + 0x^1 + 1 \ x^2 = 1 \cdot x^2$

$\therefore$ பல்லுறுப்பு x^2 என்பது, பல்லுறுப்பு x தன்னைத்தானே இரு தடவைகளில் பெருக்கிக் கொள்ளுகிறது என்பதாகும்.

இதுபோல் பல்லுறுப்பு x^i என்பது பல்லுறுப்பு x தன்னைத் தானே i தடவைகள் பெருக்கிக் கொள்வதாகும்.

மேலும் R-ன் ஒவ்வொரு a ஐயும், $R \ [X]$-ச் சேர்ந்த, பல்லுறுப்பு a என்று கொள்ளலாம். ஆதலால் பல்லுறுப்பு x^i-ஐ,

பல்லுறுப்பு a தடவைகள் பெருக்குவது என்பது அர்த்தமுள்ளதாகும். விளைவு : ax^i என்ற பல்லுறுப்பு

$R[X]$-ன் ஒரு பல்லுறுப்பு $f(x) = a_0 * a_1 x * a_2 x^2 * \ldots * a_n x^n$ என்க. ஒவ்வொரு i-க்கும் $a_i x^i$ என்ற உறுப்பை a_i ஐ x-ன் i அடுக்கால் பெருக்கியதன் விளைவு எனக் கருதலாம்.

$f(x)$-ன் தனித்தனி உறுப்புகள், அதாவது, $a_0, a_1 x, a_2 x^2, \ldots\ldots, a_n x^n$ என்பவை ஒவ்வொன்றும் $R[X]$-ன் ஒரு பல்லுறுப்பு ஆகும். இந்தப் பல்லுறுப்புகளைக் 'கூட்டி'னால் வருவது $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots + a_n x^n$. இந்தக் கூட்டுத் தொகையை $f(x)$ என்று குறிக்கலாம். ஒரு பல்லுறுப்பின் உறுப்புகளுக்கிடையே உள்ள $*$ குறிக்குப் பதில் $+$ குறியைப் பயன்படுத்தலாம். ஆகையால் ஒவ்வொரு பல்லுறுப்பையும் ஓருறுப்புப் பல்லுறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகையாகக் கருதலாம்.

$\therefore$ $R[X]$-ன் எல்லா உறுப்புகளும், $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ என்ற பல்லுறுப்புகள், $a_0, a_1, \ldots, a_n \in R$, $n \in Z^+$

5.1.9. வரை இலக்கணம்

R என்ற ஒருமையுள்ள பரிமாற்றுக் கண வளையத்தில் கெழுக்களைக் கொண்ட x-ல் **பூச்சியமற்றப்** பல்லுறுப்பு $f(x)$ என்க.

x-ன் அடுக்களில் மீப் பெரிய முழு எண் m என்க.

x^m-ன் கெழு $\neq 0$ என்றால் m என்பது $f(x)$-ன் **அடுக்கு** எனப்படும்.

இதன் குறியீடு : $\deg f(x)$

$f(x)$-ன் அடுக்கு m, x^m-ன் கெழு a_m என்றால், a_m என்பது $f(x)$-ன் முக்கியக் கெழு (leading coeffieient) எனப்படும்.

பழைய குறியீட்டு முறையில் x^0-ன் கெழுக்கள், அதாவது x சம்பந்தப்படாத உறுப்புகள், மாறிலி உறுப்புகள் (constant terms) எனப்படுவன.

மாறிலி உறுப்பை மட்டுமேஉடைய பல்லுறுப்புக்கு "மாறிலிப் பல்லுறுப்பு" என்பது பெயர். வரை இலக்கணப்படி மாறிலிப் பல்லுறுப்பு என்பது மாறிலி பெருக்கும் x^0 பல்லுறுப்பு.

0 என்பது பூச்சியமற்ற மாறிலிப் பல்லுறுப்பின் அடுக்கு. வரை இலக்கணத்தில் கோடிட்டபடி பூச்சியப் பல்லுறுப்பின் அடுக்கு வரையறுக்கப்படவில்லை.

உதாரணமாக, $f(x) = 4x^3 - 10x^2 + 2x^6 - 3$ என்றால்

$f(x)$-ன் அடுக்கு : 6

$f(x)$-ன் முக்கியக் கெழு : 2

$f(x)$-ன் மாறிலி உறுப்பு: -3

5·1·10. தேற்றம்

R என்பது எண் அரங்கமென்றும், $f(x)$, $g(x)$ என்பவை $R[X]$-ன் பூச்சியமற்ற உறுப்புகள் என்றும் கொண்டால்,

$$\deg(f(x)\,g(x)) = \deg f(x) + \deg g(x)$$

நிறுவல்

$\deg f(x) = n$, $\deg g(x) = m$ என்றும் வைத்துக் கொண்டால்

$$f(x) = a_0 + a_1 x^1 + \dots + a_n x^n$$

$$g(x) = b_0 + b_1 x^1 + \dots + b_m x^m,$$

$a_0, a_1 \dots a_n, b_0, b_1, \dots b_m \in R$

$a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$

R ஓர் எண் அரங்கமாவதால், $a_n b_m \neq 0$

$\therefore$ $a_n b_m$ என்பது $f(x)\,g(x)$-ல் x^{n+m}-ன் கெழு ஆனதால்

$$\deg(f(x)\,g(x)) = n + m$$

$$= \deg f(x) + \deg g(x)$$

5.1 11. கிளைத் தேற்றம்

R என்பது எண் அரங்கமென்றால், $R[X]$-ம் எண் அரங்கமே.

நிறுவல்

R : ஓர் எண் அரங்கம் என்க.

∴ $f(x)$-ம், $g(x)$-ம் $R[X]$-ன் எவையேனும் **பூச்சியமற்ற** உறுப்புகள் என்க. பூச்சியமற்ற பல்லுறுப்புக்குத் தான் அடுக்கு உண்டு என்பதால் $f(x)$-ன் அடுக்கு m என்றும் $g(x)$-ன் அடுக்கு n என்றும் கொள்க.

நிறுவிய தேற்றத்தின்படி, $\deg f(x) + \deg g(x)$
$$= \deg (f(x)\, g(x))$$

அதாவது $m + n = \deg (f(x)\, g(x))$

∴ $f(x)\, g(x)$-க்கு அடுக்கு உண்டு.

∴ $f(x)\, g(x)$ ஒரு **பூச்சியமற்ற** பல்லுறுப்பு.

$f(x), g(x)$ பூச்சியமற்றவை $\Longrightarrow f(x)\ \ g(x)$ பூச்சியமற்றது.

∴ $R[X]$-ல் பூச்சிய வகுப்பான்கள் உண்டு.

$R[X]$ ஒருமையுள்ள பரிமாற்றுக் கணவளையம் என்று நமக்குத் தெரியும்.

∴ $R[X]$ ஓர் எண் அரங்கம்.

5·1·12. தேற்றம்

F யாதாவதோர் எண் அரங்கமென்றால், $F[X]$ என்ற பல்லுறுப்பு அரங்கம் களம் அல்ல.

நிறுவல்

$F[X]$-ல் $\deg f(x) \neq 0$ என்றவாறு யாதாவதோர் உறுப்பு $f(x)$ என்க. $f(x)$-க்குப் பெருக்கலின் நேர்மாறு உண்டென்றால், அது பூச்சியப் பல்லுறுப்பு $0\,x^0$ ஆகாது

ஏனெனில் $f(x) \equiv a_0 * a_1 x * a_2 x^2 * \ldots * a_n x^n$ என்றால்,

$$f(x) \cdot 0\,x^0 = (a_0\, x^0 * a_1\, x * \ldots * a_n\, x^n) \cdot (0\, x^0 * 0\, x^1 * \ldots)$$

$$= (a_0 \cdot 0)\, x^0 * (a_1 \cdot 0)\, x * \ldots \ldots$$

$$= 0\, x^0 * 0\, x * \ldots$$ (F எண் அரங்கத்தின் பண்பு)

$$= 0 \cdot x^0$$

$\therefore \ f(x) \cdot 0x^0 \ \neq 1 \cdot x^0$ (பெருக்கலின் முற்றொருமை)

$\therefore \ f(x)$-க்குப் பூச்சியப் பல்லுறுப்பு, பெருக்கலின் நேர் மாறாகாது. அப்படியானால் $f(x)$-ன் பெருக்கலின் நேர்மாறு $g(x)$ என்ற பூச்சியமற்ற பல்லுறுப்பு என்க.

$$\therefore \ f(x) \cdot g(x) = 1 \cdot x^0$$

தேற்றம் 5.1.10. படி

$$\therefore \ \deg(f(x) \cdot g(x)) = \deg f(x) + \deg g(x)$$

$$\therefore \ \deg(f(x)\, g(x)) > 0$$

ஆனால் $\deg 1\, x^0 = 0$

$$\therefore \ f(x)\, g(x) \neq 1\, x^0 \in F[x]$$

$$\therefore \ f^{-1}(x) \neq g(x)$$

$g(x)$ என்பது $F[x]$-ன் யாதாவதொரு பூச்சியமற்ற உறுப்பாதலால், $f(x)$-க்கு $F[X]$-ல் பெருக்கலின் நேர்மாறு இல்லை.

$\therefore \ F[X]$ களம் ஆகாது.

5·1·13. கிளைத்தேற்றம்

F என்பது எண் அரங்கமென்க. பல்லுறுப்பு அரங்கம் $F[X]$-ல் உள்ள எந்த உறுப்பின் அடுக்கு 0 ஐ விட அதிகமாக உள்ளதோ அதற்குப் பெருக்கலின் நேர்மாறு இல்லை.

நிறுவல்

நீயே நிறுவி விடு !

5·2. வகுபடுதன்மையும் (Divisibitlity), வகுத்தல் கணக்கும் (Division Algorithm)

இனி யாதாவதொரு களம் F-ல் கெழுக்களையுடைய $F[X]$ பல்லுறுப்புக் கண வளையத்தை ஆராய்வோம். F என்பது களமாதலால், $F[X]$ எண் அரங்கமாகும்.

5·2·1. வரை இலக்கணம்

$f(x), g(x) \in F[X]$ என்க.

$f(x)\, h(x) = g(x)$ என்றவாறு $h(x)$ என்ற பல்லுறுப்பு $F[X]$-ல் இருந்தால் $g(x)$ ஐ $f(x)$ வகுக்கிறது (அதாவது மீதியில்லாமல் வகுக்கிறது) என்போம். இதனை $f(x) \mid g(x)$ என்ற குறியீட்டால் வழங்குவோம்.

$f(x)$ என்பது $g(x)$-ன் **காரணி** (factor) அல்லது **வகுப்பான்** (divisor) எனப்படும். $g(x)$ என்பது $f(x)$-ன் **மடங்கு** (multiple) எனப்படும்.

"வகுக்கிறது" என்பதற்குக் குறியீடு | என்றால், "வகுக்காது" என்பதற்குக் குறியீடு †

$0 \neq C \in F$ என்க.

யாதாவதொரு $f(x) \in F[X]$ என்க. $C^{-1} f(x) \in F[X]$, $C \cdot C^{-1} f(x) = 1\, f(x) = f(x)$

$\therefore C \mid f(x)$

$\therefore F$-ன் பூச்சியமற்ற உறுப்புகள் $F[X]$-ன் ஒவ்வோர் உறுப்பையும் வகுக்கின்றன.

மேலும், $f(x) \mid g(x) \implies cf(x) \mid g(x)\ \forall\ 0 \neq c \in F$

1 ஐ முக்கியக் கெழுவாகவுடைய பல்லுறுப்புக்கு

" ஒன்று கெழுப் பல்லுறுப்பு " (monic polynomial) என்பது பெயர்.

5·2·2. வரை இலக்கணம்

பல்லுறுப்பு $p(x) \in F[X]$ என்க.

$p(x)$-க்கு நேர் அடுக்கு இருந்தும், F-ல் கெழுக்கள் கொண்ட நேர் அடுக்கு உள்ள பல்லுறுப்புகளின் பெருக்கமாக $p(x)$ ஐ எழுதமுடியாது என்றும் இருந்தால், $p(x)$-க்கு, F-ன் மீது சுருங்காப் பல்லுறுப்பு (irreducible polynomial) அல்லது பகாப் பல்லுறுப்பு (prime polynomial)' என்பது பெயர்.

அதாவது $p(x) = q(x) \cdot r(x)$, $q(x), r(x) \in F[X]$ என்றால், $\deg p(x)$ அல்லது $\deg q(x) = 0$ அதாவது $p(x)$ அல்லது $q(x)$ ஒருமாறிலி ஆகும்.

உதாரணம்

$x^2 - 2$ என்ற பல்லுறுப்பு, விகிதமுறு எண்கள் களம் Q-ன், மீது சுருங்காப் பல்லுறுப்பு.

ஆனால் R என்பது மெய் எண்கள் களமானால், $R[X]$-ல்

$x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$

$\therefore$ R-ல் $x^2 - 2$ சுருங்குகிறது.

5·2·3· $F[X]$-க்கு வகுத்தல் கணக்கு (Division Algorithm)

தேற்றம் (வகுத்தல் கணக்கு)

F களத்தில் கெழுக்களைக் கொண்ட பல்லுறுப்புகள் $f(x)$, $g(x)$ என்றும், $g(x) \neq 0$ என்றும் கொண்டால் $f(x) = q(x) g(x) + r(x)$ என்றவாறு ஒரே பல்லுறுப்புகள் $q(x)$-ம், $r(x)$-ம் உள்ளன.

மேலும், $r(x) = 0$ ஆவது, $\deg r(x) < \deg g(x)$ ஆவது, உண்மை

நிறுவல்

$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots\dots + a_n x^n, a_n \neq 0$

$g(x) = b_0 + b_1 x + \dots\dots + b_m x^n, b_m \neq 0$ என்க.

$n < m$ என்றால்.

$f(x) = g(x) \cdot 0 + f(x)$

$\therefore$ $q(x) = g(x)$; $r(x) = f(x)$

$\therefore$ தேற்றம் உண்மை.

இப்பொழுது $\deg g(x) = 0$ என்க.

அதாவது, $g(x) = b_0$, $0 \neq b_0 \in F$.

$q(x) = b_0^{-1} f(x)$ என்றும் $r(x) = 0$ என்றும் எடுத்துக் கொண்டால்

$$q(x) g(x) + r(x) = b_0 b_0^{-1} f(x) + 0$$
$$= f(x)$$

$\therefore$ தேற்றம் உண்மை.

$n > m$ என்க.

இப்பொழுது, $f(x) \neq 0$, $\deg f(x) = n = 0$ என்க.

அதாவது $f(x) = a_0 \quad 0 \neq a_0 \in F$

$m < n$; $n = 0 \Longrightarrow \deg g(x) = m = 0 \Longrightarrow g(x) = b_0$;
$g(x) \neq 0 \Longrightarrow b_0 \neq 0$

$\therefore \; b_0^{-1}$ என்பது உண்டு.

$$f(x) = a_0 = (a_0 b_0^{-1}) b_0 + 0$$
$$= q(x) g(x) + r(x)$$

$q(x) = a_0 b_0^{-1}$, $g(x) = b_0$, $(\deg g(x) = 0)$

$r(x) = 0 \qquad \therefore$ தேற்றம் உண்மை.

$\deg g(x) = m > 0$ என்றால் $f(x) = \quad \cdot g(x) + a_0$.

$r(x) = a_0 \; q(x) = 0$ எனில் தேற்றம் உண்மை.

$\therefore \; \deg f(x) = n = 0$ என்றால் தேற்றம் உண்மை.

$\therefore \; f(x) \neq 0, 1 \leqq \deg g(x) \leqq \deg f(x)$ என்று கொள்க.

அடுத்தபடியாக

$n \geqq m, n > 0$ என்க. இப்பொழுது தேற்றத்தை உறுதியான தொகுத்தறி முறையால் (Strong Principle of Induction) நிறுவலாம்.

, $f(x), g(x) \in F[X]$, $\deg f(x) = n$ என்றால் $f(x) = q(x) g(x) + r(x)$ என்றவாறும், $r(x) = 0$ என்றாவது, $\deg r(x) < \deg g(x)$ என்றாவது உண்மை என்றவாறும், $q(x), r(x)$ என்ற ஒரே பல்லுறுப்புகள் $F[X]$-ல் உள்ளன என்ற கூற்றை S_n என்க.

$n = 1$ என்றால் $\deg f(x) = \deg g(x)$

$\therefore \; f(x) = ax + b, \; g(x) = cx + d, \; a, b, c, d \in F$

$a \neq 0, c \neq 0$.

$q(x) = ac^{-1}$ என்றும், $r(x) = b - a c^{-1} d$ என்றும் கொள்க. அப்படியானல்

$$q(x)\, g(x) + r(x) = (ac^{-1})(cx + d) + b - ac^{-1} d.$$

$$= a(c^{-1} c)\, x + ac^{-1} d + b - ac^{-1} d$$

$$= ax + b + (ac^{-1} d - ac^{-1} d)$$

$$= ax + b$$

$$= f(x)$$

∴ S_1 உண்மை.

இப்பொழுது எல்லா முழு எண்கள் $i < n$-களுக்கு, S உண்மை என்றும் $f(x), g(x) \in r[X]$; $\deg f(x) = n$ என்றும் கொள்க. $n \geq m, n > 0$ என்க.

S_i உண்மையானல் S_n உண்மை என்று நிறுவுவோம்.

$f(x) = a_n b_m^{-1} x^{n-m} g(x) + [f(x) - a_n b_m^{-1} x^{n-m} g(x)]$ என்க.

$h(x) = f(x) - a_n b_m^{-1} x^{n-m} g(x)$ என்று வை.

$$= (a_0 + a_1 x + \dots\dots + a_n x^n) - a_n b_m^{-1} x^{n-m} .$$

$$[b_0 + b_1 x + \dots\dots + b_m x^m]$$

$$= (a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n)$$

$$- [a_n b_m^{-1} b_0 x^{n-m} + \dots\dots + a_n x^n]$$

= (பல்லுறுப்பு அடுக்கு n, முக்கியக் கெழு a_n)

—(பல்லுறுப்பு அடுக்கு n, முக்கியக் கெழு a_n)

$h(x)$-ல் x^n-ன் கெழு, பூச்சியமாகும்.

∴ $\deg h(x) < n$

தொகுத்தறி முறையின் எடுகோள்படி, $i < n$-க்கு S_i உண்மை.

∴ $\deg h(x) < n \Longrightarrow$ { $h(x) = q_1(x)\, g(x) + r(x)$ என்றவாறு $q_1(x), r(x) \in F[X]$; $r(x) = 0$ அல்லது $\deg r(x) < \deg g(x)$ }

$\therefore \quad f(x) = ab^{-1} x^{n-m} g(x) + q_1(x) g(x) + r(x)$

$= [ab^{-1} x^{n-m} + q_1(x)] g(x) + r(x)$

$q(x) = ab^{-1} x^{n-m} + q_1(x)$ என்று வைத்தால்

$f(x) = q(x) g(x) + r(x)$

S_n உண்மையாயிற்று.

இனி நிறுவ: $q(x)$-ம், $r(x)$-ம் ஒரே பல்லுறுப்புகள்,

$f(x) = q(x) g(x) + r(x)$

முடியுமானால்,

$f(x) = q^1(x) g(x) + r^1(x)$, $r^1(x) = 0$ அல்லது

$\deg r^1(x) < \deg g(x)$ என்பதும் உண்மையென்க.

$\therefore \quad q(x) g(x) + r(x) = q^1(x) g(x) + r^1(x)$

$\Longrightarrow [q(x) - q^1(x)] g(x) = r^1(x) - r(x) \ldots (I)$

(I)-ன் இருபக்கங்களிலிருப்பவை $= 0$

அப்படி இல்லையெனில் $\deg (q(x) - q^1(x)) = m^1$ என்க.

$\deg g(x) = m$

$\deg [\{ q(x) - q^1(x) \} g(x)]$

$= \deg \{ q(x) - q^1(x) \} + \deg g(x) = m^1 + m > m$

$\deg [\{ q(x) - q^1(x) \} g(x)] \geq \deg g(x)$

$\deg r'(x) < \deg g(x)$ (ie) $< m$,

$\deg r(x) < \deg g(x)$ (ie) $< m$

$\therefore \quad \deg (r'(x)) - r(x)) < m$

(I)-ன் இடப் பக்கத்தின் அடுக்கு $> m$.

ஆனால் வலப் பக்கத்தின் அடுக்கு $< m$.

இது எதிர் மறுப்பு.

$q(x) - q'(x) = 0$,

$\Longrightarrow q(x) = q'(x).,\ r'(x) - r(x) = 0$

$\Longrightarrow r(x) = r'(x)$; $q(x)$-ம், $r(x)$-ம் ஒரே முறை பல்லுறுப்புகள்.

∴ உறுதியான தொகுத்தறி முறையினுல் தேற்றம் நிறுவப்பட்டது.

$q(x)$-க்கு ஈவு என்றும் $r(x)$-க்கு மீதி என்றும் பெயர்.

5.2.4. வரை இலக்கணம்

களம் F-ல் கெழுக்களைக் கொண்ட ஒரு பல்லுறுப்பு

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a^0$ என்ருல்,

$C \in F, f(c)$ என்ற உறுப்பின் வரை இலக்கணம்

$f(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \dots + a_1 c + a_0$.

மேலும், $f(c) = 0$ என்ருல், c என்பது F-ல் கெழுக்களைக் கொண்ட பல்லுறுப்பு $f(x)$-ன் மூலம் (root) எனப்படும்.

5.2.5. மீதித் தேற்றம் (Remainder Theorem)

$f(x) \in F, a \in F$ என்ருல், $f(x)$ ஐ x-a ஆல் வகுக்க, மீதி $f(a)$ ஆகும்.

மாற்றுவரை

பல்லுறுப்பு $f(x)$ ஐ, பல்லுறுப்பு $x\ a$ ஆல் வகுக்க வரும் மீதி $f(a)$ ஆகும்.

நிறுவல்

$f(x) = g(x)\,q(x) + r(x)$

$r(x) = 0$ அல்லது $deg\ r(x) < deg\ g(x)$ (வகுத்தல் கணக்கு)

$g(x) = x - a$ என்ருல்

$f(x) = (x-a)\,q(x) + r(x)$,

$deg\ r(x) < 1$, ஏனெனில் $deg\ (x-a) = 1$

$\Longrightarrow deg\ r(x) = 0$

$\Longrightarrow r(x)$ என்பது மாறிலிப் பல்லுறுப்பு.

$= k \in F$ என்க,

$\therefore \quad f(x) = (x-a)\, q(x) + k$

$\because \quad a \in F, f(a) = (a-a)\, q(a) + k \in F$

$= 0\, q(a) + k = k \in F$

$k = f(a)$

$\therefore \quad$ மீதி $= f(a)$.

5·2·6· காரணித் தேற்றம் (Factor Theorem)

$f(x) \in F[X],\ a \in F,$

$x\text{-}a \mid f(x) \Longleftrightarrow f(a) = 0$

நிறுவல்

பாகம் 1 $\Longrightarrow$.

$x-a \mid f(x)$ என்க.

$\therefore f(x) = (x-a)\, q(x)$

$a \in F, f(a) = (a-a)\, q(a)$

$= 0$

பாகம் 2 $\Longleftarrow$.

$f(a) = 0$ என்க.

$\therefore$ மீதித் தேற்றத்தின்படி, $f(x)$ ஐ $(x-a)$ ஆல் வகுக்க மீதியில்லை.

$\therefore \quad x-a \mid f(x)$.

5·3· இரு பல்லுறுப்புகளின் பொது வகுத்திகளுள் பெரியது (Greatest Common Divisor)

5·3·1· வரை இலக்கணம்

$f(x)$, $g(x)$ என்ற F-ல் கெழுக்களைக் கொண்ட பூச்சியமற்றப் பல்லுறுப்புகளின் பொது வகுத்திகளுள் பெரியது எனப்படும் பல்லுறுப்பு $d(x) \in F[X]$ ஆனது,

(i) $d(x)$ ஒன்றுக் கெழுப் பல்லுறுப்பு

(ii) $d(x) \mid f(x), d(x) \mid g(x)$

(iii) $e(x) \mid f(x), \quad e(x) \mid g(x) \implies e(x) \mid d(x)$, $e(x) \in F[X]$ என்ற நிபந்தனைகளை நிறைவேற்ற வேண்டும்.

இதனைச் சுருக்கமாக. $g.c.d$ அல்லது மீ.பொ.கா. (மீப் பெரிய பொதுக் காரணி) என்று குறிப்பதுண்டு.

$\because \ d(x) \mid f(x) \implies c\,d(x) \mid f(x), \forall\, 0 \neq c \in F$, என்பதால் ஒரே ஒரு $g.c.d$ கிடைக்க, இந்த $g.c.d$ ஒன்றுக் கெழுவாக இருக்கவேண்டும்.

5·3·2 தேற்றம்.

F களம் என்க. $f(x)$-ம், $g(x)$-ம், $F[X]$-ல் எவையேனும் இரு பூச்சியமற்றப் பல்லுறுப்புகள் என்றால்,

1. இவற்றின் பொது வகுத்திகளுள் பெரியது, பல்லுறுப்பு $d(x)$, $F[X]$-ல் உண்டு.

2. இதனை, $d(x) = f(x)\ m(x) + g(x)\ n(x)$, $m(x)$, $n(x) \in F[X]$ என்றவாறு எழுத முடியும்.

3. மேலும், $d(x)$ என்பது மீச் சிறிய அடுக்குள்ள ஒன்றுக் கெழு பல்லுறுப்பு.

4. இதனை, $f(x)$, $g(x)$-களின் ஒருபடிச் சேர்மானமாக எழுதலாம்.

நிறுவல்

'வகுத்தல் கணக்கு'ப்படி,

$f(x) = q_1(x)\, g(x) + r_1(x)$, $r_1(x) = 0$ அல்லது $\deg r_1(x) < \deg g(x)$ என்றவாறு பல்லுறுப்புகள் $q_1(x)$, $r_1(x)$ என்பவை $F[X]$-ல் உள்ளன.

$r_1(x) \neq 0$ என்க.

$g(x)$-க்கும், $r_1(x)$-க்கும் வகுத்தல் கணக்கை உபயோகித்தால், $g(x) = q_2(x)\, r_1(x) + r_2(x)$, $r_2(x) = 0$, அல்லது, $\deg r_2(x) < \deg r_1(x)$ $r_2(x) \neq 0$ என்றால், மறுமுறையும்

வகுத்தல் கணக்கை உபயோகி. இவ்வாறாக நமக்குக் கிடைக்கும் சமன்பாடுகள்

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= q_1(x)\ g(x) + r_1(x) \\ g(x) &= q_2(x)\ r_1(x) + r_2(x) \\ r_1(x) &= q_3(x)\ r_2(x) + r_3(x) \\ &\vdots \\ r_{k-2}(x) &= q_k(x)\ r_{k-1}(x) + r_k(x) \\ r_{k-1}(x) &= q_{k-1}(x)\ r_k(x) + 0 \end{aligned}\right\}$$

இந்தச் சமன்பாடுகளில் ஒவ்வொரு $r_i(x)$-ம் 0 அல்லது $\deg r_i(x) < \deg r_{i-1}(x)$.

மீதி, பூச்சியமானால், மேற்கண்ட செய்கை (process) நின்று விடுகிறது. ஏனெனில் r_1 ஆனது முடிவுள்ளது (finite).

அடுத்தடுத்த மீதிகள் முந்தைய மீதிகளை விட, அடுக்கில் குறைந்து கொண்டே வருகின்றன. அன்றி, ஏதாவது ஒரு மீதி யானது பூச்சியமற்ற மாறிலி $c \in F$ என்றால், அடுத்த நிலையில் (Step, Stage) மீதி பூச்சியமாகும். ஏனெனில் $c \mid f(x)$, $f(x) \in F[X]$.

சமன்பாடுகள் தொடர் (Sequence of equations) (1)-ல் கடைசி சமன்பாட்டின்படி,

$$r_k(x) \mid r_{k-1}(x)$$

$$\therefore\ r_{k-1}(x) \mid r_{k-2}(x) \Longrightarrow r_k(x)\ r_{k-2}(x) \ldots$$

இப்படியே தொடர்ந்தோமானால், $i < k$, $r_k(x)$ என்பது ஒவ்வொரு $r_i(x)$ ஐயும் வகுக்கிறது என்றும், $f(x)$ ஐயும், $g(x)$ ஐயும் கூட வகுக்கிறது என்றும் அறிவோம்.

$$\therefore\ r_k(x) \mid f(x),\ r_k(x) \mid g(x)$$

$\therefore$ $g.c.d$-ன் இரண்டாவது நிபந்தனை நிறைவேறியது.

$e(x) \mid f(x)$, $e(x) \mid g(x)$ என்க.

(1)-ன் முதல் சமன்பாட்டின் படி, $e(x) \mid f(x)$, $e(x) \mid g(x)$

$$\Longrightarrow e(x) \mid r_1(x)$$

(1)-ன் இரண்டாவது சமன்பாட்டின் படி,

$$e(x) \mid r_1(x),\ e(x) \mid g(x) \Longrightarrow e(x) \mid r_2(x)$$

இப்படியே தொடர்ந்தோமானுல், $e(x) \mid r_k(x)$ என்ற முடிவிற்கு வருவோம்.

$\therefore\ e(x) \mid f(x), e(x) \mid g(x) \Longrightarrow e(x) \mid r_k(x)$

$\therefore$ $g.c.d$-ன் மூன்ருவது நிபத்தஜை நிறைவேறியது.

$r_k(x)$-ன் முக்கியக் கெழு b என்ருல், $b^{-1}\ r_k(x)$-ன் கெழு 1 ஆகும்; ஏனெனில் $b \cdot b^{-1} = 1$

$\therefore\ d(x) = b^{-1}\ r_k(x)$ ஒன்றுக் கெழுப் பல்லுறுப்பு.

$b^{-1} \in F, b^{-1} \mid f(x). b^{-1} \mid g(x).$

$r_k(x) \mid f(x), r_k(x) \mid g(x).$

$\therefore\ b^{-1}\ r_k(x) \mid f(x),\ b^{-1}\ r_k(x) \mid g(x).$

$\therefore\ b^{-1}\ r_k(x)$ ஒன்றுக்கெழுப் பல்லுறுப்பு.

$\therefore\ d(x)$ ஆனது $g.c.d$-ன் வ. இ -ன் மூன்று நிபந்தஜைகஜையும் நிறைவேற்றியது.

$\therefore\ b^{-1}\ r_k(x)$ ஆனது $f(x), g(x)$-களின் $g.c.d.$

$r_1(x) = 0$ **என்க.**

$\therefore\ g(x) \mid f(x).$

$f(x)$-ன் முக்கியக் கெழு c என்ருல், $c^{-1}\ g(x)$ என்பதுதான், $f(x), g(x)$-களின் $g.c.d.$

$c^{-1}\ g(x) = d(x)$ என்ருல்,

$$d(x) = c^{-1}[g(x)] + 0[f(x)]$$
$$= m(x)\,g(x) + n(x)\,f(x),\ m(x) = c^{-1},\ n(x) = 0$$

தேற்றத்தின் (1)-ம், (2)-ம். $r_1(x) = 0$-க்கு நிறுவப்பட்டன.

$r_1(x) \neq 0$. ஏற்கெனவே நிறுவியபடி, $d(x) = b^{-1}\ r_k(x)$. சமன்பாடுகள் தொடர் (1)-ல் கடைசிச் சமன்பாட்டிலிருந்து,

பின்னேக்கிச் சென்று படிப்படியாக எல்லா $r_j(x)$ ஐயும், $j < i$ நீக்கினுல், $r_k(x) = m^1(x) f(x) + n^1(x) g(x)$ என்ற உருவில் எழுதலாம்.

இரு பக்கங்களையும் b^{-1} ஆல் பெருக்க,

$$b^{-1} r_k(x) = b^{-1} m^1(x) f(x) + b^{-1} n^1(x) g(x)$$
$$= m(x) f(x) + n(x) g(x), \quad m(x) = b^{-1} m'(x)$$
$$n(x) = b^{-1} n'(x)$$

தேற்றத்தின் (1)-ம், (2)-ம், $r_1(x) \neq 0$-க்கு நிறுவப்பட்டது.

ஒரே முறைத்தன்மை (Uniqueness)

முடியுமானுல் $d(x)$-ம், $d'(x)$-ம் — இரண்டும் $f(x)$, $g(x)$ களின் பொது வகுத்திகளுள் பெரியவை என்க.

$g.c.d$-ன் வ.இ. படி, $d(x) \mid d'(x)$, $d'(x) \mid d(x)$

$\therefore \quad d'(x) = kd(x), \; k \in F.$

$d'(x)$, $d(x)$ என்ற பல்லுறுப்புகளின் முக்கியக் கெழுக்கள் முறையே p', p என்க.

அப்படியானுல் மேற்கண்ட சமன்பாட்டின்படி, $p^1 = kp$.

$d'(x)$-ம், $d(x)$-ம் ஒன்றுக் கெழுப் பல்லுறுப்புகளாகையால்,

$p' = p = 1 \qquad \therefore \quad k = 1.$

$\therefore \quad d'(x) = d(x)$

குறிப்பு : சமன்பாடுகள் தொகுப்பில் காணப்படும் அடுத்து அடுத்து செய்யப்படும் வகுத்தல் முறைக்குப் 'பல்லுறுப்புகளின் யூக்ளிடின் வகுத்தல் கணக்கு' (Euclid's algorithm for polynomials) என்பது பெயர்.

5·4 ஒரே முறைப் பாகுபாட்டுத் தேற்றம் (Unique Factorisation Theorem)

இந்தத் தேற்றத்திற்கு உதவும் இரு துணைத் தேற்றங்களைக் கீழே தருவோம்.

5·4·1. துணைத் தேற்றம் 1 (Lemma)

களம் F-ல் கெழுக்களைக் கொண்ட பல்லுறுப்புகள் $f(x)$, $g(x)$, $h(x) \in F[X]$ என்க.

$f(x) \mid g(x)\, h(x)$ என்றும், $f(x), g(x)$-க்களின் g.c.d 1 என்றும் இருந்தால், $f(x) \mid h(x)$.

நிறுவல்

g.c.d தேற்றத்தின்படி (5·2·3 காண்க), $f(x)$, $g(x)$-களின் $g \cdot c \cdot d = 1$ என்பதால், $F[X]$-ல் $m(x)$, $n(x)$ என்ற பல்லுறுப்புகள்

$1 = m(x) f(x) + n(x) g(x)$ என்றவாறு உள்ளன. இந்தச் சமன்பாட்டின் இரு பக்கங்களையும் $h(x)$ ஆல் பெருக்க,

$$h(x) = m(x) f(x) h(x) + n(x) g(x) h(x)$$

ஆனால் $f(x) \mid g(x) h(x) \Longrightarrow g(x) h(x) = f(x) q(x)$, $q(x) \in F[X]$

$$\therefore \quad h(x) = m(x) f(x) h(x) + n(x) f(x) q(x)$$

$$= f(x)[m(x) h(x) + n(x) q(x)]$$

$$\Longrightarrow f(x) \mid h(x)$$

5·4·2. துணைத் தேற்றம் 2

களம் F-ன் மீது $F[X]$-ல், $f(x)$ ஒரு சுருங்காப் பல்லுறுப்பு என்றால்,

$$f(x) \mid g_1(x)\, g_2(x) \ldots g_k(x) \in F[X]$$
$$\Longrightarrow f(x) \mid g_i(x), \text{ ஏதோ ஒரு } i, 1 \leqq i \leqq k.$$

நிறுவல்

k ஐப் பொறுத்துக் கணிதத் தொகுத்தறி முறையில் நிறுவலாம்.

$k = 1$ என்றால், $f(x) \mid g_1(x) \Longrightarrow f(x) \mid g_1(x)$. இது சரி.

$\therefore \quad k = 1$-க்குத் தேற்றம் உண்மையாயிற்று.

$k = 2$ என்க.

$f(x) \mid g_1(x)\, g_2(x)$ என்றால், $f(x)$, $g_1(x)$-களின் g.c.d $= 1$ எனில், $f(x) \mid g_2(x)$ (துணைத் தேற்றம் 5·4·1)

அப்படியின்றி, $f(x)$, $g_2(x)$-களின் $g.c.d = 1$ எனில் $f(x) \mid g_1(x)$

$\therefore$ $k = 2$-க்குத் தேற்றம் உண்மையாயிற்று.

தொகுத்தறி முறையின் தற்கோள்

$m < k$-க்குத் தேற்றம் உண்மையென்று வைத்துக் கொள்.

அதாவது, $f(x) \mid g_1(x)\, g_2(x) \ldots g_m(x), \Longrightarrow f(x) \mid g_i(x)$, $1 \leqq i \leqq m$ என்று வைத்துக் கொள்.

$f(x) \mid [g_1(x)\, g_2(x) \ldots g_m(x)]\, g_{m+1}(x)$ என்க.

இப்பொழுது, $f(x) \mid g_{m+1}(x)$ என்றால், $k = m + 1$ க்குத் தேற்றம் உண்மையாயிற்று. அப்படியின்றி, $f(x) \dagger g_{m+1}(x)$ என்றால், $f(x)$, $g_{m+1}(x)$ — களின் $g \cdot c \cdot d = 1$ என்பது பொருள்.

$\therefore$ துணைத்தேற்றம் 5·4·1-ன் படி,

$$f(x) \mid [g_1(x)\, g_2(x) \ldots\ldots g_m(x)]\, g_{m+1}(x)$$

$$\Longrightarrow f(x) \mid g_1(x) \ldots\ldots g_m(x)$$

$$\Longrightarrow f(x) \mid g_i(x), 1 \leqq i \leqq m \qquad \text{(தற்கோள்)}$$

$\therefore$ எப்படியும், $k = m + 1$ க்கு,

$$f(x) \mid g_i(x), \; 1 \leqq i \leqq m + 1$$

$\therefore$ $k = m$-க்குத் தேற்றம் உண்மையென்று கொண்டால்,

$k = m + 1$-க்குத் தேற்றம் உண்மையென நிறுவப்பட்டது.

ஏற்கெனவே, $k = 1, 2, \ldots\ldots$ க்குத் தேற்றம் உண்மையென நிறுவப்பட்டது.

$\therefore$ தொகுத்தறி முறையின் படி, தேற்றம் உண்மை.

5·4·3. பல்லுறுப்புகளுக்கான ஒரே முறைப் பாகுபாட்டுத் தேற்றம்

(Unique Factorisation Theorem for Polynomials)

தேற்றம்

F: ஒரு களம் என்க. $f(x)$ என்பது $F[X]$-ல் பூச்சிய மற்றப் பல்லுறுப்பு என்றால் $f(x) = cp_1(x)\, p_2(x) \ldots\ldots p_m(x)$,

ஒவ்வொரு $p_i(x)$-ம், $i = 1, 2, \ldots\ldots m$-க்கு, $F[X]$-ல் ஒரு, சுருங்கா ஒன்றுக் கெழுப் பல்லுறுப்பு, $c \in F$

மேலும், $p_1(x), p_2(x), \ldots\ldots, p_m(x)$ என்பவை ஒரே பல்லுறுப்புகள். ஆனால் இவை எந்த வரிசையிலும் காணப் படலாம்.

இந்தக் கூற்றில், ஒவ்வொரு $p_i(x)$-ம் ஒன்றுக் கெழுவாக இருக்கவேண்டியதன் காரணம், தேற்றத்தில் ‘ஒரே முறைத் தன்மையை’ உறுதிப்படுத்துவதற்காக.

நிறுவல்

பாகம் 1 $\Longrightarrow f(x)$ ஐத் தேற்றத்தில் வேண்டியவாறு காரணிப் படுத்தலாம் என்று இங்கே நிறுவலாம்.

$deg\, f(x) = 1$ என்க.

$\therefore\ f(x) = ax + b,\ a, b \in F$

$= ax + baa^{-1}$

$= a(x + ba^{-1})$ என்பதில் $x + ba^{-1}$ என்பது ஒன்றுக் கெழுச் சுருங்காப் பல்லுறுப்பு.

$\therefore\ deg\, f(x) = 1$-க்குத் தேற்றம் உண்மையாயிற்று.

தொகுத்தறி முறையின் தற்கோள்

‘n-க்குக் குறைந்த அடுக்குள்ள ஒவ்வொரு பல்லுறுப்பையும் தேற்றத்தில் கண்டவாறு காரணிப்படுத்த முடியும்’ என்க.

$deg\ n$ உள்ள யாதாவதொரு பல்லுறுப்பு $f(x)$ என்க.

$f(x)$-ன் முக்கியக் கெழு a என்றால் $f(x)\ a f'(x)$

இதில் $f'(x) = a^{-1} f(x)$, $f'(x)$ ஒன்றுக் கெழுவுடையது.

$f'(x)$ ஒரு சுருங்காப் பல்லுறுப்பு என்றால் தேற்றம் உண்மையாகும். அப்படியின்றி, $f'(x)$, சுருங்கும் பல்லுறுப்பானால், $f'(x) = g(x)\, h(x)$, $g(x)$-க்கும், $h(x)$-க்கும் பெருக்கலின் நேர்மாறு $F[X]$-ல் இல்லை.

F ஒரு களம், $\therefore$ F-ன் ஒவ்வொரு பூச்சியமற்ற உறுப்புக்கும் ஒரு பெருக்கலின் நேர்மாறு உண்டானதால், $g(x)$, $h(x)$-களின் அடுக்கு 1 அல்லது 1-க்கு அதிகமாக இருக்க வேண்டும்.

$$f'(x) = g(x)\,h(x) \Longrightarrow deg\,f'(x) = deg\,g(x) + deg\,h(x)$$
$$\Longrightarrow deg\,g(x) < deg\,f(x),\; deg\,h(x) < deg\,f(x)$$
$$\Longrightarrow deg\,g(x) < n,\; deg\,h(x) < n.$$

தொகுத்தறி முறையின் தற்கோள்படி,

$deg\;g(x) < n \Longrightarrow g(x) = b\;(b_1(x)\,b_2(x)\,\ldots\,b_s(x))$, $b \in F$, ஒவ்வொரு $b_i(x)$-ம் ஒன்றுக் கெழுச் சுருங்கப் பல்லுறுப்பு.

$deg\,h(x) < n \Longrightarrow h(x) = d\,(d_1(x)\,d_2(x)\ldots d_t(x))$,

$d \in F$, ஒவ்வொரு $d_i(x)$-ம் ஒன்றுக் கெழு, சுருங்காப் பல்லுறுப்பு.

$\therefore\;\; f(x) = (a\,b\,d)\,b_1(x)\,b_2(x)\ldots b_s(x)\,d_1(x)\,d_2(x)\;\ldots\; d_t(x)$

$c = a\,b\,d$ என்றால், தேற்றத்திலுள்ளபடி, $f(x)$ காரணிப் படுத்தப்பட்டது.

$\therefore$ அடுக்கு n உள்ள எல்லாப் பல்லுறுப்புகளுக்கும் தேற்றம் உண்மையாகும். கணிதத் தொகுத்தறி முறைப்படி, எந்த அடுக்கு உள்ள பல்லுறுப்புகளுக்கும் தேற்றம் உண்மையென நிறுவப் பட்டது.

பாகம் 2.

காரணிகளின் ஒரே முறைத் தன்மை

பாகுபாடு ஒரே முறை இல்லையென்றால், முடியுமானால்,

$$f(x) = c\,p_1(x)\,p_2(x)\,\ldots\,p_s(x) = d\,q_1(x)\,q_2(x)\ldots q_t(x)$$

இந்த இரு பாகுபாடுகளும் தேற்றத்தின் நிபந்தனைகளை நிறை வேற்றுகின்றன என்று கொண்டால், இவ்விரு முறைகளின் காரணி களும், எந்த வரிசையில் இருந்தாலும், முற்றிலும் ஒன்றே என்று காண்பித்தால் போதும்.

s ஐப் பொறுத்துத் தொகுத்தறி முறையைக் கையாளுவோம்.

$s = 1$ என்றால், $f(x) = c\,p_1(x) = d\,q_1(x) \ldots q_t(x)$

$p_1(x)$ சுருங்காப் பல்லுறுப்பு $\Longrightarrow p_1(x) \mid q_i(x)$, ஏதோ ஒரு i (5·4·2 காண்க.)

$\Longrightarrow deg\, q_i(x) \not< p_1(x)$

$\Longrightarrow t = 1 \Longrightarrow q_i(1) = q_1(x)$

$\therefore\ f(x) = c\ p_1\ (x) = d\,q_1\ (x) \Longrightarrow p_1(x) \mid q_1(x),$
$q_1(x) \mid p_1(x)$

$p_1(x)$-ம். $q_1(x)$-ம் ஒன்றுக் கெழுவானவையாதலால். $p_1(x)$
$= q_1(x)$

$\therefore\ s = 1$-க்குத் தேற்றம் உண்மையாகி விட்டது.

தொகுத்தறி முறையின் தற்கோள்

$s = k$-க்கு ஒரே முறைக் காரணிகள் என்க.

$f(x) = c\,p_1(x) \ldots p_{k+1}(x)$ என்றும்

$f(x) = d\,q_1(x) \ldots q_t(x)$ என்றும் கொள்க.

$\therefore\ p_{k+1}(x) \mid p_1(x)\,q_2(x) \ldots q_t(x)$

தேற்றம் 5·4·2-ன் படி, $p_{k+1}(x) \mid q_i(x)$, யாதேனும் ஒரு i.

$p_{k+1}(x)$-ம், $q_i(x)$-ம் ஒன்றுக் கெழுச் சுருங்காப் பல்லுறுப்புகள் என்றால், $p_{k+1}(x) = q_i(x)$

$\therefore$ 'அடித்தல் விதி'யின் படி,

$c\,p_1(x)\,p_2(x) \ldots\ldots\ p_k(x) = d\,q_1\ (x) \ldots \ldots\ q_{i-1}\ (x)$
$q_{i+1}\ (x, \ldots q_t(x)$

ஆனால் ஒரு பாகுபாட்டு முறையில் k காரணிகள் மட்டும் தான் உள்ளன. தொகுத்தறி முறையின் தற்கோள் படி, இவை ஒரே காரணிகள் தாம்.

$\therefore\ s = k + 1$-க்குத் தேற்றம் உண்மை.

$\therefore$ தொகுத்தறி முறையின் படி, எல்லா s-க்கும் தேற்றம் உண்மையாயிற்று.

$\therefore$ எடுத்துக் கொண்ட தேற்றம் முழுமையும் நிறுவப்பட்டது..

பயிற்சி

1. $f(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + 4x + 1$, $g(x) = x^2 + x + 1$ என்க.

என்றவாறு $q(x)$, $r(x)$ மெய்ப் பல்லுறுப்புகளை, 5·2·3 தேற்றத்தின் நிறுவலில் கையாண்ட முறையின் வழி, காண்க.

2. $f(x) = x^4 - x^2 - x + 1$, $g(x) = x^4 - 2x^3 + 2x - 1$ என்றால்,

$f(x)$, $g(x)$-களின் $g.c.d$ ஐ, யூக்ளிட்டின் கணக்குப்படி,

$s(x)f(x) + t(x)g(x)$ என்ற அமைப்பில் காண்.

3. கீழ்க்காணும் பல்லுறுப்புகள் ஒவ்வொன்றும் தரப்பட்டுள்ள களங்கள் மீது சுருங்காதவையா என்று காண்.

(i) $x^2 + x + 2$, Q, R, C,

(ii) $x^3 + 2$, Q, R, C

(iii) $x^4 - 1$, $Z/7$, $Z/19$

(iv) $x^2 + 2x - 1$, Q, R, C

6 வெக்டர் வெளிகள்

(Vector Spaces)

6.1. வரை இலக்கணம்

F களத்தின்மீது வரையறுக்கப்பட்டுள்ள வெக்டர் வெளி (Vector Space) $V(F)$, அல்லது சுருக்கமாக, V ஆனது,

$V1$ வெக்டர்கள் (Vectors) எனப்படும் உறுப்புகளைக் கொண்ட $(V, +)$ என்ற கணித முறையானது அபீலியன் குலம்.

$V2$ எண்ணிகள் (Scalars) எனப்படும் உறுப்புகளுடைய $(F, +, \cdot)$ ஆனது ஒரு களம்.

$V3$ ஒவ்வொரு $c \in F$-க்கும், $\alpha \in V$-க்கும்,

(a) $c \circ \alpha \in V$

(b) $(c_1 + c_2) \circ \alpha = (c_1 \circ \alpha) + (c_2 \circ \alpha)$, $\quad c_1, c_2 \in F, \alpha \in V$

(c) $(c_1 \circ c_2) \circ \alpha = c_1 \circ (c_2 \circ \alpha)$, $\quad c_1, c_2 \in F, \alpha \in V$

(d) $c \circ (\alpha + \beta) = c \circ \alpha + c \circ \beta \quad c \in F, \alpha, \beta \in V$

(e) $1 \circ \alpha = \alpha$ என்பதில் 1 என்பது களத்தின் பெருக்கலின் முற்றொருமை

என்ற பண்புகளையுடைய மேற்குறித்த களத்தையும் குலத்தையும் இணைக்கும் செயலி $\circ$,

ஆகிய மூன்றையும் உடைய கணித முறையாகும்.

வெக்டர் வெளியை 'ஓர்ப்படி வெளி' (linear space) என்றும் சொல்லுவது உண்டு.

வெக்டர் வெளியின் சரியான குறியீடு : $(V, +), (F, +, \cdot), o)$ ஆனால் வழக்கில் இது சிக்கலானது. ஆகையால், சுலபமாகக் கையாள, $V(F)$ என்ற குறியீட்டையே பயன்படுத்துவோம்.

மேற்குறித்த வரை இலக்கணத்தில் காணும் $+$ குறியானது, குலத்தின் செயலியாகவும், வேறிடத்தில் களத்தின் ஒரு செயலியாகவும் பயன்பட்டுள்ளது. குழப்பிக் கொள்ளாதே!

வழக்கம்போல், $c \circ \alpha$ ஐ $c\alpha$ என்று எழுதலாம்.

வரை இலக்கணப்படி, வெக்டர் வெளியானது, ஒரு களம், ஒரு வெக்டர்கள் கணம், சில சிறப்புப் பண்புகள் உடைய இரு செயலிகள் ஆகியவற்றைக் கொண்டது.

ஒரு வெக்டர் வெளியின் வெக்டர் கணம் வெவ்வேறு வெக்டர்களுக்கும் பொருந்தலாம், கீழே தரப்பட்டுள்ள உதாரணங்களை மாணவர்கள் ஊன்றிப் படிப்பது அவசியம்.

6·1·1. உதாரணங்கள்

1. வரிசைப்பட்ட n கூறுகள் வெளி (Ordered n-tuple space)

F : யாதாவதொரு களம்.

V : $\{(c_1, c_2, \ldots, c_n) \mid c \in F\}$ என்க. இதில் $(c_1 c_2 \ldots c_n)$ என்பது வரிசைப்பட்ட n கூறுகள் எனப்படும்.

V ன் செயலிகள்

எவையேனும் இரு உறுப்புகள் $\alpha, \beta \in V$,

$\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $\beta = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ என்க.

'வெக்டர் கூட்டல்'

$$\alpha + \beta = (a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

$$= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$$ என்று வரையறு.

முக்கியக் குறிப்பு

α ஐயும், β ஐயும் இணைக்கும் $+$ செயலியானது வெக்டர் கணத்தைச் சேர்ந்தது. $a_i + b_i$ என்பதில் உள்ள $+$ செயலி, F-களத்தைச் சேர்ந்தது, $\forall\, i = 1, 2, \ldots, n$.

'எண்ணிப் பெருக்கல்', யாதேனும் ஓர் உறுப்பு $c \in F$ என்றால் $c\alpha = c(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (c a_1, c a_2, \ldots, c a_n)$ என்றும் வரையறு.

முக்கியக் குறிப்பு

$c\alpha$ என்பதில் உள்ள பெருக்கல் செயலி, எண்ணியைச் சேர்ந்தது. $c\,a_i, \forall_i = 1, 2, \ldots, n$ என்பதில் உள்ள பெருக்கல் செயலி, F களத்தைச் சேர்ந்தது.

மேலும் $\alpha = \beta \Longleftrightarrow a_i = b_i, \forall_i = 1, 2, \ldots, n$ என்க.

இப்பொழுது $V(F)$ ஆனது, F-ன் மீது வெக்டர் வெளி என்பதை நிறுவுவோம்.

'$(V, +)$, அபீலியன் குலம்' என்பதன் நிறுவல் :

(i) $a_i + b_i \in F, i = 1, 2, \ldots, n$ [$(F, +, .)$ களம்]

$\therefore \alpha, \beta \in V, \alpha + \beta = (a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n)$

$= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$

(வெக்டர் கூட்டலின் வ.இ.)

$\in V \because a_i + b_i \in F, \forall i = 1, 2, \ldots, n$

$\therefore V$, + ஆல் அடைக்கப்பட்டது.

(ii) $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n), \beta = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$,

$\gamma = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ என்றால்,

$\alpha + (\beta + \gamma) = (a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1 + c_1, b_2 + c_2, \ldots, b_n + c_n)$ (வெக்டர் கூட்டல்)

$= (a_1 + (b_1 + c_1), a_2 + (b_2 + c_2), \ldots, a_n (b_n + c_n))$

(வெக்டர் கூட்டல்)

$= ((a_1 + b_1) + c_1, (a_2 + b_2) + c_2, \ldots, (a_n + b_n) + c_n)$ (F களத்தில் +-ன் சேர்ப்புப் பண்பு)

$= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n) + (c_1, c_2, \ldots c_n)$

(வெக்டர் கூட்டல்)

$= (\alpha + \beta) + \gamma$

$\therefore$ V-ல் +-க்குச் சேர்ப்புப் பண்பு உண்டு.

(iii) $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n), \beta = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$.

$\alpha + \beta = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$

(வெக்டர் கூட்டல்)

$= (b_1 + a_1, b_2 + a_2, \ldots, b_n + a_n)$
(F களத்தில் $+$-ன் பரிமாற்றுப் பண்பு)

$= (b_1, b_2, \ldots, b_n) + (a_1, a_2, \ldots, a_n)$

$= \beta + \alpha$

(*iv*) 0 என்பது F களத்தில் $+$-ன் முற்றொருமை. $\therefore 0 \in F$.

V-ன் எந்த ஓர் உறுப்பும் F-ன் எவையேனும் n உறுப்புகளைக் கூறுகளாகக் கொண்டிருப்பதாலும், $0 \in F$ என்பதாலும், V-ன் ஓர் உறுப்பின் n கூறுகள் அனைத்தும் 0 ஆகவே எடுத்துக் கொள்ளலாம்.

$\therefore \quad (0, 0, \ldots, 0) \in V$.

$\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ என்றால்,

$\alpha + 0 = (a_1 + 0, a_2 + 0, \ldots, a_n + 0)$ (வெக்டர் கூட்டல்)

$= (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ($\because$ F களத்தில் 0 ஆனது $+$-ன் முற்றொருமை)

$= \alpha$

$0 + \alpha = \alpha + 0$ (V-ல் $+$-ன் பரிமாற்றுப் பண்பு)

$= \alpha$

$\therefore \quad \alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$

$\therefore$ 0 என்பது V-ல் $+$-ன் முற்றொருமை.

(vi) $(F, +, \cdot)$ ஒருகளமாதலால், F-ன் ஒவ்வோர் உறுப்புக்கும் $+$-ன் நேர்மாறு உண்டு. அதாவது, $\forall\, i = 1, 2, \ldots, n$, $a_i \in F$-ன், $+$-ன் நேர்மாறு, $-a_i \in F$ என்பதாகும்.

$\therefore \quad (-a_1, -a_2, \ldots, -a_n) \in V$.

$\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in V$ என்றும்,

$\beta = (-a_1, -a_2, \ldots, -a_n) \in V$ என்றும் கொண்டால்,

$\alpha + \beta = (a_1 + (-a_1), a_2 + (-a_2), \ldots, a_n + (-a_n))$
(வெக்டர் கூட்டல்)

$= (0, \quad 0, \quad \ldots, \quad 0)$ (F களத்தில் நேர்மாறு உண்டு)

$= V$-ல் $+$-ன் முற்றொருமை.

$\beta + \alpha = \alpha + \beta$ (V-ல் $+$-ன் பரிமாற்றுப் பண்பு)

$= (0, 0, \ldots, 0)$

$\therefore$ α-க்கு V-ல் $+$-ன் நேர்மாறு உண்டு.

β ஐ, அதாவது α-ன், $+$-ன் நேர்மாற்றை $-\alpha$ என்று எழுதலாம்.

$\therefore$ $(V, +)$: ஓர் அபீலியன் குலம்.

எண்ணிப் பெருக்கலின் பண்புகள் : நிறுவல்

(a) $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in V$, $c \in F$ என்றால்,

$c\alpha = c(a_1, a_2, \ldots, a_n)$

$= (ca_1, ca_2, \ldots, ca_n)$ (எண்ணிப் பெருக்கல் வரை இலக்கணம்)

ஆனால் $ca_i \in F$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$ ($\because$ F களத்தில் பெருக்கலுக்கு அடைப்புப் பண்பு)

$\therefore$ $(ca_1, ca_2, \ldots, ca_n) \in V$

$\therefore$ $c\alpha \in V$.

(b) $c_1, c_2 \in F$, $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in V$,

$(c_1 + c_2)\alpha = (c_1 + c_2)(a_1, a_2, \ldots, a_n)$

$= ((c_1 + c_2)\, a_1, (c_1 + c_2)\, a_2, \ldots, (c_1 + c_2)\, a_n)$

$= (c_1 a_1 + c_2 a_1, c_1 a_2 + c_2 a_2, \ldots, c_1 a_n + c_2 a_n)$ (F களத்தில், $+$-ன் மீது $\cdot$-ன் வலது பங்கீட்டு விதி)

$= (c_1 a_1, c_1 a_2, \ldots, c_1 a_n) + (c_2 a_1, c_2 a_2, \ldots; c_2 a_n)$

$= c_1 (a_1, a_2, \ldots, a_n) + c_2 (a_1; a_2, \ldots, a_n)$

$= c_1 \alpha + c_2 \alpha$

$\therefore$ $(c_1 + c_2)\alpha = c_1 \alpha + c_2 \alpha$.

(c) $c_1, c_2 \in F$, $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in V$,

$$(c_1 c_2)\alpha = (c_1 c_2)(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

$$= ((c_1 c_2) a_1, (c_1 c_2) a_2, \ldots, (c_1 c_2) a_n)$$

(எண்ணிப் பெருக்கல்)

$$= (c_1 (c_2 a_1), c_1 (c_2 a_2), \ldots, c_1 (c_2 a_n))$$

(F களத்தில் பெருக்கலின் சேர்ப்புப் பண்பு)

$$= c_1 (c_2 a_1, c_2 a_2, \ldots, c_2 a_n)$$

$$= c_1 [c_2 (a_1, a_2, \ldots, a_n)]$$

$$= c_1 (c_2 \alpha)$$

$$\therefore \quad (c_1 c_2) \alpha = c_1 (c_2 \alpha)$$

(d) $c \in F$, $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $\beta = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in V$

$$c(\alpha + \beta) = c(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$$

(வெக்டர் கூட்டல்)

$$= (c(a_1 + b_1), c(a_2 + b_2), \ldots, c(a_n + b_n))$$

(எண்ணிப் பெருக்கல் வ.இ.)

$$= (ca_1 + cb_1, ca_2 + cb_2, \ldots, ca_n + cb_n)$$

(F களத்தில் $+$ன் மீது $\cdot$-ன் இடது பங்கீட்டு விதி)

$$= (ca_1, ca_2, \ldots, ca_n) + (cb_1, cb_2, \ldots, cb_n)$$

(வெக்டர் கூட்டல்)

$$= c(a_1, a_2, \ldots, a_n) + c(b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

(எண்ணிப் பெருக்கல் வ.இ.)

$$= c\alpha + c\beta$$

(e) $1 \in F$, $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in V$,

$$1 \cdot \alpha = 1(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

$$= (1 \cdot a_1, 1 \cdot a_2, \ldots, 1 \cdot a_n)$$ (எண்ணிப் பெருக்கல்).

$$= (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$ (F களத்தின் ஒருமை 1)

$$= \alpha$$

V ஆனது வெக்டர் வெளிக்கான எல்லா நிபந்தனைகளையும் நிறைவேற்றுவதால், $V(F)$ என்பது வெக்டர் வெளி.

2. கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஒரு கணத்திலிருந்து ஒரு களத்துள் சார்புகள் வெளி (Space of functions from a set to a field)

F என்பது யாதேனும் ஒரு களம்; S என்பது யாதேனும் ஒரு வெற்றற்ற கணம். (உதாரணமாக, மூடிய இடைவெளி $[0, 1]$)

$V = \{$ கணம் S-லிருந்து F-க்கு எல்லா உள் சார்புகள் $\}$

$= \{ f, g, h, \dots \}$

எவையேனும் இரு வெக்டர்கள் $f, g \in V$ என்றால், வெக்டர் கூட்டல் $f + g$ ஐ,

$$(f + g)(s) = f(s) + g(s), \quad s \in S$$

என்றவாறு வரையறு.

முக்கியக் குறிப்பு

இடப் பக்கத்தில் $+$ ஆனது வெக்டர் கூட்டல். வலப் பக்கத்து $+$ ஆனது களத்தின் கூட்டல். எண்ணி $c \in F$. வெக்டர் $f \in V$.

'எண்ணிப் பெருக்கல்' cf ஐ,

$(cf)(s) = cf(s)$ என்று வரையறு.

முக்கியக் குறிப்பு

இடப் பக்கத்திய $\cdot$ ஆனது எண்ணிப் பெருக்கல்; வலப் பக்கத்திய $\cdot$ ஆனது களப் பெருக்கல்.

இப்பொழுது $V(F)$ ஆனது ஒரு வெக்டர் வெளி என நிறுவலாம். முதலில் $(V, +)$ அபீலியன் குலம் என்பதை நிறுவலாம்.

நிறுவல்

(i) $f, g \in V, \; s \in S,$

$(f + g)s = f(s) + g(s)$ (V-ல் $+$ன் வ.இ.)

$(F, +, \cdot)$ களமாதலால், $f(s) + g(s) \in F$.

அதாவது, $(f+g)s \in F$.

$\therefore$ $f+g$ என்பது ஒரு சார்பு.

$\therefore$ $f+g \in V$

$\therefore$ V ஆனது, வெக்டர் $+$ ஆல் அடைக்கப்பட்டது.

(ii) $(f+g)s = f(s)+g(s)$ (வெக்டர் கூட்டல்)

$= g(s)+f(s)$
(F களத்தில் $+$ ன் பரிமாற்றுத் தன்மை)

$= (g+f)s$ (வெக்டர் கூட்டல்)

$\therefore$ $f+g = g+f$ (சம கோர்த்தல்கள் வ.இ.)

$\therefore$ V-ல் $+$-க்குப் பரிமாற்றுத் தன்மை உண்டு.

(iii) $f, g, h \in V$, $s \in S$.

$((f+g)+h)(s) = (f+g)s+h(s)$ (வெக்டர் கூட்டல்)

$= (f(s)+g(s))+h(s)$
(வெக்டர் கூட்டல்)

$= f(s)+(g(s)+h(s))$
(F களத்தின் சேர்ப்புப் பண்பு)

$= f(s)+(g+h)s$
(வெக்டர் கூட்டல் வ.இ,)

$= (f+(g+h))s$
(வெக்டர் கூட்டல் வ.இ.)

$\therefore$ $(f+g)+h = f+(g+h)$
(சம கோர்த்தல்கள் வ.இ.)

$\therefore$ V-ல் $+$-க்குச் சேர்ப்புப் பண்பு உண்டு.

(iv) S-ன் ஒவ்வோர் உறுப்புக்கும் எதிர் உருவானது F-ல் பூச்சிய உறுப்பு 0 என்றவாறு உள்ள கோர்த்தலைப் பூச்சியச் சார்பு (Zero function) என்க.

அதாவது, $\forall\, s \in S,\ 0(s) = 0 \in F$. $\quad \therefore\ 0 \in V$

$0, f \in V$,

$(0+f)\ s = 0(s) + f(s)$ (வெக்டர் கூட்டல்)

$= 0 + f(s)$ (பூச்சியச் சார்பு)

$= f(s)$ (F-ல் 0 ஆனது $+$-ன் பூச்சிய உறுப்பு)

$\therefore\ 0 + f = f$ (சம கோர்த்தல்கள்)

$\therefore\ 0 + f = f + 0 = f$ (V-ல் $+$-ன் பரிமாற்றுப் பண்பு)

$\therefore$ V-ல் 0 ஆனது பூச்சிய உறுப்பு; அதாவது $+$-ன் முற்றொருமை 0 ஆகும். இதனைப் பூச்சிய வெக்டர் என்றும் அழைப்பர்.

(v) $\forall\, f \in V, f(s) \in F$

$(F, +)$ குலமாதலால், F-ன் ஒவ்வோர் எண்ணிக்கும், $+$-ன் நேர்மாறு உண்டு. உதாரணமாக, F-ல், $f(s)$-க்கு $+$-ன் நேர் மாற்றை $-f(s)$ என்று எழுதலாம்.

இதற்கு $f(s)$-ன் எதிர் உறுப்பு (negative) என்றும் பெயர்.

$\therefore\ f(s) + (-f(s)) = 0 \in F$.

$\therefore\ (-f)(s) = -f(s)$ என்று எழுதலாம்.

$\therefore\ (f + (-f))(s) = 0$ (வெக்டர் கூட்டல் வ.இ.)

$\therefore$ f-ன் $+$-ன் நேர்மாறு $-$ எனலாம்.

$\therefore$ V-ல் $+$-ன் நேர்மாறுகள் உண்டு.

$\therefore$ $(V, +)$ ஓர் அபீலியன் குலமாயிற்று.

எண்ணிப் பெருக்கலின் பண்புகள்

(a) $c \in F,\ s \in S$,

$(cf)\,s = c\,f(s)$

F களம், $c \in F,\ f(s) \in F \Longrightarrow c\,f(s) \in F$

$\Longrightarrow cf$ என்பது S-லிருந்து F-க்கு உள் சார்பு

$\Longrightarrow cf \in V$

(b) $c_1, c_2 \in F, f \in V, s \in S$

$((c_1 + c_2)f)s = (c_1 + c_2) f(s)$ (எண்ணிப் பெருக்கல் வ.இ.)

$= c_1 f(s) + c_2 f(s)$ ($c_1, c_2, f(s) \in F$, F களம், $\therefore$ $+$-ன் $\cdot$-க்கு வலது பங்கீட்டுவிதி)

$= (c_1 f)s + (c_2 f)s$ (எண்ணிப் பெருக்கல் வ.இ.)

$= (c_1 f + c_2 f) s$ (எண்ணிப் பெருக்கல் வ.இ.)

$\therefore \quad (c_1 + c_2) f = c_1 f + c_2 f$ (சமச் சார்புகள் வ.இ.)

(c) $((c_1 c_2) f)(s) = (c_1 c_2) f(s)$ (எண்ணிப் பெருக்கல் வ.இ.)

$= c_1 (c_2 f(s))$ ($c_1, c_2, f(s) \in F$, F-ல் $\cdot$-க்குச் சேர்ப்பு விதி உண்டு)

$= c_1 ((c_2 f)(s))$ (எண்ணிப் பெருக்கல் வ.இ.)

$= (c_1 (c_2 f))(s)$ ($c_2 f$ ஒரு சார்பு. $\therefore$ எண்ணிப் பெருக்கல் வ.இ.)

$\therefore \quad (c_1 c_2) = c_1 (c_2 f)$ (சமச்சார்புகள் வ.இ.)

(d) $c \in F, \ f, g \in V,$

$(c(f+g)(s)) = c((f+g)(s))$ (எண்ணிப் பெருக்கல்)

$= c(f(s) + g(s))$ (வெக்டர் கூட்டல்)

$= cf(s) + cg(s)$ ($c, f(s), g(s) \in F$)

$= (cf)(s) + cg(s)$ (எண்ணிப் பெருக்கல்)

$= (cf + cg)(s)$ (வெக்டர் கூட்டல்)

$\therefore \quad c(f+g) = cf + cg$ (சமச்சார்புகள் வ.இ.)

$(e)\ 1 \in F,\ f \in V$ (1 என்பது F-ன் ·-ன் முற்றொருமை)

$(1 \cdot f)(s) = 1\, f(s)$ (எண்ணிப் பெருக்கல்)

$= f(s)$ (F-ல் ·-ன் முற்றொருமை 1)

$1 \cdot f = f$ (சமச்சார்புகள் வ இ.)

$\therefore$ $V(F)$ என்பது ஒரு வெக்டர் வெளி.

3. F களத்தின் மீது வரையறுக்கப்பட்ட ஒரு தேராக் கணியன் x-ல் பல்லுறுப்புகள் வெளி. (Space of polynomials over a field F)

F : கொடுக்கப்பட்ட களம்

V : { F-ல் கெழுக்களைக் கொண்ட எல்லாப் பல்லுறுப்புகள், ஒரே தேராக் கணியன் x-ல் }

$f(x) = a_0 x^0 + a_1 x^1 + \dots\dots + a_n x^n$

$g(x) = b_0 x^0 + b_1 x^1 + \dots\dots + b_n x^n$

$f(x), g(x) \in V$ என்றால்

V-ல் 'கூட்டலை', அதாவது, 'வெக்டர் கூட்டலை',

$f(x) + g(x) = (a_0 + b_0) x^0 + (a_1 + b_1) x^1 + \dots\dots + (a_n + b_n) x_n$ என்றவாறு வரையறு.

$c \in F$ என்றால் 'எண்ணிப் பெருக்கலை',

$c\, f(x) = ca_0 + cz_1\, x + \dots\dots + ca_n\, x^n$ என்று வரையறு.

இப்பொழுது $V(F)$ ஆனது ஒரு வெக்டர் வெளியென்று நிறுவலாம்.

(i) $\left.\begin{array}{l} f(x) = a_0 x^0 + a_1 x^1 + \dots\dots + a_n x^n, \\ g(x) = b_0 x^0 + b_1 x^1 + \dots\dots + b_n x^n \end{array}\right\} \in V$

$a_0, a_1, \dots\dots, a_n\ ;\ b_0, b_1, \dots\dots, b_n \in F$ என்றால்

$f(x) + g(x) = (a_0 + b_0) x^0 + (a_1 + b_1) x_1$
$+ (a_2 + b_2) x^2 + \dots + (a_n + b_n) x^n$ (வெக்டர் கூட்டல் வ. இ.)

$a_i + b_i \in F, \forall_i = 1, 2, \ldots\ldots, n$ $\left\{\begin{array}{l}\because a_i, b_i \in F,\\ \forall_i = 1, 2, \ldots\ldots, n\\ (F, +) \text{ ஒரு குலம்,}\end{array}\right.$

$\therefore \quad (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)\, x + \ldots\ldots + (a_n + b_n)\, x^n$ என்பது F-ல் கெழுக்களைக் கொண்ட x-ல் பல்லுறுப்பு, $\therefore \quad \in V$

$\therefore \quad f(x) + g(x) \in V$

$\therefore \quad V$ ஆனது, $+$-ஆல் அடைக்கப்பட்டது.

(ii) $f(x), \ g(x) \in V, f(x) = a_0 + a_1 x^1 + \ldots + a_n x^n,$

$g(x) = b_0 + b_1 x^1 + \ldots + b_n x^n,$

$f(x) + g(x) = (a_0 + b_0)\, x^0 + (a_1 + b_1)\, x^1 + \ldots + (a_n + b_n)\, x^n$ (வெக்டர் கூட்டல் வ.இ.)

$= (b_0 + a_0)\, x^0 + (b_1 + a_1)\, x^1 + \ldots + (b_n + a_n)\, x^n$ ($(F, +)$ அபீலியன் குலம்)

$= (b_0 x^0 + b_1 x^1 + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n) + (a_0 x^0 + a_1 x^1 + \ldots + a_n x^n)$

$= g(x) + f(x)$

$\therefore \quad V$-ல் $+$-க்குப் பரிமாற்றுப் பண்பு உண்டு.

(iii) $f(x), g(x), h(x) \in V,$

$f(x) = a_0 x^0 + a_1 x^1 + \ldots + a_n x^n$

$g(x) = b_0 x^0 + b_1 x^1 + \ldots + b_n x^n$

$h(x) = c_0 x^0 + c_1 x^1 + \ldots + c_n x^n$ என்றால்

$(f(x) + g(x)) + h(x) = ((a_0 + b_0)\, x^0 + (a_1 + b_1)\, x^1 + \ldots + (a_n + b^n)\, x^n) + (c_0 x^0 + c_1 x^1 + \ldots + c_n x^n)$

$= (((a_0 + b_0) + c_0)\, x^0 + ((a_1 + b_1) + c_1)\, x^1 + \ldots + ((a_n + b_n) + c_n)\, x_n)$

$= ((a_0 + (b_0 + c_0))\, x^0 + (a_1 + (b_1 + c_1))\, x^1 + \ldots + (a_n + (b_n + c_n))\, x^n)$ (F-ல் $+$-க்குச் சேர்ப்பு விதி உண்டு).

$(a_0 x^0 + a_1 x^1 + \dots + a_n x^n) + ((b_0 + c_0) x^0 + (b_1 + c_1) x^1 + \dots + (b_n + c_n) x^n)$

$= f(x) + (g(x) + h(x))$

$\therefore$ V-ல் $+$-க்குச் சேர்ப்புப் பண்பு உண்டு.

(iv) F களத்தின் பூச்சிய உறுப்பு, அதாவது $+$-ன் முற்றொருமை 0 என்றால்,

$0 x^0$ என்பது ஒரு பல்லுறுப்பு.

$\therefore$ $0 x^0 \in V$

$\therefore$ $f(x) = a_0 x^0 + a_1 x^1 + \dots + a_n x^n \in V$

$f(x) + 0 x^0 = (a_0 + 0) x^0 + a_1 x^1 + \dots + a_n x^n$

$= a_0 x^0 + a_1 x^1 + \dots + a_n x^n$ (F-ல் 0 என்பது பூச்சிய உறுப்பு)

$= f(x)$

இதுபோல் $0 x^0 + f(x) = f(x)$ (V-ல் $+$-க்குப் பரிமாற்றுப் பண்பு உண்டு)

$\therefore$ V-ல் $+$-ன் முற்றொருமை $0 x^0$ என்பதாகும்.

(v) $a_0, a_1, \dots, a_n \in F$ என்க.

$(F, +)$ குலமாதலால், F-ன் ஒவ்வோர் உறுப்புக்கும் ஒரு நேர்மாறு F-ல் உள்ளது.

$a_i^{-1} = -a_i$ என்க.

$\therefore$ $-a_0, -a_1, -a_2, \dots, -a_n \in F$

$f(x) = a_0 x^0 + a_1 x^1 + \dots + a_n x^n$,

$g(x) = (-a_0) x^0 + (-a_1) x^1 + \dots + (-a_n) x^n$ என்றால்

$f(x) + g(x) = (a_0 + (-a_0)) x^0 + (a_1 + (-a_1)) x^1 + \dots + (a_n + (-a_n)) x^n$

$= 0x^0 + 0x^1 + \dots + 0x^n$ (F-ல் $+$-ன் நேர் மாறுகள் உண்டு)

$= 0x^0$

$g(x) + f(x) = f(x) + g(x)$ (V-ல் $+$-ன் பரிமாற்றுப் பண்பு)

$= 0x^0$

$\therefore$ $g(x)$ ஆனது V-ல், $f(x)$-ன் $+$-ன் நேர்மாறு.

$\therefore$ $(V, +)$ என்பது ஓர் அபீலியன் குலம்.

எண்ணிப் பெருக்கலின் பண்புகள்

(a) $c \in F, f(x) = a_0 x^0 + a_1 x = a_2 x^2 + \dots + a_n x^n, \in V$ என்றால்,

$c f(x) = c\, a_0 x^0 + c\, a_1 x + c\, a_2 x^2$

$(F, +, \cdot)$ களமாதலாலும், அதனால் $\cdot$-க்கு அடைப்புப் பண்பு உண்டாதலாலும்,

$a_0, a_1, \dots, a_n, c \in F$ என்பதாலும்,
$ca_0, ca_1, \dots, ca_n \in F$

$\therefore$ $ca_0 x^0 + ca_1 x^1 + \dots + ca_n x^n \in V$
$\therefore$ $c f(x) \in V$

(b) $c_1, c_2 \in F, f(x) = a_0 x^0 + a_1 x^1 + \dots + a_n x^n \in V$ என்க.

$(c_1 + c_2)(a_0 x^0 + a_1 x^1 + \dots + a_n x^n)$
$= (c_1 + c_2) a_0 x^0 + (c_1 + c_2) a_1 x^1 + (c_1 + c_2) a_2 x^2$
$+ \dots + (c_1 + c_2) a_n x^n$ (எண்ணிப் பெருக்கல் வ.இ.)

$= (c_1 a_0 + c_2 a_0) x^0 + (c_1 a_1 + c_2 a_1) x^1 + \dots$
$+ (c_1 a_n + c_2 a_n) x^n$ (F களத்தில் $\cdot$-க்கு $+$-ன் மீது வலது பங்கீட்டுப் பண்பு உண்டு).

$= c_1 a_0 x^0 + c_1 a_1 x^1 + \dots + c_1 a_n x^n$
$+ c_2 a_0 x^0 + c_2 a_1 x^1 + \dots + c_2 a_n x^n$
(V-ல் கூட்டலின் வ.இ.)

$$= c_1 (a_0 x^0 + a_1 x^1 + \dots + a_n x^n)$$
$$+ c_2 (a_0 x^0 + a_1 x^1 + \dots + a_n x^n)$$
(எண்ணிப் பெருக்கலின் வ.இ.)

$$= (c_1 + c_2) f(x) = c_1 f(x) + c_2 f(x)$$

(c) $c_1, c_2 \in F$, $f(x) = a_0 x^0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \in V$;

$$(c_1 c_2) f(x)$$
$$= (c_1 c_2) (a_0 x^0 + a_1 x^1 + \dots + a_n x^n)$$

$$= (c_1 c_2) a_0 x^0 + (c_1 c_2) a_1 x^1 + \dots + (c_1 c_2) a_n x^n$$
(எண்ணிப் பெருக்கல்)

$$= c_1 (c_2 a_0) x^0 + c_1 (c_2 a_1) x^1 + \dots + c_1 (c_2 a_n) x^n$$
(F களத்தில் $\cdot$-ன் சேர்ப்பு விதி)

$$= c_1 ((c_2 a_0) x^0 + (c_2 a_1) x^1 + \dots + (c_2 a_n) x^n)$$
(எண்ணிப் பெருக்கல்)

$$= c_1 (c_2 (a_0 x^0 + a_1 x^1 + \dots + a_n x^n))$$
(எண்ணிப் பெருக்கல்)
$$= c_1 (c_2 f(x))$$

$$\therefore \quad (c_1 c_2) \quad f(x) = c_1 (c_2 f(x))$$

(d) $c \in F$, $f(x) = a_0 x^0 + a_1 x^1 + \dots + a_n x^n \in V$
$g(x) = b_0 x^0 + b_1 x^1 + \dots + b_n x^n \in V$

என்றால்,

$$c(f(x) + g(x)) = c((a_0 + b_0)x^0 + (a_1 + b_1) x^1$$
$$+ \dots + (a_n + b_n) x^n)$$ (V-ல் கூட்டல். வ.இ.)

$$= c(a_0 + b_0) x^0 + c(a_1 + b_1) x^1$$
$$+ \dots + c(a_n + b^n) x^n$$
(எண்ணிப் பெருக்கல்)

$$= (ca_0 + cb_0) x^0 + (ca_1 + cb_1) x^1$$
$$+ \dots + (ca_n + cb_n) x^n$$
(F-ல் $\cdot$-க்கு $+$-ன் மீது இடது பங்கீட்டு விதி உண்டு),

$$= c\,a_0\,x^0 + ca_1\,x + \dots + ca_n\,x^n + cb_0\,x^0 + cb_1\,x + \dots + cb_n\,\overline{x}^n$$

(V-ல் கூட்டல் வ'இ.)

$$= c\,(a_0\,x^0 + a_1\,x + \dots + a_n\,x^n) + c\,(b_0\,x_0 + b_1\,x + \dots + b_n\,x^n)$$

(எண்ணிப் பெருக்கல்)

$$= c\,f(x) + c\,g(x)$$

$\therefore \quad c\,(f(x)+g(x)) = c\,f(x) + c\,g(x)$

(e) $(F, +, \cdot)$ களமாதலால், F களத்திற்கு $\cdot$-ன் முற்றொருமை உண்டு.

$\therefore \quad 1 \in F.$

$f(x) = a_0\,x^0 + a_1\,x^1 + \dots + a_n\,x^n \in V$ என்றால்

$$1.\ f(x) = 1\,(a_0\,x^0 + a_1\,x^1 + \dots + a_n\,x^n)$$

$$= 1\,a_0\,x^0 + 1\,a_1\,x^1 + \dots + 1\,a_n\,x^n)$$

$$= a_0\,x^0 + a_1\,x^1 + \dots + a_n\,x^n$$

(F-ல் 1 என்பது ஒருமை)

$$= f(x)$$

$\therefore \quad V(F)$ என்பது வெக்டர் வெளி.

4. களம் F-ன் மீது வரையறுக்கப்பட்ட $m + n$ அணிகள் வெளி. (Space of $m \times n$ matrices over the field F).

F என்பது யாதாவதொரு களம் என்றும், m, n என்பவை நேர் முழு எண்கள் என்றும் கொள்க.

$V = \{$ F-ன் மீதான எல்லா $m \times n$ அணிகள் $\}$

$= \{ (a_{ij})_{m \times n} \mid a_{ij} \in F \}$

$A = (a_{ij})_{m \times n} \in V, \quad B = (b_{ij})_{m \times n} \in V$ என்றால்

'வெக்டர் கூட்டலை'

$A + B = (a_{ij})_{m \times n} + (b_{ij})_{m \times n} = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$ என்று வரையறு.

அதாவது,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{in} \\ \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mj} & \cdots & b_{mn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1j} + b_{1j} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & \cdots & a_{2j} + b_{2j} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots \\ a_{i1} + b_{i1} & \cdots & a_{ij} + b_{ij} & \cdots & a_{in} + b_{in} \\ \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mj} + b_{mj} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{vmatrix}$$

$c \in F$, $A = (a_{ij})_{m+n} \in V$ என்றால், எண்ணிப் பெருக்கலை

$c\,A = c\,(a_{ij})_{m+n} = (c\,a_{ij})_{m+n}$

என்று வரையறு.

அதாவது,

$$c\,A = \begin{vmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \cdots & ca_{1j} & \cdots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \cdots & ca_{2j} & \cdots & ca_{2n} \\ \vdots \\ ca_{i1} & ca_{i2} & \cdots & ca_{ij} & \cdots & ca_{in} \\ \vdots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \cdots & ca_{mj} & \cdots & ca_{mn} \end{vmatrix}$$

இப்பொழுது, V (F) ஆனது ஒரு வெக்டர் வெளி என்று நிறுவுவோம்.

முதலில் $(V, +)$ அபீலியன் குலம் என நிறுவலாம்.

$A = (a_{ij}) \in V, B = (b_{ij}) \in V, C = (c_{ij}) \in V,$
$\forall_i = 1,2,...m, j = 1,2,...n$ என்க.

(i) $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$

$= m \times n$ அணி ($a_{ij}, b_{ij} \in F \Longrightarrow a_{ij} + b_{ij} \in F$

$\because$ F ஒரு களம்)

$\in V$

$\therefore$ $V, +$ ஆல் அடைக்கப்பட்டது.

(ii) $[A + B] + C = [(a_{ij}) + b_{ij})] + (c_{ij})$

$= (a_{ij} + b_{ij}) + (c_{ij})$
(வெக்டர் கூட்டல் வ.இ.

$= ([a_{ij} + b_{ij}] + c_{ij})$ (,, ,,)

$= (a_{ij} + [b_{ij} + c_{ij}])$ (F களத்தில் கூட்டலுக்குச் சேர்ப்புப் பண்பு உண்டு)

$= (a_{ij}) + (b_{ij} + c_{ij})$
(வெக்டர் கூட்டல் வ. இ.)

$= (a_{ij}) + [(b_{ij}) + (c_{jj})]$

$= A + [B + C]$

$\therefore$ V-ல் $+$ -க்குச் சேர்ப்புப் பண்பு உண்டு.

(iii) ஓர் அணியின் எல்லா உறுப்புகளுமே 0 ஆனால், அந்த அணியைப் 'பூச்சிய அணி' (Zero matrix) என்று சொல்லுவோம்.

இதை (0_{ij}) என்று குறிப்பர் ; $[0]$ என்றும் எழுதலாம்.

பூச்சிய உறுப்பு $0 \in F$ என்பதனால், $[0] \in V$, அல்லது $(0_{ij}) \in V$.

யாதாவதொரு $A = (a_{ij}) \in V$ என்றால்

$A + [0] = (a_{ij}) + (0_{ij})$

$= (a_{ij} + 0_{ij})$ (வெக்டர் கூட்டல் வ.இ.)

$= (a_{ij})$ (F-ல் 0 ஆனது $+$-ன் முற்றொருமை)

$= A$

$[0] + A = (0_{ij}) + (a_{ij})$

$= (0_{ij} + a_{ij})$

$= (a_{ij})$

$= A$

$\therefore \quad A + [0] = [0] + A$

$\therefore$ V-ல் (0_{ij}) என்பது பூச்சிய உறுப்பு.

(iv) $A = (a_{ij}) \in V, \quad B = (b_{ij}) \in V$ என்றால்

$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$

$= (b_{ij} + a_{ij})$ (F-ல் $+$-க்குப் பரிமாற்றுப் பண்பு உண்டு,)

$= (b_{ij}) + (a_{ij})$

$= B + A$

$\therefore$ V-ல் $+$-க்குப் பரிமாற்றுப் பண்பு உண்டு.

(v) $(F, +)$ குலமாதலால், ஒவ்வொரு $a_{ij} \in F$-க்கும் கூட்டலின் நேர்மாறு $- a_{ij} \in F$.

$\therefore \quad (- a_{ij}) \in V$

$\therefore \quad (a_{ij}) + (- a_{ij}) = (a_{ij} + [- a_{ij}])$ (வெக்டர் கூட்டல் வ.இ.)

$= (0) = (0_{ij}) = [0]$ (F-ல் $+$-ன் நேர்மாறுகள் உண்டு)

$\therefore$ V-ல் $(-a_{ij})$ என்பது (a_{ij})-ன் $+$-ன் நேர்மாறு.

V-ல் $+$-க்குப் பரிமாற்றுப் பண்பு உண்டாதலால்,

$$(-a_{ij}) + (a_{ij}) = (0_{ij})$$

$\therefore$ $(V, +)$ என்பது அபீலியன் குலம்.

எண்ணிப் பெருக்கலின் பண்புகள்

(a) $c \in F, A = (a_{ij}) \in V,$

$c \cdot A = c\,(a_{ij}) = (c\, a_{ij})$ (எண்ணிப் பெருக்கலின் வ.இ.)

$c \in F, a_{ij} \in F \Longrightarrow c\, a_{ij} \in F$ ($\because$ F-ல் $\cdot$-க்கு அடைப்புப் பண்பு உண்டு)

$\therefore$ $(c\, a_{ij}) \in V.$

(b) $c_1, c_2 \in F,\ A = (a_{ij}) \in V$

$[c_1 + c_2]\, A = [c_1 + c_2]\,(a_{ij})$

$= ([c_1 + c_2]\, a_{ij})$ (எண்ணிப் பெருக்கலின் வ இ.)

$= (c_1\, a_{ij} + c_3\, a_{ij})$ (F களத்தில் $\cdot$-க்கு $+$-ன் மீது வலது பங்கீட்டு விதி)

$= (c_1\, a_{ij}) + (c_2\, a_{ij})$ (வெக்டர் கூட்டலின் வ.இ.)

$= c_1\,(a_{ij}) + c_2\,(a_{ij})$ (எண்ணிப் பெருக்கலின் வ.இ.)

$\therefore$ $[c_1 + c_2]\, A = c_1\, A + c_3\, A$

(c) $c_1, c_2 \in F, A = (a_{ij}) \in V,$

$[c_1\, c_2]\ A = [c_1\, c_2]\,(a_{ij})$

$= (c_1\, c_2 a_{ij})$ (எண்ணிப் பெருக்கலின் வ.இ.)

$= (c_1\,[c_2\, a_{ij}])$ (F களத்தில் $\cdot$-க்குச் சேர்ப்புப் பண்பு உண்டு)

$= c_1 (c_2 a_{ij})$ (எண்ணிப் பெருக்கலின் வ.இ.)

$= c_1 [c_2 (a_{ij})]$

$= c_1 [c_2 A]$

$\therefore \quad [c_1 c_2] A = c_1 [c_2 A]$

(*d*) $c \in F$, $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$,

$c [A + B] = c [(a_{ij}) + (b_{ij})]$

$= c [(a_{ij} + b_{ij})]$ (வெக்டர் கூட்டலின் வ.இ.)

$= (c [a_{ij} + b_{ij}])$ (எண்ணிப் பெருக்கலின் வ.இ.)

$= (c\, a_{ij} + c\, b_{ij})$ (F களத்தில் ·-க்கு, +-ன் மீது இடது பங்கீட்டு விதி)

$= (c\, a_{ij}) (c\, b_{ij})$ (வெக்டர் கூட்டலின் வ.இ.)

$= c (a_{ij}) + c (b_{ij})$ (எண்ணிப் பெருக்கலின் வ.இ.)

$= c A + c B$

$\therefore \quad c[A+B] = c A + c B$

(*e*) *F*-ன் ·-ன் முற்றொருமை 1. $\therefore \ 1 \in F$

$A = (a_{ij}) \in V$ என்க.

$1 \cdot A = 1 (a_{ij})$

$= (1\, a_{ij})$ (எண்ணிப் பெருக்கலின் வ.இ.)

$= (a_{ij})$ (F களத்தில் ·-ன் முற்றொருமை 1)

$= A$

$\therefore \quad 1 \cdot A = A$

$\therefore$ V (F) என்பது ஒரு வெக்டர் வெளி.

·2. வெக்டர் வெளிகளின் எளிய பண்புகள் (Simple properties of vector spaces)

கீழ்க்காணும் தேற்றங்களில்

V : வெக்டர்கள் கணம், F : எண்ணிகள் களம்,

$V(F)$: வெக்டர் வெளி, 0 : V-ன் பூச்சிய உறுப்பு.

$\bar{0}$: F-ன் பூச்சிய உறுப்பு.

6·2·1. தேற்றம் 1.

$$0 \in V, c \in F \Longrightarrow c \cdot 0 = 0, \quad \forall c \in F$$

நிறுவல்

$$c\,0 \in V, \quad \because \; c \in F, 0 \in V$$

$$c\,0 = c(0+0) \quad 0, 0 \in V, \; c \in F \, (\forall \alpha, \beta \in V, c \in F, \; c(\alpha+\beta) = c\alpha + c\beta)$$

$$= c\,0 + c\,0$$

$$c\,0 \in V, \; 0 \in V \Longrightarrow c\,0 + 0 = c\,0$$

$$\therefore \; c\,0 + 0 = c\,0 + c\,0$$

$(V, +)$ குலமாதலால், $+$-க்கு 'அடித்தல் விதி' (Cancellation law) உண்டு.

$\therefore$ $c\,0$ ஐ அடிக்க,

$0 = c\,0$ என்பது முடிவு.

6·2·2. தேற்றம் 2

$$\bar{0}\,\alpha = 0, \quad \forall \alpha \in V$$

நிறுவல்

$$\bar{0} \in F, \alpha \in V \Longrightarrow \bar{0}\,\alpha \in V \quad (c \in F, \alpha \in F \Longrightarrow c\,\alpha \in V)$$

$$\bar{0}\,\alpha = (0+0)\,\alpha \; (0, \bar{0} \in F, \alpha \in F) \; (c_1, c_2 \in F, \alpha \in V \Longrightarrow (c_1 + c_2)\,\alpha = c_1\,\alpha + c_2\,\alpha)$$

$$= \bar{0}\,\alpha + \bar{0}\,\alpha \in V$$

$$0 \in V, \bar{0}\,\alpha \in V \Longrightarrow 0 + \bar{0}\,\alpha = 0 \;\; \alpha \in V$$

$\therefore \quad \bar{0}\,\alpha + \bar{0}\,\alpha = 0 + \bar{0}\,\alpha \Longrightarrow \bar{0}\,\alpha = 0$
((V, +) குலத்தின் அடி-த்தல் விதி)

$\therefore \quad \bar{0}\,\alpha = 0, \forall\, \alpha \in V$

6·2·3. தேற்றம் 3.

$(-c)\,\alpha = -(c\,\alpha), c \in F, \alpha \in V$

அதாவது, (V, +)-ல் $c\,\alpha$-ன் கூட்டலின் நேர்மாறு $(-c)\,\alpha$

நிறுவல்

$c \in F, \alpha \in V \Longrightarrow c\,\alpha \in V$

$c\,\alpha + (-c)\,\alpha = [c + (-c)]\,\alpha$
$((c_1 + c_2)\,\alpha = c_1\,\alpha + c_2\,\alpha)$

$= \bar{0}\,\alpha, \bar{0} \in F$ ($\because$ (F, +) குலத்தில் c-ன் கூட்டலின் நேர்மாறு $-c$)

$= 0 \in V$ (தேற்றம் 6·2·2)

$\therefore \quad -(c\alpha) = (-c)\,\alpha$

துணை முடிவு

குறிப்பாக, $c \in F$ என்பது $1 \in F$ என்றால்

$-(1\alpha) = (-1)\,\alpha$

அதாவது,

$-\alpha = (-1)\,\alpha$ ($1\alpha = \alpha$ என்பது வெக்டர் வெளியின் விதி)

6·2·4. தேற்றம்

$c\,(-\alpha) = -(c\,\alpha), \ c \in F, \alpha \in A$

நிறுவல்

$c\,(-\alpha) + c\,\alpha = c\,[(-\alpha) + \alpha]$ $(c\,(\alpha + \beta) = c\,\alpha + c\,\beta)$

$= c\,0, 0 \in V$ (V-ல் α-ன் கூட்டலின் நேர் மாறு $-\alpha$)

$= 0 \in V$ (தேற்றம் 6·2·1)

6·2·5. தேற்றம்

$c \in F,\ \alpha, \beta \in V, \quad c(\alpha - \beta) = c\alpha - c\beta$

நிறுவல்

$$c(\alpha - \beta) = c[\alpha + (-\beta)]$$
$$= c\alpha + c(-\beta) \qquad c(\alpha + \beta) = c\alpha + c\beta$$
$$= c\alpha + (-c\beta)$$
$$= c\alpha - c\beta$$

6·2·6.

$c \in F, \alpha \in V, 0 \in V$

$c\alpha = 0 \Longrightarrow c = \bar{0}$ ஆனதோ, $\alpha = 0$ ஆனதோ உண்மை.

நிறுவல்

$c \in F, \alpha \in V \Longrightarrow c\alpha \in V$

$c \neq \bar{0}, c\alpha = 0$ என்க.

F களமாதலாலும், F-ன் பூச்சியமற்ற ஓர் உறுப்பு c என்பதாலும், c-ன் பெருக்கலின் நேர்மாறு, $c^{-1} \in F$,

$$\therefore \quad c\alpha = 0 \Longrightarrow c^{-1}(c\alpha) = c^{-1}0$$
$$\Longrightarrow (c^{-1}c)\alpha = 0 \quad (\text{தேற்றம் } 6\cdot2\cdot1)$$
$$\Longrightarrow 1\alpha = 0$$
$$\Longrightarrow \alpha = 0 \qquad (F\text{-ன் ஒருமை } 1)$$

$\therefore \quad c \neq \bar{0}, c\alpha = 0 \Longrightarrow \alpha = 0$

இப்பொழுது, $\alpha \neq 0$, $c\alpha = 0$ என்க.

நிறுவவேண்டியது : $c = \bar{0}$

முடியுமானால், $c \neq \bar{0}$ என்க.

$$\therefore \quad c^{-1} \in F$$
$$\therefore \quad c\alpha = 0 \Longrightarrow c^{-1}(c\alpha) = c^{-1}0$$
$$\Longrightarrow (c^{-1}c)\alpha = 0$$

$$\Longrightarrow 1\alpha + 0$$

$$\Longrightarrow \alpha = 0$$

இது எதிர் மறுப்பு. $\therefore \quad c = 0$.

6·3. உள்வெளிகள் (Subspaces)

6·3·1. வரை இலக்கணம்

$V(F)$ என்பது F களத்தின் மீது வரையறுக்கப்பட்ட வெக்டர் வெளி என்க.

$W \subseteq V, W \neq \emptyset$ என்ற உட்கணமானது, $V(F)$-ன் மீது வரையறுக்கப்பட்ட வெக்டர் கூட்டல், எண்ணிப் பெருக்கல் ஆகிய அதே செயலிகளின் கீழ், களம் F-ன் மீது வெக்டர் வெளியானல், $W(F)$-க்கு $V(F)$-ன் உள்வெளி (Subspace) என்பது பெயர்.

குறிப்பு

$W \subseteq V$ என்பதால், $W(F)$ தன்னுடைய இயல் முறை அமைப்பை $V(F)$-லிருந்து முறையோடு பெறுகிறது.

ஆகையால், $W(F)$ உள்வெளியாவதற்குக் குறைந்த பட்சம்

1. $(W, +)$ என்பது $(V, +)$-ன் உட்குலமாதல் வேண்டும்.
2. எண்ணிப் பெருக்கலின் கீழ் W அடைக்கப்படவேண்டும்.

என்ற நிபந்தனைகளை நிறைவேற்ற வேண்டும்.

நிபந்தனை (1)-ன் படி, $(W, +)$ உட்குலமாக வேண்டின்,

W ஆனது 'வேறுபாடுகளால் அடைக்கப்படுகிறதா' (Closed under differences) என்று பார்க்கவேண்டும்.

$\alpha, \beta \in W$. $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$ என்பதால், W ஆனது கூட்டலின் கீழ் அடைபடுகிறதா என்று பார்த்தால் போதும்.

மேற்குறித்த நிபந்தனை (2)-ன் படி, $\alpha \in W \Longrightarrow -\alpha = (-1)\alpha \in W$. ஆகையால் இந்தக் குறிப்புகளால் மேற்குறித்த வரை இலக்கணத்தைக் கீழ்க்கண்டவாறு மாற்றி அமைக்கலாம்.

மாற்று வரை இலக்கணம்

$V(F)$ என்பது களம் F-ன் மீது வரையறுக்கப்பட்ட வெக்டர் வெளி என்க.

1. W என்பது V-ன் வெற்றற்ற உட்கணம்.

2. $\alpha, \beta \in W \Longrightarrow \alpha + \beta \in W$

3. $\alpha \in W, c \in F \Longrightarrow c\alpha \in W$

என்றவாறு அமைந்த $W(F)$ ஆனது $V(F)$-ன் உள்வெளி எனப்படும்.

6·3·2. உதாரணங்கள்

1. $V(F)$ ஒரு வெக்டர் வெளியானுல், $V(F)$ என்பதே $V(F)$-ன் உள்வெளியாகும். ஏனெனில் V-ன் ஓர் அற்ப உட்குலம் V-யே. $V(F)$ பூச்சிய வெக்டர் மட்டும் உடைய ஒருறுப்பு உட்கணம், $V(F)$-ன் உள்வெளியாகும். இவை இரண்டும் $V(F)$-ன் அற்ப உள்வெளிகள்.

2. $V = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in F\}$, F ஒரு களம் என்ருல் $V(F)$ ஆனது ஒரு வெக்டர் வெளி எனக் கண்டோம்.

V-ன் செயலிகள் :

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$$

$$c(a_1, a_2, \dots, a_n) = (ca_1, ca_2, \dots, ca_n), \quad c \in F.$$

இப்பொழுது,

$$W = \{(\bar{0}, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in F, i = 2, \dots, n, a_1 = \bar{0}\}$$

$W(F)$ என்பது V-ன் உள்வெளியாகும். எப்படி?

உள்வெளியின் மாற்று வ.இ. ஐப் பயன்படுத்துவோம்.

(i) $\emptyset \neq W \subset V$.

(ii) $\alpha = (\bar{0}, a_1, \dots, a_n), \beta = (\bar{0}, b_2 \dots, b_n) \in W$ என்ருல்

$$\alpha + \beta = (\bar{0} + \bar{0}, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$$
$$= (\bar{0}, a_2 + b_2 \dots, a_n + b_n)$$
$$= (\bar{0} \in F, a_i + b_i \in F \quad (\because a_i \in F, b_i \in F, F \text{ ஒரு களம்})$$

$\therefore$ $\alpha + \beta$ என்பது, W-ல் ஓர் உறுப்பு.

$\therefore$ $\alpha + \beta \in W$

(iii) $\alpha = (\bar{0}, a_2. \dots, a_n) \in W, c \in F$

$$c\,\alpha = (c \cdot \bar{0}, c \cdot a_2, \dots, c \cdot a_n)$$
$$= (\bar{0}, ca_2, \dots, ca_n) \in W \quad (\in c\bar{0} = \bar{0}, 0 \in F$$
$$ca_i \in F, i = 2, \dots n)$$

$\therefore$ $W(F)$ ஓர் உள்வெளியாகும்.

3. மேற்கண்ட உதாரணத்தில் $a_1 = 1 + a_3$, $n \geqq 2$ என்ருல் $W(F)$ ஓர் உள்வெளியாகாது. ஏன்?

ஏனெனில்

$$W = \{ (1 + a_2, a_3, \dots, a_n) \mid a_i \in F, i, = 2, \dots, n \}$$

(i) $\emptyset \neq W \in V.$ $\quad \because \quad 1 + a_2 \in F$

(ii) $\alpha = (1 + a_2, a_3, \dots, a_n) \in W, \beta = (1 + b_2; b_3, .., b_n)$

என்ருல்,

$$\alpha + \beta = ((1 + a_2) + (1 + b_2), a_3 + b_3, \dots, a_n + b_n)$$

இப்பொழுது, $\quad (1 + a_2) + (1 + b_2)$

$$= 1 + (a_2 + (1 + b_2))$$
$$= 1 + (a_2 + (b_2 + 1))$$
$$= 1 + ((a_2 + b_2) + 1)$$

$\alpha + \beta$ ஆனது W-ன் உறுப்பாக வேண்டுமானுல், $\alpha + \beta$-ன் முதல் கூருனது, இரண்டாவது கூறும், 1-ம் சேர்ந்த கூட்டுத் தொகை. அதாவது $\alpha + \beta$-ன் முதல் கூறு $1 + (a_2 + b_2)$ என்றிருக்கவேண்டும். ஆனுல் நமது $\alpha + \beta$-ன் முதல் கூறில் மேலும் ஒரு 1 அதிகமாக உள்ளது.

$\therefore$ நமது $\alpha + \beta \notin W$

$\therefore$ W ஆனது $V(F)$-ன் உள்வெளி ஆகாது.

4. $V = F^3 = \{ (a_1, a_2, a_3) \mid a_i \in F \}$

$$W = \{ (a_1, a_2, a_3) \mid a_1 + a_2 + a_3 = 0 \}$$

$\alpha = (a_1, a_2, a_3)$, $\beta = (b_1, b_2, b_3) \in W$, என்ருல்

$$a_1 + a_2 + a_3 = \bar{0}, \qquad b_1 + b_2 + b_3 = \bar{0}$$

$$(a_1 + b_1) + (b_2 + b_2) + (a_3 + b_3)$$

$$= (a_1 + a_2 + a_3) + (b_1 + b_2 + b_3) = \bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$$

$$\therefore \quad \alpha + \beta \in W$$

$\alpha \in W, \qquad c \in F,$

$$c\,\alpha = c\,(a_1, a_2, a_3) = (ca_1, ca_2, ca_3)$$

$$c\,a_1 + c\,a_2 + c\,a_3 = c\,(a_1 + a_2 + a_3)$$ (F-ல் $+$ன் மீது $\cdot$-ன் இடது பங்கீட்டுவிதி)

$$= c \cdot \bar{0}$$

$$= \bar{0}$$

$\therefore \quad c\,\alpha \in W$

$\therefore \quad W(F)$ என்பது $V(F)$-ன் உள்வெளி.

5. $V(F) = F$ கணத்தின்மீது வரையறுக்கப்பட்ட 2×2 அணிகள் வெளி

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| \; a, b \in F \right\}$$

$\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} \in W$ என்றால்

$$\alpha + \beta = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -(b+d) & a+c \end{pmatrix}$$

இது $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ என்ற உருவில் உள்ளது. (அணிகள் கூட்டல் வ.இ.)

$\therefore \quad \alpha + \beta \in W.$

$k \in F$ என்றால், $k\,\alpha = k \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k\,a & k\,b \\ -(k\,b) & k\,a \end{pmatrix}$

இது $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ என்ற உருவில் உள்ளது. (அணிகள் பெருக்கலின் வ.இ.)

$\therefore \; k\alpha \in W.$

$\therefore$ $W(F)$ என்பது $V(F)$-ன் உள்வெளி.

6·3·3. **தேற்றம்**

F களத்தின்மீது வரையறுக்கப்பட்ட வெக்டர் வெளி $V(F)$-ன் வெற்றற்ற உட்கணம் W என்பது $V(F)$-ன் உள்வெளி $\Longleftrightarrow W$ ஆனது $V(F)$ன் வெக்டர் கூட்டல், எண்ணிப் பெருக்கல் ஆகிய செயலிகள் கீழ் அடைக்கப்படுகிறது.

நிறுவல்: **பாகம் 1**

தற்கோள்: வெக்டர் வெளி $V(F)$-ன் உள்வெளி $W(F)$.

நிறுவல்

உள்வெளியின் வ·இ·படி $W(F)$ ஆனது $V(F)$-ன் செயலிகள் கீழ் ஒரு வெக்டர் வெளி ஆகவேண்டும். வெக்டர் வெளியின் நிபந்தனைகளுள் வெக்டர் கூட்டல், எண்ணிப் பெருக்கல் ஆகிய வற்றுக்கு அடைக்கும் பண்பு உண்டு.

$\therefore$ $W(F)$ ஆனது $V(F)$-ன் வெக்டர் கூட்டல், எண்ணிப் பெருக்கல் ஆகியவற்றின் கீழ் அடைக்கப்படுகிறது.

பாகம் 2 $\Longleftarrow$ **தற்கோள்** $\phi \neq W \subset V$. W ஆனது $V(F)$ ன் வெக்டர் கூட்டல், எண்ணிப் பெருக்கல் ஆகிய செயலிகள்கீழ் அடைக்கப்படுகிறது.

நிறுவல்

$\alpha \in W$ என்க.

F-ன் பெருக்கலின் முற்றொருமை 1 என்றால் -1-ம் F-ல் உள்ளது. ஏனெனில் F ஒரு களம்.

தற்கோள்படி, W ஆனது $V(F)$ ன் எண்ணிப் பெருக்கல் . -ன் கீழ் அடைக்கப்படுவதால், $\alpha \in W$, $-1 \in F \Longrightarrow (-1) \cdot \alpha \in W$

6.2.3 தேற்றத்தின்படி, $(-1)\alpha = -(1\alpha) = -\alpha$

$$\therefore \quad (-1)\alpha \in W \Longrightarrow -\alpha \in W$$

$$\Longrightarrow \alpha\text{-ன் கூட்டலின் நேர்மாறு} \in W.$$

W ஆனது வெக்டர் கூட்டலின்கீழ் அடைக்கப்படுவதால்,

$$\beta \in W. -\alpha \in W \Longrightarrow \beta + (-\alpha) \in W$$

$$\Longrightarrow \beta - \alpha \in W$$

$\therefore$ W ஆனது V-ன் உட்குலமாகும்.

மேலும் V ஆனது அபீலியன் என்பதால், W-ம் அபீலியன் ஆகும். அதாவது $(W, +)$ ஆனது ஓர் அபீலியன் குலம்.

வெக்டர் வெளியின் மற்ற நிபந்தனைகள் $V(F)$-ல் உண்மை என்பதாலும், $W \subset V$ என்பதாலும், W-ம் அந்த மற்ற நிபந்தனை களை நிறைவேற்றுகின்றது.

$\therefore$ W ஆனது F-ன் மீதான வெக்டர் வெளி.

$\therefore$ $W(F)$ ஆனது $V(F)$-ன் உள்வெளி.

$\therefore$ பாகம் 2 நிறுவப்பட்டது.

6.3.4

வெக்டர்வெளி $V(F)$-ன் உட்கணம் W என்க.

W ஆனது $V(F)$-ன் உள்வெளி $\Longleftrightarrow c_1\alpha + c_2\beta \in W$, $c_1, c_2 \in F, \alpha, \beta \in W$.

நிறுவல்

பாகம் 1 $\Longrightarrow$

தற்கோள் W ஆனது $V(F)$-ன் உள்வெளி.

நிறுவல்

உள் வெளியின் வ.இ.படி, W ஆனது வெக்டர் கூட்டல், எண்ணிப் பெருக்கல் ஆகிய செயலிகளின் கீழ் அடைக்கப் படுகிறது.

$\therefore$ $c_1 \in F, \alpha \in W \Longrightarrow c_1\alpha \in W$ (எண்ணிப் பெருக்கலின் அடைப்புப் பண்பு)

$c_2 \in F, \beta \in W \Longrightarrow c_2\beta \in W$ (,, ,, ,,)

$c_1 \alpha_1 c_2 \beta \in W \Longrightarrow c_1 \alpha + c_2 \beta \in W$ (வெக்டர் கூட்டலின் அடைப்புப் பண்பு)

பாகம் 2 $\Longleftarrow$ **தற்கோள் :** $c_1, c_2 \in F, \alpha_1 \beta \in W$
$\Longrightarrow c_1 \alpha + c_2 \beta \in W$ என்க.

நிறுவல்

$c_1 = 1, c_2 = {}^{-}1$ என்க. (1 என்பது F-ன் பெருக்கலின் முற்றொருமை)

$\therefore$ $(1)\alpha + ({}^{-}1)\beta \in W$

அதாவது, $\alpha - \beta \in W$ (தேற்றம் 6·2·3 துணை முடிவு)
$({}^{-}1)\beta = -\beta$

$\therefore$ $(W, +)$ ஆனது $(V, +)$-ன் உட்குலம்.

$(V, +)$ அபீலியன் குலம் என்பதால், $(W, +)$-ம் அபீலியன் குலம்.

$\beta = 0$ என்று வைத்துக்கொண்டால்,

$c_1 \alpha + c_2 \beta \in W$ என்பது

$c_1 \alpha + 0 \beta \in W$ என்று ஆகும்.

அதாவது $c_1 \alpha \in W$ ($\because$ $0\beta = 0$ தேற்றம் 6·2·2)

$\therefore$ W என்பது எண்ணிப் பெருக்கலின் கீழ் அடைக்கப் படுகிறது.

$\therefore$ வெக்டர் வெளியின் மற்ற நிபந்தனைகளை $V(F)$ நிறைவேற்றுகிறது. $W \subset V$ என்பதால், அந்த நிபந்தனைகளை W-ம் நிறைவேற்றுகிறது.

$\therefore$ $W(F)$ என்பது $V(F)$-ன் உள்வெளி.

6·3·5· தேற்றம்

$W_1(F), W_2(F)$ என்பவை வெக்டர் வெளி $V(F)$-ன் இரு உள்வெளிகள் என்றால், $(W_1 \cap W_2)(F)$-ம் $V(F)$-ன் ஓர் உள் வெளியே.

நிறுவல்

W_1-ம், W_2-ம், $V(F)$-ன் உள்வெளிகள் என்றால், வ·இ·படி, $(W_1, +), (W_2, +)$ என்பவை $(V, +)$-ன் உட்குலங்கள்.

∴ உட்குலத்தின் வ·இ·படி, $0 \in (V, +)$ என்ருல்

$0 \in (W_1, +)$, $0 \in (W_2, +)$

∴ $0 \in W_1 \cap W_2$ ∴ $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$.

α, β என்பவை $W_1 \cap W_2$-ல் எவையேனும் இரு வெக்டர்கள் என்க.

$c \in \mathrm{F}$ என்க.

∴ $\alpha \in W_1, \alpha \in W_2; \beta \in W_1, \beta \in W_2$.

$W_1 (F)$-ம், $W_2 (F)$-ம் $V (F)$-ன் உள்வெளிகள் என்பதால்,

வ·இ·படி, $\alpha + \beta \in W_1$, $c\alpha \in W_1$

$\alpha + \beta \in W_2$, $c\alpha \in W_2$

∴ $\alpha + \beta \in W_1 \cap W_2$, $c\alpha \in W_1 \cap W_2$

∴ உள்வெளியின் வ·இ·படி, $V (F)$-ன் செயலிகள்கீழ் $W_1 \cap W_2$ அடைக்கப்படுவதால், $(W_1 \cap W_2)$ (F) என்பது $V (F)$-ன் உள்வெளி.

இந்தத் தேற்றத்தைப் பொது நிலையாக்கிஞல் கிடைப்பது :

'ஒரு வெக்டர் வெளியின் உள்வெளிகள் இனத்தின் இடை வெட்டும், எடுத்துக்கொண்ட வெக்டர் வெளியின் உள் வெளியே.'

6·3·6. உதாரணம்

$V(F) = F^3 = \{ (x_1, x_2, x_3) \mid$ ஏதோ $x_i \in F \}$ என்பது வெக்டர் வெளி என்று கண்டோம்.

V (F)-ன் ஓர் உள்வெளி $W_1 (F) = \{ \overline{0}, x_2, x_3) \mid$ ஏதோ $x_2, x_3, \overline{0} \in F \}$

V (F)-ன் மற்ருேர் உள்வெளி $W_2 (F) = \{ (x_1, \overline{0}, 5_3) \mid$ ஏதோ $x_1, x_3, \overline{0} \in \mathrm{F} \}$

W_1-க்கும் W_2-க்கும் பொதுவாயுள்ளது மூன்ருவது கூறு, x_3

மேலும் W_2-ல் x_1 என்பது $\overline{0}$ ஆக இருக்கலாம்.

அப்பொழுது W_1-க்கும், W_2-க்கும் பொதுவாயுள்ளது முதல் கூறு $\bar{0}$.

W_1-ல் இரண்டாவது கூறு x_3 என்பதும் $\bar{0}$ ஆக இருக்கலாம்.

அப்பொழுது W_1-க்கும் W_2-க்கும் பொதுவானது இரண்டாவது கூறு $\bar{0}$.

$\therefore \quad W_1 \cap W_2 = \{ (\bar{0}, \bar{0}, x_3) \mid$ ஏதோ $x_3 \in F \}$

$\alpha, \beta \in W_1 \cap W_2$ என்க.

$\alpha = (\bar{0}, \bar{0}, \alpha_3), \beta = (\bar{0}, \bar{0}, \beta_3)$ என்றால்

$\alpha + \beta = (\bar{0} + \bar{0}, \ \bar{0} + \bar{0}, \ \alpha_3 + \beta_3)$

$= (\bar{0}, \bar{0}, \alpha_3 + \beta_3) \quad (\bar{0}, \alpha_3, \beta_3 \in F \Longrightarrow$

$\alpha_3 + \beta_3 \in F, \quad \because \quad F$ களம்)

$\in W_1 \cap W_2$

$c \in F, c\,\alpha = c\,(\bar{0}, \bar{0}, \alpha_3) = (c\,\bar{0}, c\,\bar{0}, c\,\alpha_3)$

$= (\bar{0}, \bar{0}, c\,\alpha_3)$

$\because \quad 0 \in F, c\,\alpha_3 \in F, F$ ஒரு களம், $\therefore \quad c\,\alpha \in W_1 \cap W_2$

$\therefore$ உள்வெளியின் வ.இ.படி, $W_1 \cap W_2$ என்பது $V(F)$-ன் ஓர் உள்வெளி.

6·3·7. ஓர் உண்மை

ஒரு வெக்டர் வெளியின் இரு உள்வெளிகளின் கூட்டு (Union), அந்த வெக்டர் வெளியின் உள்வெளி அல்ல.

இதற்கு இதோ ஒரு நல்ல உதாரணம்.

$V(F) = F^3 = \{ (x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in F \}$ என்பது ஒரு வெக்டர் வெளி எனக் கண்டோம்.

$V(F)$-ன் ஓர் உள்வெளி $W_1(F) = \{ (x_1, \bar{0}, \bar{0}) \mid x_1 \in F \}$

$V(F)$-ன் மற்றோர் உள்வெளி $W_2(F) = \{ (\bar{0}, x_2, \bar{0}) \mid x_2 \in F \}$ என்க.

$W_1 \cup W_2 = \{ \alpha \mid \alpha = (x_1, \bar{0}, \bar{0}) \vee (\bar{0}, x_2, \bar{0}), \ x_1, x_2 \in F \}$

$c_1, c_2 \in F, \alpha = (x_1, \bar{0}, \bar{0}) \in W_1 \cup W_2, \beta = (\bar{0}, x_2, \bar{0})$ $\in W_1 \cup W_2$

$$c_1 \alpha + c_2 \beta = c_1 (x_1, \bar{0}, \bar{0}) + c_2 (\bar{0}, x_2, \bar{0})$$

$$= (c_1 x_1, c_1 \bar{0}, c_2 \bar{0}) + (c_2 \bar{0}, c_2 x_2, c_2 \bar{0})$$

$$= (c_1 x_1, \bar{0}, \bar{0}) + (\bar{0}, c_2 x_2, \bar{0})$$

$$= (c_1 x_1 + \bar{0}, \bar{0} + c_2 x_2, \bar{0} + \bar{0})$$

$$= (c_1 x_1, c_2 x_2, \bar{0})$$

இந்த உருமாதிரி $W_1 \cup W_2$-ல் அல்ல.

$\therefore$ $c_1 \alpha + c_2 \beta \notin W_1 \cup W_2$

$\therefore$ $W_1 \cup W_2$ ஆனது F^3-ன் உள்வெளி அல்ல.

6·4· வெக்டர்களின் ஒருபடிச் சேர்மானம் (Linear combination of vectors)

6·4·1. வரை இலக்கணம்

$V(F)$ வெக்டர் வெளி என்க.

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ என்பவை வெக்டர்கள்.

$c_1, c_2, \ldots, c_n$ என்பவை எண்ணிகள் என்றால்,

$\alpha = c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2 + \cdots + c_n \alpha_n$ என்பது ஒரு வெக்டர்.

இந்த α வெக்டரை, F-ன் மீது வரையறுக்கப்பட்ட

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ என்ற வெக்டர்களின் ஒருபடிச் சேர்மானம் என்போம்.

6·4·2. உதாரணங்கள்

1. $\alpha = (-2, 1, 1)$ என்ற வெக்டரை

வெக்டர் வெளி F^3-ல் $\alpha_1 = (-4, 1, 3)$, $\alpha_2 = (-3, 1, 2)$ என்ற வெக்டர்களின் ஒருபடிச் சேர்மானமாக எழுது.

விடை

$c_1, c_2 \in F$ என்க. இங்கே $F = \mathbf{R}$

$\alpha = c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2$ என்க.

அதாவது, $(-2, 1, 1) = c_1(-4, 1, 3) + c_2(-3, 1, 2)$

$$= (-4c_1, c_1, 3c_1) + (-3c_2, c_2, 2c_2)$$

$$= (-4c_1 - 3c_2,\ c_1 + c_2,\ 3c_1 + 2c_2)$$

$\therefore \quad -4c_1 - 3c_2 = -2 \qquad \ldots (1)$

$c_1 + c_2 = 1 \qquad \ldots (2)$

$3c_1 + 2c_2 = 1 \qquad \ldots (3)$

சமன்பாடுகள் (1), (2)-லிருந்து, $c_1 = -1,\ c_2 = 2$

இவை சமன்பாடு (3) ஐ உறுதிப்படுத்துகின்றன.

$\therefore \quad \alpha = (-1)\alpha_1 + 2\alpha_2$

$\therefore$ α என்ற வெக்டர் ஆனது α_1, α_2-ன் ஒருபடிச் சேர்மானம்.

2. 2×2 அணிகள் வெக்டர் வெளியில்,

$\alpha = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ என்ற வெக்டரை

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

என்ற வெக்டர்களின் ஒருபடிச் சேர்மானமாக எழுது.

விடை

$c_1, c_2, c_3 \in F$ என்றால்

$\alpha = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3$ என்க.

அதாவது,

$$\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ c_3\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_1 & c_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_2 & -c_2 \\ c_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} c_3 & -c_3 \\ 0 & c_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_1 + c_2 + c_3 & c_1 - c_2 - c_3 \\ 0 + c_2 + 0 & 0 + 0 + c_3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} c_1 + c_2 + {}_3 & c_1 - c_2 - c_3 \\ c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad c_1 + c_2 + c_3 = 6 \qquad (1)$$

$$c_1 - c_2 - c_3 = -4 \qquad (2)$$

$$c_2 = 2 \qquad (3)$$

$$c_3 = 3 \qquad (4)$$

(1), (3), (4)-லிருந்து $c_1 = 1$

இப்பொழுது $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 3$ என்பவை சமன்பாடு (2) ஐ உறுதிப்படுத்துகின்றன.

$$\alpha = (1)\,\alpha_1 + (2)\,\alpha_2 + (3)\,\alpha_3$$

$= \alpha_1 + 2\,\alpha_2 + 3\alpha_3$ என்பது தேவையான ஒருபடிச் சேர்மானம்.

6·4·3. தேற்றம்

யாதாவதொரு வெக்டர் வெளி $V(F)$-ல் $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ என்றால், $v_1, v_2, \dots, v_n$-ன் எல்லா ஒருபடிச் சேர்மானங்களும் அடங்கிய கணம் W ஆனது $V(F)$-ன் உள்வெளியாகும்.

நிறுவல்

$a_1, \dots, a_n \in F$; $b_1, \dots, b_n \in F$ என்க.

$\alpha = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \in W$

$\beta = b_1 v_1 + \dots + b_n v_n \in W$ என்றால்

$\alpha + \beta = (a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) + (b_1 v_1 + \dots + b_n v_n)$

$$= (a_1 + b_1) v_1 + \cdots\cdots + (a_n + b_n) v_n$$

$\because$ $a_i \in F$, $b_i \in F$, F ஒரு களம், $\therefore$ $a_i + b_i \in F$

$\therefore$ $(a_1 + b_1) v_1 + \cdots\cdots + (a_n + b_n) v_n$ என்பது $V_1, \ldots, V_n$-ன் ஒருபடிச் சேர்மானம்.

$\therefore$ $\alpha + \beta \in W$

$c \in F$ என்றால்

$$c\alpha = c(a_1 v_1 + \cdots\cdots + a_n v_n)$$

$$= c\, a_1 v_1 + \cdots\cdots + c\, a_n v_n$$

$c \in F$, $a_i \in F$, F ஒரு களம் $\Longrightarrow ca_i \in F$

$c\, a_i \in F, v_i \in V \Longrightarrow c\, a_1 v_1 + \cdots\cdots + c\, a_n v_n$ என்பது $v_1, \ldots\ldots v_n$-ன் ஒருபடிச் சேர்மானம்.

$\therefore$ $c\alpha \in W$

மேலும் $\bar{0} \in F \Longrightarrow \bar{0}\; v_i = 0$

$\therefore$ $0 = \bar{0}\, v_1 + \cdots\cdots + \bar{0}\, v_n$

$\in W$

$\therefore$ W என்பது V-ன் உள்வெளி.

இந்தத் தேற்றத்தில் உள்வெளி W என்பதற்கு,

$V_1, \ldots, V_n$ ஆல் பிறப்பிக்கப்பட்ட (generated, spanned by) உள்வெளி என்பது பெயர்.

$W = V$ ஆனால், அதாவது, V-ன் ஒவ்வோர் உறுப்பும் $v_1, \ldots, v_n$-ன் ஒருபடிச் சேர்மானமானால், '$v_1, \ldots v_n$ வெக்டர்கள் F-ன் மீது V ஐப் பிறப்பிக்கின்றன' என்று சொல்லுவது வழக்கம்.

$v_1, \ldots v_n$ என்பவை V-ன் பிறப்பாக்கிகள் (generators) எனப்படுவன.

6.4.4. வரை இலக்கணம்

வெக்டர் வெளி $V(F)$-ல், $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in V$ என்றால்

$S = \{ \alpha_1, \ldots\ldots, \alpha_n \}$ என்க.

யாதாவதொரு வெக்டர் $\alpha \in V$ ஆனது,

$\alpha = c_1 \alpha_1 + \ldots\ldots + c_n \alpha_n$ என்றவாறு

$c_1, c_2, \ldots, c_n$ எண்ணிகள் F-ல் இருந்தால், S ஆனது V ஐப் பிறப்பிக்கும் (generate, span) என்போம்.

உதாரணம் 1.

$V(F) = F^3$ என்பதில், $\alpha_1 = (1, 0, 0)$,

$\alpha_2 = (0, 1, 0), \alpha_3 = (0, 0, 1) \in V(F)$ என்க.

$S = \{ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \}$

யாதாவதொரு வெக்டர் $\beta = (x_1, x_2, x_3) \in V$ என்றால்,

$$(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 0 + 0,\ 0 + x_2 + 0,\ 0 + 0 + x_3)$$
$$= (x_1, 0, 0) + (0, x_2, 0) + (0, 0, x_3)$$
$$= x_1 (1, 0, 0) + x_2 (0, 1, 0) + x_3 (0, 0, 1)$$
$$= x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + x_3 \alpha_3$$

$= \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in V$-ன் ஒருபடிச் சேர்மானம்.

$\therefore$ $\{ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \}$ ஆனது V ஐப் பிறப்பிக்கின்றது.

மேலும் $\alpha_4 = (1, 1, 1)$ என்றால்,

$$\beta = (x_1, x_2, x_3) = x_1 (1, 0, 0) + x_2 (0, 1, 0) + x_3 (0, 0, 1) + 0 (1, 1, 1)$$

$\therefore$ $\{ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \}$-ம் V ஐப் பிறப்பிக்கின்றது.

உதாரணம் 2.

$V(F) = \{ f(x) \mid f(x) = c_0 + c_1 x + \dots\dots + c_n x^n,$

$c_i \in F, \forall_i = 1, \dots , n \}$ என்ற பல்லுறுப்பு வெக்டர் வெளியில்,

$x^0, x^1, \dots , x^n \in V$ என்ற பல்லுறுப்புகளை முறையே $c_0, c_1, \dots\dots, c_n$ என்ற எண்ணிகளால் (இவை விகிதமுறு எண்களாகவும் இருக்கலாம்) பெருக்கிக் கிடைத்த பெருக்கங்களைக் கூட்டினால், நமக்குக் கிடைப்பது, யாதாவதோர் உறுப்பு, $c_0 x^0 + c_1 x^1 + \dots + c_n x^n = f(x) \in V(F)$. மேலும் $0 \in V$ ஆனதால், $f(x) = 0 + c_0 x^0 + c_1 x + \dots\dots + c_n x^n \in V(F)$

$N =$ இயற்கை எண்கள் கணம்,

$S = \{ x^n \mid n = 0,$ அல்லது, $n \in N \} \cup \{ 0 \}$ என்பது $V(F)$ ஐப் பிறப்பிக்கும் கணமாகும் (spanning, generating set).

6·4·5. வரை இலக்கணம்

$S = \{ \alpha_1, \dots\dots, \alpha_n \}$ என்பது வெக்டர் வெளி $V(F)$-ன் முடிவுள்ள உட்கணம் என்க. $c_1, \dots\dots, c_n$ என்ற எல்லாமே பூச்சியமில்லாத F-ன் எண்ணிகள்,

$$c_1 \alpha_1 + \dots\dots + c_n \alpha_n = 0$$

என்றவாறு இருந்தால், S ஐ ஒருபடிச் சார்ந்தது (linearly dependent) என்போம்.

அப்படி இல்லாமல்,

$$c_1 \alpha_1 + \dots\dots + c_n \alpha_n = 0 \Longrightarrow c_1 = \dots\dots = c_n = 0$$

என்றால் S ஐ ஒருபடிச் சாராதது (linearly independent) என்போம்.

6·4·6. வரை இலக்கணம்

வெக்டர் வெளி $V(F)$-ன் முடிவில்லாத உட்கணம் S என்க. S-ன் ஒவ்வொரு முடிவுள்ள உட்கணமும் ஒருபடிச் சாராதது என்றால், S ஐ ஒருபடிச் சாராதது என்போம்.

6·4·7. உதாரணங்கள்

1. $V(F) = F^3$ என்பதில் $\alpha_1 = (1, 0, 0), \alpha_2 = (0, 1, 0),$

$\alpha_3 = (0, 0, 1)$; $\alpha_4 = (1, 1, 1)$ என்க.

$c_1, c_2, c_3 \in F$ என்க.

இப்பொழுது $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ என்பவை ஒருபடிச் சாராதவை என்றும், $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \alpha_4$ என்பவை ஒருபடிச் சார்ந்தவை என்றும் காண்பிக்கலாம்.

முதலில்,

$$c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2 + c_3 \alpha_3 = c_1(1,0,0) + c_2(0,1,0) + c_3(0,1,0)$$

$$= (c_1, c_2, c_3)$$

$$= (0, 0, 0)$$

$$\Longrightarrow c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = 0$$

$\therefore$ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ என்பவை ஒருபடிச் சாராதவை.

இப்பொழுது, $1\,\alpha_1 + 1\,\alpha_2 + 1\,\alpha_3 + (-1)\,\alpha_4$

$$= (1, 0, 0) + (0, 1, 0) + (0, 0, 1) + (-1)(1, 1, 1)$$

$$= (1, 0, 0) + (0, 1, 0) + (0, 0, 1) + (-1, -1, -1)$$

$$= (1 + 0 + 0 - 1, 0 + 1 + 0 - 1, 0 + 0 + 1 - 1)$$

$$= (0, 0, 0)$$

$\therefore$ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ என்பவை ஒருபடிச் சார்ந்தவை.

மேலும், $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ மட்டுமல்ல; $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$-ல் எந்த மூன்றும் ஒருபடிச் சாராதவை என்று காண்பிக்கலாம்.

$c_1, c_2, c_3 \in F$ என்பவை,

$c_1\,\alpha_1 + c_2\,\alpha_2 + c_3\,\alpha_4 = 0$ என்றவாறு இருக்கட்டும்.

இப்பொழுது, $c_1 = 0 = c_2 = c_3$ என்று காண்பிக்கலாம்.

$$c_1\,\alpha_1 + c_2\,\alpha_2 + c_3\,\alpha_4 = c_1(1, 0, 0) + c_2(0, 1, 0)$$
$$+ c_3 (1, 1, 1$$

$$= (c_1 + c_2, \; c_2 + c_3, \; c_3)$$

$$= (0, 0, 0) \qquad \text{(தற்கோள்)}$$

$\therefore \quad c_1 + c_3 = 0 \qquad (1)$

$c_2 + c_3 = 0 \qquad (2)$

$c_3 = 0 \qquad (3)$

$\therefore \quad c_1 = 0 = c_2 = c_3$

இதுபோல், $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$; $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ என்பவையும் ஒருபடிச் சாராதவை என்று காண்பிக்கலாம்.

(2) $F = \{$ விகிதமுறு எண்கள் $\}$ என்க.

$V(F) = F^3$-ல் $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ வெக்டர்கள் ஒருபடிச் சாராதவை என்றால், $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ என்ற வெக்டர்களும் F-ன் மீது ஒரு படிச் சாராதவையே என்று காண்பிக்கலாம்.

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ என்பவை ஒரு படிச் சாராதவை என்றால், வ. இ. படி, $c_1, c_2, c_3 \in F$,

$c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2 + c_3 \alpha_3 = 0 \Longrightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0. \;\ldots(1)$

எவையோ எண்ணிகள் $a_1, a_2, a_3 \in F$-க்கு

$a_1 \; (\alpha_1 + \alpha_2) + a_2 \, (\alpha_2 + \alpha_3) + a_3 \, (\alpha_3 + \alpha_1) = 0$ என்க.

$\therefore \quad (a_1 + a_3) \, \alpha_1 + (a_1 + a_2) \, \alpha_2 + (a_2 + a_3) \, \alpha_3 = 0,$

$\therefore$ (1)-ன் படி, $a_1 + a_3 = 0, \; a_1 + a_2 = 0, \; a_2 + a_3 = 0$

$\therefore \quad a_1 = a_2 = a_3 = 0.$

$\therefore \quad \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ என்பவை F-ன் மீது ஒருபடிச் சாராதவை.

3. $V(F) = F$-ன் மீது வரையறுக்கப்பட்ட எல்லாப் பல்லுறுப்புகள்.

$S = \{ x^0, x^1, x^2, \ldots \}$ என்ற முடிவில்லாத கணம் ஒருபடிச் சாராதது என்று காண்பிக்கலாம்.

வ. இ. படி, S-ன் ஒவ்வொரு முடிவுள்ள உட்கணமும் ஒரு படிச் சாராதது என்று நிறுவ வேண்டும்.

$S_{n_k} = \{ x^{n_1}, \ldots, x^{n_k} \}$ என்பது S-ன் யாதாவதொரு முடிவுள்ள உட்கணம் என்க.

$c_1, \ldots, c_k \in F,$

$c_1 x^{n_1} + \ldots + c_k x^{n_k} = 0$ என்று வைத்துக்கொள்.

$$= 0\, x^{n_1} + \ldots + 0\, x^{n_k}$$
(பூச்சியப் பல்லுறுப்பின் வ. இ.)

$\therefore\ c_1 = 0 = c_2 = \ldots = c_k$
(இரு சம பல்லுறுப்புகளின் வ. இ.)

$\therefore\ S_{n_k}$ என்பது ஒரு படிச் சாராதது.

S_{n_k} என்பது S-ன் யாதாவதொரு முடிவுள்ள உட்கணம் என்பதால் S ஆனது ஒருபடிச் சாராதது.

6·4·8. வரை இலக்கணம்: அடிக்கணம் (Basis)

$V(F)$ வெக்டர் வெளியின் ஓர் உட்கணம் S ஆனது

(i) S ஆனது $V(F)$ ஐப் பிறப்பிக்கிறது,

(ii) S ஆனது ஒருபடிச் சாராதது

என்றவாறு அமைந்தால், S ஆனது V-ன் அடிக்கணம் எனப்படும்.

6·4·9. உதாரணங்கள் :

(i) $V = F^n$ வெக்டர் வெளியில்,

$e_1 = \{1, 0, \ldots, 0\}$

$\vdots$

$e_n = \{0, 0, \ldots, 1\}$

என்ற வெக்டர்கள் $V(F)$-ன் அடிக்கணத்தை அமைக்கின்றன என்று காண்பிக்கலாம்.

$S = \{ e_1, \dots, e_n \}$ என்க.

(i) $V(F)$-ல் யாதாவதொரு வெக்டர்

$\alpha = (a_1, \dots, a_n)$, $a_1, \dots, a_n \in F$ என்றால்

$$(a_1, \dots, a_n) = a_1 (1, 0, \dots, 0) + a_2 (0, 1, \dots, 0) + \dots + a_n (0, 0, \dots, 1)$$

$$= a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n$$

$\therefore$ $S = \{ e_1, \dots, e_n \}$ ஆனது $V(F)$ ஐப் பிறப்பிக்கின்றது.

(ii) $c_1, \dots, c_n$ என்ற எண்ணிகள்,

$c_1 e_1 + \dots + c_n e_n = 0$ என்றவாறு F-ல் இருக்கட்டும்.

அதாவது $c_1 (1, 0, \dots, 0) + \dots + c_n (0, 0, \dots, 1) = 0$

அதாவது $(c_1 + c_2 \cdot 0 + \dots + c_n \cdot 0, c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 1 + c_3 \cdot 0$

$+ \dots + c_n \cdot 0, \dots c_1 \cdot 0 + \dots + c_{n-1} \cdot 0 + c_n \cdot 1)$

$= 0$

அதாவது $(c_1, c_2, \dots, c_n) = (0, 0, \dots, 0)$

$$\Longrightarrow c_1 = 0 = c_2 = \dots = c_n.$$

$\therefore$ $S = \{ e_1, \dots, e_n \}$ ஆனது ஒருபடிச் சாராதது.

$\therefore$ வ. இ. படி, $\{ e_1, \dots, e_n \}$ ஆனது F மீது F^n-ன் அடிக்கணமாகும். இதற்கு F^n-ன் நியம அடிக்கணம் (Standard basis, natural basis) என்பது பெயர். இதற்கு இயற்கை அடிக்கணம் என்றும் பெயர் உண்டு.

2. $S = \{ x^n \mid n = 0$ அல்லது $n \in N \}$ என்பது களம் F-ன் மீது வரையறுக்கப்பட்ட எல்லாப் பல்லுறுப்புகள் வெளி $V(F)$-ன் அடிக்கணமாகும்.

இதை முறையாக நிறுவுக!

3. $F = \{$ விகித முறு எண்கள் $\} = Q$ என்க.

$V(F)$, வெக்டர் வெளி என்று அறிவோம். (நிறுவுக!)

$V(F)$-ன் உட்கணம், $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ ஆனது $V(F)$-ன் அடிக்கணமானால், $\{\alpha_1 + \alpha_2, \ \alpha_2 + \alpha_3, \ \alpha_3 + \alpha_1\}$-ம் $V(F)$-ன் அடிக்கணமாகும் எனக் காண்பிக்கலாம்.

S ஓர் அடிக்கணமானால், $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ என்பவை ஒரு படிச் சாராதவை. ஏற்கெனவே $\{\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1\}$ ஒரு படிச் சாராதது என்று நிறுவினோம்.

$\therefore \ \alpha \in V(F), \ \alpha = c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2 + c_3 \alpha_3,$

$c_1, c_2, c_3 \in F$ என்க.

$\alpha = a_1(\alpha_1 + \alpha_2) + a_2(\alpha_2 + \alpha_3) + (\alpha_3 + \alpha_1)$ என்றவாறு எண்ணிகள் a_1, a_2, a_3 என்பவை F-ல் உண்டு என்று காண்பிக்க வேண்டும்.

$= (a_1 + a_3)\alpha_1 + (a_2 + a_1)\alpha_2 + (a_3 + a_2)\alpha_3$ என்று காண்பிக்க வேண்டும்.

ஆனால் $\alpha = c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2 + c_3 \alpha_3$

$\therefore \ c_1 = a_1 + a_3, \quad c_2 = a_2 + a_1, \quad c_3 = a_3 + a_2$

என்றால், $a_1 = \dfrac{c_1 + c_2 - c_3}{2}, \ a_2 = \dfrac{c_2 + c_3 - c_1}{2},$

$$a_3 = \frac{c_3 + c_1 - c_2}{2}$$

$c_1, c_2, c_3 \in F$ என்பதால், $a_1, a_2, a_3 \in F$.

$\therefore \ \{\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1\}$ ஆனது $V(F)$ ஐப் பிறப்பிக்கின்றது.

$\therefore$ வ. இ. படி, $\{\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1\}$ என்பது $V(F)$-ன் ஓர் அடிக்கணமாகும்.

4. $F = \mathbf{R}$: மெய்யெண்கள் களம்

R-லிருந்து **R**-க்குள் எல்லாத் தன்னுள் சார்புகளும் (கோர்த்தல் களும்) வெக்டர் வெளி $V(F)$ ஐ அமைக்கின்றன.

$\forall t \in \mathbf{R}$, $f(t) = e^t$, $g(t) = e^{2t}$ என்றவாறு f, g என்ற இரு சார்புகளை எடுத்துக்கொள்.

$f(t)$, $g(t)$ ஐ, முறையே t இடத்து f, g-க்களின் மதிப்பீடுகள் எனலாம். இப்பொழுது e^t, e^{2t} என்ற f, g-க்களின் மதிப்பீடுகள் ஒருபடிச் சாராதவை என நிறுவலாம்.

$\forall t \in \mathbf{R}$, $c_1 e^t + c_2 e^{2t} = 0$ என்றவாறு $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$ என்க. இந்தச் சமன்பாட்டை t ஐப் பொறுத்து வகையிடு. (Differentiate $w.r.t.$ t)

கிடைப்பது, $c_1 e^t + 2c_2 e^{2t} = 0$

அதாவது, $(-c_2 e^{2t}) + 2c_2 e^{2t} = 0$

$$\Longrightarrow c_2 e^{2t} = 0$$

$$\Longrightarrow c_2 = 0$$

$\therefore$ $c_1 e^t + c_2 e^{2t} = 0$, $c_2 = 0 \Longrightarrow c_1 e^t = 0 \Longrightarrow c_1 = 0$

$\therefore$ $c_1 e^t + c_2 e^{2t} = 0 \Longrightarrow c_1 = 0 = c_2$

$\therefore$ e^t, e^{2t} ஆகியவை ஒருபடிச் சாராதவை.

இப்பொழுது, e^t, e^{2t}-ன் எல்லா ஒருபடிச் சேர்மானங்களும் அடங்கிய கணம் W என்க. தேற்றம் 6·4·3-ன் படி, W ஆனது $V(F)$-ன் உள்வெளியாகும்.

$\therefore$ $S = \{ e^t, e^{2t} \}$ என்ற கணம் ஒருபடிச் சாராதது என்றும், $W(F) \subset V(F)$ ஐப் பிறப்பிக்கின்றது என்றும் கண்டோம்.

$\therefore$ $S = \{ e^t, e^{2t} \}$ என்ற கணம் **R**-ன் மீது $W(F)$-ன் அடிக் கணம்.

6·5. வெக்டரின் கூறுகள்

$S = \{ v_1, ..., v_n \}$ என்பது $V(F)$-ன் அடிக்கணம் என்க. $W(F)$-ன் உறுப்புகளை, இந்த அடிக்கணத்தைப் பொறுத்து, n கூறுகளாக எழுதலாம். எப்படி?

யாதாவதோர் உறுப்பு $v \in V(F)$ என்க.

$c_1, ..., c_n \in F$, $v = c_1 v_1 + ... + c_n v_n$ என்று v ஐ அடிக்கணத்தின் உறுப்புக (basis elements) ளான $v_1, ..., v_n$-ன் ஒருபடிச் சேர்மானமாக எழுதலாம்.

இப்பொழுது $(c_1, ..., c_n)$ ஆனது S அடிக்கணத்தைப் பொறுத்து v-ன் கூறுகள் எனப்படும். v-ன் i ஆவது கூறு c_i ஆகும். இப்பொழுது, n கூறு $\alpha = (c_1, ..., c_n)$ என்பதை அடிக்கணம் $\{ v_1, ..., v_n \}$ஐப் பொறுத்த v-ன் கூறு வெக்டர் (co-ordinate vector) என்போம்.

6·5·1. உதாரணங்கள்

1. மேற்கண்ட 6·4·9. (4)-ல் $V(F)$-ன் உள்வெளி $W(F)$-ன் அடிக்கணம் $\{ e^t, e^{2t} \}$ என்று கண்டோம்.

$$2, -3 \in \mathbf{R}, \quad 2e^t - 3e^{2t} \in W(F)$$

இப்பொழுது, மேற்கண்ட வ.இ. படி, $2e^t - 3e^{2t}$-ன் கூறுகள்,

$\{ e^t, e^{2t} \}$ஐப் பொறுத்து, $(2, -3)$ என்பதாகும்.

2. இரு வெக்டர்கள் $(1, -2)$, $(2, 1)$ என்பவற்றைப் பொறுத்து $(1, 1)$ வெக்டரின் கூறுகள் என்ன?

விடை

வ.இ. படி, $c_1(1, -2) + c_2(2, 1) = (1, 1)$ என்றவாறு எண்ணிகள் c_1, c_2 ஐக் காண வேண்டும்.

$$\therefore \left.\begin{aligned} c_1 + 2c_2 &= 1 \\ -2c_1 + c_2 &= 1 \end{aligned}\right\}$$

இந்த ஒருங்கமைச் (simultaneous) சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள்

$$c_1 = -\frac{1}{5}, \; c_2 = \frac{3}{5}.$$

∴ நமக்கு வேண்டிய வெக்டரின் கூறுகள் $\left(-\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right)$

6.5.2. ஒரு முக்கியக் குறிப்பு

$V(F)$ வெக்டர் வெளியைப் பிறப்பிக்கும் வெக்டர்கள் ஒருபடிச் சாராதவையாக இருக்குமாறு தேர்ந்தெடுப்பதன் அவசியமென்ன? என்னவென்ருல், V-ன் எந்த உறுப்பையும் பிறப்பிக்கும் வெக்டர்களின், அதாவது, பிறப்பாக்கிகளின் ஒருபடிச் சேர்மானமாக, ஒரே முறையில் (unique way) தான் எழுதமுடியும் என்பதற்காக.

$S = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ என்பது $V(F)$-ன் அடிக்கணம் என்க.

S ஆனது V ஐப் பிறப்பிக்கின்றதால், $v \in V$,

$v = c_1 \alpha_1 + \ldots + c_n \alpha_n$ என்றவாறு,

$c_1, \ldots, c_n$ எண்ணிகள் F-ல் உள்ளன. v-ன் கோவை ஒரே முறைதான் முடியுமாஞல் v ஐ மாற்று வகையில் எழுத முயல்.

$v = c_1' \alpha_1 + \ldots + c_n' \alpha_n$ என்றவாறு

$c_1', \ldots, c_n' \in F$ என்க.

$\therefore \; (c_1 - c_1')\alpha_1 + \ldots + (c_n - c_n')\alpha_n = 0$

$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ வெக்டர்கள் ஒருபடிச் சாராதவை என்பதால்,

$c_1 - c_1' = 0 = c_2 - c_2' = \ldots = c_n - c_n'$

$\therefore \; c_1 = c_1'; \; c_2 = c_2'; \; \ldots, c_n = c_n'$

∴ v-ன் கோவை ஒரே முறைதான்.

6.6. வெக்டர் வெளியின் அளவு (Dimension of a vector space)

முடிவுள்ள எண்ணிக்கையுள்ள உறுப்புகளால் பிறப்பிக்கப் படும் 'வெக்டர் வெளியின் அளவு' தத்துவத்தை அறிய, கீழ்க் காணும் தேற்றங்களைப் பார்ப்போம்.

6.6.1. தேற்றம்

வெக்டர் வெளி $V(F)$-ன் அடிக்கணம் $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ என்ருல்,

(i) $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, k\alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n\}$ $(k \neq \overline{0} \in F)$

(ii) $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_i - k\alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n\}$ $(k \in F, i \neq j)$ என்ற கணங்களும் கூட $V(F)$-ன் அடிக்கணங்களே.

நிறுவல்

(i) $\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, k\alpha_j, \alpha_{i+1}, \ldots \alpha_n$ வெக்டர்கள் ஒருபடிச் சார்ந்தவை என்று வைத்துக் கொள்.

$\therefore$ $c_1\alpha_1 + \ldots + c_i(k\alpha_i) + \ldots + c_n\alpha_n = 0$ என்றவாறு $c, c_2, \ldots, c_n$ (இவற்றுள் எல்லாம் பூச்சியமல்ல) எண்ணிகள் F-ல் உள்ளன.

இந்தச் சமன்பாட்டை,

$c_1\alpha_1 + \ldots c_i k(\alpha_i) + \ldots + c_n\alpha_n = 0$ என்று எழுதலாம். இந்த இரண்டாவது சமன்பாட்டில், $c_1, \ldots, c_{i-1}, c_ik, c_{i+1}, \ldots, c_n$ (இவற்றுள் எல்லாமே பூச்சியமல்ல) எண்ணிகள் $\in F$.

$\therefore$ இந்த இரண்டாவது சமன்பாட்டின்படி,

வெக்டர்கள் $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ஒருபடிச் சார்ந்தவை என்றுகிறது. ஆனல் இது தேற்றத்தில் கொடுக்கப்பட்ட, '$\{\alpha_1; \ldots; \alpha_n\}$ என்பது அடிக்கணம்; அதாவது $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ ஒருபடிச் சாராதவை' என்ற கூற்றுக்கு எதிர்மறுப்பு (contradiction).

$\therefore$ $\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, k\alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots \alpha_n$ வெக்டர்கள் ஒருபடிச் சாராதவையே.

$V(F)$-ன் அடிக்கணம் $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ என்பதால்.

$\alpha = c_1\alpha_1 + \ldots + c_n\alpha_n$ என்றவாறு, எண்ணிகள் $c_1, \ldots c_n$ என்பவை F-ல் உள்ளன.

$$\alpha = c_1\alpha_1 + \ldots + c_{i-1}\alpha_{i-1} + \frac{c_i}{k}(k\alpha_i) + c_{i+1}\alpha_{i+1}$$

$$+ \ldots + c_n\alpha_n$$

$\therefore$ $\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, k\alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n$ என்பவை V ஐப் பிறப்பிக்கின்றன.

$\therefore$ கணம் $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \ k\alpha_i, \ \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n\}$ ஆனது V-ன் அடிக்கணம் ஆகும்.

(ii) $c_1 \alpha_1 + \ldots + c_{i-1} \alpha_{i-1} + c_i \ (\alpha_i - k\alpha_j) \ + c_{i+1} \alpha_{i+1} + \ldots + c_n \alpha_n = 0$

என்றால், இந்தச் சமன்பாட்டை

$$c_1 \alpha_1 + \ldots + c_{i-1} \alpha_{i-1} + c_i \alpha_i - k \, c_i \alpha_j + c_{i+1} \alpha_{i+1} + \ldots + c_{j-1} \alpha_{j-1} + c_j \alpha_j + c_{j+1} \alpha_{j+1} + \ldots + c_n \alpha_n = 0$$

என்று எழுதலாம்.

$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ என்பவை ஒருபடிச் சாராதவை யாதலால்,

$$c_1 = \ldots = c_i = \ \ = c_{j-1} = c_j - k c_i = c_{j+1} = \ldots = c_n = 0$$

$$\therefore \quad c_i = 0, \ c_j - k c_i = 0 \Longrightarrow c_j = 0$$

$\therefore$ வெக்டர்கள் $\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \ \alpha_i - k\alpha_j, \ \alpha_{i+1}, \ \ldots, \ \alpha_n$ என்பவை ஒருபடிச் சாராதவை.

$V(F)$-ன் அடிக்கணம், $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ என்பதால்,

$\alpha = c_1 \alpha_1 \ + \ldots + c_n \alpha_n$ என்றவாறு எண்ணிகள் $c_1, \ldots, c_n$ என்பவை F-ல் இருக்கின்றன.

இதையே $\alpha = c_1 \alpha_1 + \ldots + c_i (\alpha_i - k \alpha_j) + \ldots + (c_j + c_i k) \alpha_j + \ldots + c_n \alpha_n$

$\therefore$ கணம் $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_i - k \alpha_j, \ldots, \alpha_n\}$ ஆனது V ஐப் பிறப்பிக்கின்றதால், இந்தக் கணம் V-ன் அடிக் கணமாகும்.

உதாரணம்

$V = F^3$ வெக்டர் வெளியில், $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ என்பது V-ன் அடிக் கணமானால்,

$\{\alpha_1, 2\alpha_2, \ \alpha_3\}$-ம், $\{\alpha_1, \ \alpha_2 - 3\alpha_3 \ \alpha_1\}$-ம் V-ன் அடிக் கணங்களே.

6·6·2. தேற்றம்

வெக்டர் வெளி $V(F)$-ன் பூச்சியமல்லாத வெக்டர்கள் கணம்

$S = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ என்பது ஒரு படிச் சார்ந்தது $\Longleftrightarrow$ S-ன் ஏதாவதொரு α_k ஆனது, இதற்கு முந்தைய வெக்டர்கள் $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}$-ன் ஒருபடிச் சேர்மானம்.

நிறுவல்

பாகம் 1 $\Longrightarrow$

தற்கோள்: $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ ஒருபடிச் சார்ந்தது, $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ பூச்சியமற்றவை.

$$\therefore \quad d_1 \alpha_1 + \ldots + d_k \alpha_k + d_{k+1} \alpha_{k+1} + \ldots + d_m \alpha_m = 0$$

என்றவாறு $d_1, d_2, \ldots, d_m$ எண்ணிகள் $\in F$

ஒருபடிச் சார்ந்த வெக்டர்கள் வ இ.படி எண்ணிகள் $d_1, \ldots, d_m$ அனைத்தும் பூச்சியமல்ல. ஆனால் இவற்றுள் எவையேனும் சில மட்டும் பூச்சியமாக இருக்கலாம்.

$\therefore$ d_k என்பது கடைசி பூச்சியமல்லாத d என்க.

அதாவது $d_k \neq 0, d_{k+1} = \ldots = d_m = \bar{0}$

$\therefore$ $k \neq 1$ என்றால் α_k ஐ $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}$-ன் ஒருபடிச் சேர்மான மாக எழுதலாம்.

$k = 1$ என்றால், $d_1 \neq \bar{0}$.

ஆனால் $d_2 = \ldots = d_m = \bar{0}$.

$\therefore \quad d_1 \alpha_1 = 0$. ஆனால் $d_1 \neq 0$. $\therefore \quad \alpha_1 = 0$.

இது தற்கோளின் எதிர் மறுப்பு. $\therefore$ பாகம் 1 உண்மை.

பாகம் 2 $\Longleftarrow$

தற்கோள்

$$\alpha_k = c_1 \alpha_1 + \ldots + c_{k-1} \alpha_{g-1}, c_1, \ldots c_{k-1} \in F$$

$$\alpha_k + (-1) \alpha_k = 0, (-1) \neq \bar{0}$$

$$\alpha_k + (-1) \alpha_k + \bar{0} \alpha_{k+1} + \ldots + \bar{0} \alpha_m = 0$$

$$\therefore \quad c_1 \alpha_1 + \ldots + c_{k-1} \alpha_{k-1} + (-1) \alpha_k + \bar{0} \alpha_{k+1} + \ldots + \bar{0} \alpha_m = 0$$

$\alpha_k \neq 0, (-1) \neq 0 \Longrightarrow \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ வெக்டர்கள் ஒருபடிச் சார்ந்தவை.

$\therefore$ பாகம் 2 நிறுவியாயிற்று.

6·6·3. தேற்றம்

$V(F)$ ஒரு வெக்டர் வெளியானால்,

$\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in V$ என்க.

$S = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ ஒருபடிச் சார்ந்தது $\Longleftrightarrow$ S-ல் ஒரு சரியான உட்கணம் R ஆனது—Vன் ஓர் உள்வெளியை S பிறப்பித்தால், அதே உள்வெளியை R-ம் பிறப்பிக்கிறது—என்றவாறு அமைந்திருக்கிறது.

நிறுவல்

பாகம் $1 \Longrightarrow$

தற்கோள் : S ஒருபடிச் சார்ந்தது.

$\therefore$ தேற்றம் 6·6·2-ன் படி, S-ல் ஏதேனும் ஓர் உறுப்பு α_k ஆனது $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}$ என்ற உறுப்புகளின் ஒருபடிச் சேர்மானமாக இருந்தால் அதை நீக்கிவிடு. இதைத் தவிர, பூச்சிய வெக்டர்கள் S-ல் இருந்தால் அவற்றையும் நீக்கிவிடு. எஞ்சியிருக்கும் வெக்டர்கள் அமைப்பது R என்ற கணம். R-ல் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை S-ல் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையை விடக் குறைவு. $\therefore R \subset S$. நீக்கிவிட்ட வெக்டர்கள் அமைப்பது W கணம் என்க.

$\therefore W \subset V.$

W-ல் உள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பும் R-ல் உள்ள உறுப்புகளின் ஒருபடிச் சேர்மானமாக இருப்பதுடன், S-ல் உள்ள உறுப்புகளின் ஒருபடிச் சேர்மானமாகவும் இருக்கும். ($\because R \subset S$)

$\therefore$ R-ம், S-ம் W ஐப் பிறப்பிக்கின்றன. மேலும் தேற்றம் 6·6·2-ல் உள்ளபடி, S-லிருந்து ஓர் உறுப்பாவது நீங்குமாதலால், $R \subset S$.

பாகம் 2 $\Leftarrow$

தற்கோள்

S-ம், S-ன் ஒரு சரியான உட்கணம் R-ம், V-ன் ஒரே உள் வெளியைப் பிறப்பிக்கின்றன, என்க.

$k < m, R = \{ \alpha_1, \ldots, \alpha_k \}$ என்க.

S-ம், R-ம் ஒரே உள்வெளியைப் பிறப்பிக்கின்றனவாதலால்,

$\alpha_{k+1} = c_1 \alpha_1 + \ldots + c_k \alpha_k$

$\therefore \quad c_1 \alpha_1 + \ldots + c_k \alpha_k + (-1) \alpha_{k+1} + 0 \quad \alpha_{k+2} + \ldots + 0 \alpha_m = 0$

$\therefore \quad \{ \alpha_1, \ldots, \alpha_m \}$ ஒருபடிச் சார்ந்தது.

6·6·4. தேற்றம்

$V(F)$ என்ற வெக்டர் வெளியில், $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in V$,

$\beta_1, \ldots. \beta_r \in V$ என்க.

$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ வெக்டர்கள் V ஐப் பிறப்பிக்கின்றன என்றும்,

$\beta_1, \ldots, \beta_r$ வெக்டர்கள் ஒருபடிச் சாராதவை என்றும் கூட இருந்தால்;

$n \geqq r$.

நிறுவல்

$X_0 = \{ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \}$ என்க.

X_0 என்பது V-ஐப் பிறப்பிப்பதால், 6·6·3. தேற்றத்தின்படி $Y_0 = \{ \beta_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \}$ என்பது V ஐப் பிறப்பிக்கின்றது டன் ஒருபடிச் சார்ந்ததும் கூட.

$\therefore$ தேற்றம் 6·6·2-ன் படி, $\beta_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$-ல் யாதேனும் ஒன்று இந்த வரிசையில் அதன் முந்தைய உறுப்புகளின் ஒரு படிச் சேர்மானமாக இருக்கும். நிச்சயமாக இது β_1 ஆக இருக்க முடியாது. அப்படியென்றால், இது α_i என்க.

Y_0-லிருந்து α_i-ஐ நீக்கிவிட்டால், எஞ்சியிருப்பவை, தேற்றம் 6·6·3-ன் படி, V ஐப் பிறப்பிக்கின்றன.

எஞ்சியிருப்பவை: $X_1 = \{\beta_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_n\}$ இதுமாதிரி திருப்பிச் செய்.

$Y_1 = \{\beta_2, \beta_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}. \alpha_{t+1}, \ldots, \alpha_n\}$ என்பது V ஐப் பிறப்பிப்பதுடன், ஒருபடிச் சார்ந்ததும் கூட.

$\beta_1, \ldots, \beta_r$ என்பவை ஒருபடிச் சாராதவையாதலால், β_1 ஆனது β_2-ன் மடங்கு அல்ல. முன்போல், யாதேனும் ஒரு $\alpha_j \neq \alpha_i$ ஐ நீக்கலாம். இம்மாதிரி படிப்படியாகச் செய்து கொண்டே போ. $n < r$ என்றல், $X_{n-1} = \{\beta_{n-1}, \ldots, \beta_1, \alpha_k\}$ என்பதை அடைவோம்.

X_{n-1} ஆனது V ஐப் பிறப்பிக்கும்.

$Y_{n-1} = \{\beta_n, \beta_{n-1}, \ldots, \alpha_1, \alpha_r\}$ என்பது Vஐப் பிறப்பிக்கும் ஒரு படிச் சார்ந்த கணம். முன்போல் ஒரு α ஐ Y_{n-1}-லிருந்து நீக்கு. நீக்கப்படுவது α_r ஆகத்தான் இருக்கமுடியும்.

இப்பொழுது $X_n = \{\beta_n, \beta_{n-1}, \ldots, \beta_1\}$ என்பது V ஐப் பிறப்பிக்கும். β_{n+1} ஆனது $\beta_1, \ldots, \beta_n$-ன் ஒருபடிச் சேர்மானம்.

இது ஓர் எதிர்மறுப்பு. ஏனெனில், தேற்றத்தின்படி, $\beta_1, \ldots, \beta_r$ என்பவை ஒருபடிச் சார்ந்தவை. $\therefore \quad n \geqq r$

6·6·5.

$V(F)$ வெக்டர் வெளியின் இரு அடிக்கணங்கள் $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, $\{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$ என்றல் $n = m$.

நிறுவல்

$X = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, $Y = \{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$ என்க. X-ம், Y-ம், $V(F)$ ஐப் பிறப்பிக்கின்றன; கூடவும் இவை ஒருபடிச் சாராதவை. (அடிக்கணத்தின் வ.இ.)

X ஆனது V-ன் பிறப்பாக்கி. Y ஒருபடிச் சாராதது.

$\therefore \quad n \geqq m$

Y ஆனது V-ன் பிறப்பாக்கி. X ஒருபடிச் சாராதது.

$\therefore \quad m \geq n.$

$\therefore \quad n = m.$

6·6·6. வரை இலக்கணம்

வெக்டர் வெளி $V(F)$-ல், V ஐப் பிறப்பிக்க முடிவுள்ள வெக்டர் கணம் இருந்தால், $V(F)$-க்கு முடிவுள்ள அளவுள்ளது (finite dimensional) என்போம்.

ஒரு வெக்டர் வெளிக்கு முடிவுள்ள அளவு இல்லையானால், அதனை முடிவில்லா அளவுள்ள வெக்டர் வெளி என்போம்.

இந்த வரை இலக்கணத்தை ஒட்டி மேற்கண்ட தேற்றம் 6·6·5 ஐ 'முடிவுள்ள அளவுள்ள வெக்டர் வெளி ஒன்றின் இரு அடிக்கணங்களில் ஒரே எண்ணிக்கையுள்ள உறுப்புகள் இருக்கின்றன' எனலாம்.

இதனால், வெக்டர் வெளியின் அளவிற்கு வரை இலக்கணம் கிடைக்கிறது.

6·6·7. வரை இலக்கணம்

முடிவுள்ள அளவுள்ள வெக்டர் வெளி $V(F)$-ன் அளவானது, $V(F)$-ன் ஓர் அடிக்கணத்திலுள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை ஆகும்.

உதாரணம்

$V(F) = F^n$-ன் அளவு n.

ஏனெனில், F^n-ன் இயற்கை அல்லது நியமமான அடிக்கணம், $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ என்று பார்த்தோம். இந்த அடிக்கணத்தின் பரிமாண வரிசை $= n$.

$\therefore \quad F^n$-ன் அளவு : n.

பயிற்சி

குறிப்பு: $V(F)$ என்பது களம் F-ன் மீதான வெக்டர் வெளி.

1. மெய்யெண்களை உறுப்புகளாகக் கொண்ட 2×2 அணிகளின் வெக்டர் வெளியின் ஓர் அடிக்கணம் : $\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right\}$ என்று நிறுவுக.

2. 'ஒரு வெக்டர் வெளியின் இரு உறுப்புகள் ஒருபடிச் சாராதவை $\Longleftrightarrow$ ஓர் உறுப்பு மற்றொன்றின் மடங்கு'. என்று நிறுவுக.

3. கீழ்க்கண்டவை ஒவ்வொன்றும் அமைக்கும் கணம் ஒருபடிச் சார்ந்ததா அல்லது ஒருபடிச் சாராததா என்று காண் :

(i) $(12, 6, 0), (3, -2, 1), (1, 4, -1) \in V(F) = \mathbf{R}^3$

(ii) $(1, 2, -1, 0), (-3, 0, 1, 2), (2, 1, 0, -1) \in V(F) = \mathbf{R}^4$.

(iii) $x^2 + 3x + 4, x^2 + 2x + 1, 4x + 2 \in \mathbf{Q}[x]$

(iv) $x^2 + 3x + 4, x^2 + 2x + 1, 4x + 2 \in \mathbf{Z}_5[x]$

4. $\alpha = (9, -15, -6, 24), \beta = (-15, 25, 10, -40), \gamma = (16, 12, 15, -10)$ என்பவை $V(F) = \mathbf{R}^4$-ல் ஒருபடிச் சார்ந்தவை என்றும், ஆனால் γ ஆனது α, β-க்களின் ஒருபடிச் சேர்மானம் அல்ல என்றும் நிறுவுக.

5. $(2, 1, 1), (-2, 1, 3), (3, 1, -1)$ என்பவை $V(F) = \mathbf{R}^3$-ன் அடிக்கணம் என்று காண்பி. இந்த அடிக் கணத்தைப் பொறுத்து, $(2, 1, 0), (-1, 1, 1)$ ஆகியவற்றின் கூறுகளைக் காண்.

6. $(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 0, 0, 4), (0, 0, 0, 2)$ என்பவை $V(F) = \mathbf{R}^4$-ன் அடிக்கணத்தை அமைப்பன என்று நிறுவுக.

7. $V(F) = \mathbf{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbf{R}\}$,

$$W = \{(x, y, z) \mid x - 3y + 4z = 0\}$$

என்றால், W ஆனது V-ன் உள் வெளி என்று நிறுவுக.

8. $V(F) = \mathbf{R}^3, W = \{ (a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbf{Q} \}$ என்றால், W ஆனது V-ன் உள்வெளி அல்ல என்று காண்பி.

9. $V(F)$: எல்லாப் பல்லுறுப்புகள் வெளி.

W: n-க்குக் குறைந்த அல்லது சமமான அடுக்குகளைக் கொண்டவையும், F-ன் மீது வரையறுக்கப்பட்டவையுமான பல்லுறுப்புகள் கணம் என்றால் W ஆனது $V(F)$-ன் உள்வெளி என்று நிறுவுக.

10. $V(F) = \mathbf{R}^3, W = \{ (a, 2b, 3c) \mid a, b, c \in \mathbf{R} \}$ என்றால் W ஆனது V-ன் உள் வெளி என்று காண்பி.

11. $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in V(F) = \mathbf{R}^3$ என்பதில்

$\alpha_1 = (1, -3, 2), \alpha_2 = (2, -4, -1), \alpha_3 = (1, -5, 7)$

$\alpha = (2, -5, 3)$ என்றால்

α ஆனது $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$-க்களின் ஒருபடிச் சேர்மானமாகாது என்று நிறுவுக.

12. கீழுள்ள வெக்டர் வெளிகளுக்குக் கொடுத்திருக்கும் கணங்கள் ஒருபடிச் சார்ந்தவையா, அல்லவையா என்று காண்:

(i) $V(F) = \mathbf{R}^4$: $\{ (1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1) \}$

(ii) $R[X]$: $\{ x^2 + x - 1, x^2 - x - 2, x^2 + x + 1 \}$

(iii) $V(F) = \mathbf{Z}_5$: $\{ (4, 1, 3), (2, 3, 1), (4, 1, 0) \}$

(iv) $V(F) = C^3$: $\{ (1, 2 + i, 3), (2 - i, i, 1) (i, 2 + 3i, 2) \}$.

7. அணிகள்

(Matrices)

7.1. வரை இலக்கணம்

ஒரு களம் F-ன் mn உறுப்புகளை, m நிரைகளிலும் (Rows) n நிரல்களிலும் (Columns) கொண்ட செவ்வக வரிசை அமைப்புக்கு (Rectangular array)-க் களம் F-ன் மீது வரையறுக்கப்பட்ட அணி (Matrix) என்பது பெயர்.

F-ன் மீதான அணியின் பொது உரு

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

என்பதாகும்.

இம்மாதிரி பிறை அடைப்புகளுக்குப் பதில் பகரவடைப்புகளைப் பயன்படுத்துவதும் உண்டு. இந்த அணியை A என்று பெயரிடுவோம். இந்த அணியின் 'a'-க்களுக்கு, 'அணியின் உறுப்புகள்' (elements, entries) என்பது பெயர்.

ஒவ்வோர் உறுப்புக்கும் இரு கீழ்க் குறிகள் (Subscripts) இருப்பதைக் கவனிக்க.

முதல் கீழ்க் குறி அந்த உறுப்பு இருக்கும் நிரையையும் இரண்டாவது கீழ்க் குறி அந்த உறுப்பின் நிரலையும் குறிக்கும்.

உதாரணமாக, a_{mn} என்ற உறுப்பு, அணியின் mஆவது நிரையிலும், nஆவது நிரலிலும் உள்ளது.

a_{ij} என்பது அணியின் i ஆவது நிரையும், j ஆவது நிரலும் கூடுமிடத்து உள்ளது.

A-ன் உருமாதிரியை (Representative) அல்லது பொது உறுப்பை (general term), a_{ij} என்பர்.

a_{57} என்பது அணியின் 5 ஆவது நிரையும், 7 ஆவது நிரலும் கூடுமிடத்து உள்ள உறுப்பு.

A அணியை அதன் உருமாதிரியின் வாயிலாக எழுதுவதும் உண்டு. அந்த உருமாதிரியைப் பிறை அடைப்புகளில் இட்டால், அது உறுப்பாய் இருக்கும் அணியைக் குறிக்கும்.

அதாவது $A = (a_{ij})$.

அணியின் உறுப்புகள் மெய்யெண்களானுல், F ஒரு மெய்யெண் களமாகும். அணியின் உறுப்புகள் கலப்பெண் களானுல், F ஒரு கலப்பெண் களமாகும்.

மிக முக்கியமான குறிப்பு : அணியாவது எண்களை வரிசைப் படுத்திய அமைப்பு. இது ஒரு குறியீடே தவிர, அணிக்குப் பெறுமானம், அதாவது எண் மதிப்பு (numerical value) கிடையாது.

m நிரைகளும், n நிரல்களும் கொண்ட அணியை $m \times n$ அணி அல்லது 'm-க்கு, n' அணி என்று வழங்குவர். m-ம், n-ம் அணியின் அளவுகள் (dimensions) எனப்படுவன. $m \times n$ என்பது அணியின் பரிமாண அளவு (order of the matrix) எனப் படும். $m \times n$ அணியை $(a_{ij})_{m\times n}$ என்றும் எழுதலாம்.

$m \times n$ என்பதில், முதலில் நிரை, பின்புதான் நிரல் என்ற வரிசையில்தான் எழுத வேண்டும்.

அணியின் உறுப்புகள் எண்களாகத்தான் இருக்கவேண்டும் என்பதில்லை; வேறு எவையேனும் குறியீடுகளாகவும் இருக்கலாம். மேலும், ஓர் அணியின் நிரல்களின் எண்ணிக்கையும், நிரைகளின் எண்ணிக்கையும் சமமாக இருக்க வேண்டுவதில்லை; சமமாகவும் இருக்கலாம்.

7·1·1. வரை இலக்கணம்: சதுர அணி (Square Matrix)

நிரைகளின் எண்ணிக்கையும், நிரல்களின் எண்ணிக்கையும் சமமாய் இருக்கும் அணிக்குச் ''சதுர அணி' என்பது பெயர். ஒரு சதுர அணியில் n நிரல்களும், n நிரைகளும் இருந்தால், அந்தச் சதுரஅணியின் பரிமாண வரிசை $n \times n$, அல்லது, சுருக்கமாக, n எனப்படும்.

உதாரணம்

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

இதன் பரிமாண வரிசை ; 3

7·1·2. மாதிரிக் கணக்குகள்

1. $a_{ij} = 3_i - {}_j^2$ என்றால், பரிமாண வரிசை 3 உள்ள சதுர அணி (a_{ij}) ஐ அமைக்க.

விடை

வேண்டிய சதுர அணியின் அமைப்பு

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$a_{ij} = 3i - {}_j^2$ என்பதிலிருந்து

$i = 1,\ j = 1 \Longrightarrow a_{11} = 3\,(1) - (1)^2 = 2$

$i = 1,\ j = 2 \Longrightarrow a_{12} = 3\,(1) - (2)^2 = -1$

$i = 1,\ j = 3 \Longrightarrow a_{13} = 3\,(1) - (3)^2 = -6$

$i = 2,\ j = 1 \Longrightarrow a_{21} = 3\,(2) - (1)^2 = 5$

$i = 2,\ j = 2 \Longrightarrow a_{22} = 3\,(2) - (2)^2 = 2$

$i = 2,\ j = 3 \Longrightarrow a_{23} = 3\,(2) - (3)^2 = -3$

$i = 3, j = 1 \Longrightarrow a_{31} = 3(3) - (1)^2 = 8$

$i = 3, j = 2 \Longrightarrow a_{32} = 3(3) - (2)_2 = 5$

$i = 3, j = 3 \Longrightarrow a_{33} = 3(3) - (3)^2 = 0$

∴ வேண்டிய அணியாவது,

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -6 \\ 5 & 2 & -3 \\ 8 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

2. (i) $i = 2$ (ii) $j = 1$ (iii) $i = j$

என்பதற்கான 2×2 சதுர அணி (a_{ij})-ல் உறுப்புகளின் நிலைகளை விவரிக்க.

விடை

2×2 சதுர அணியின் அமைப்பு

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

(i) $i = 2$ என்றால், a_{ij} என்பது a_{2j} என்றாகும். அந்தமாதிரி உறுப்புகள் a_{21}, a_{22}, ∴ $i = 2$-க்கான உறுப்புகள் இரண்டாவது நிரையில் உள்ளன.

(ii) j என்பது நிரலைக் குறிப்பதால், $j = 1$ என்பது முதல் நிரலைக் குறிக்கும். a_{ij} என்பது a_{i1} என்றாகும். a_{11}, a_{21} என்ற உறுப்புகள் முதல் நிரலில் உள்ளன.

(iii) $i = j$ என்றால் a_{ij} என்பது a_{11} அல்லது a_{22} ஐக் குறிக்கும். ∴ $i = j$-க்கு, இடப்புற மூலையின் மேல் உறுப்பும், வலப்புற மூலையின் கீழ் உறுப்புமாகும். அல்லது, இதையே, இடது மூலை விட்டத்தில் அமைந்த உறுப்புகள் ஆவன.

7·1·3. வரை இலக்கணம்

சம அணிகள் (Equal Matrices) : இரு சம பரிமாண அளவுள்ள அணிகளில், ஓர் அணியில் உள்ள உறுப்புகளும், இரண்டாவது அணியில் (அதே) ஒத்த இடங்களிலுள்ள உறுப்பு

களும் (corresponding elements) சமமானால், இவ்விரு அணிகளும் சம அணிகள் எனப்படுவன.

குறியீட்டு முறையில்,

$$(a_{ij})_{m\times n} = (b_{ij})_{m\times n} \Longleftrightarrow a_{ij} = b_{ij}, \forall i, j$$

7·1·4. வரை இலக்கணம்

இரு அணிகளின் கூட்டல் : இரு $m \times n$ அணிகளின் கூட்டுத் தொகையாவது, ஓர் அணியின் ஒவ்வோர் உறுப்புடனும், மற்ற அணியின் அதே இடத்து உறுப்பைக் கூட்ட, கிடைக்கும் அணியாகும்.

குறியீட்டு முறையில், $(a_{ij})_{m\times n} + (b_{ij})_{m\times n} = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}$

இரு அணிகளைக் கூட்ட வேண்டின், அவை சம பரிமாண அளவினவாக இருத்தல் வேண்டும். அப்பொழுது, அந்த அணிகளைக் 'கூட்டலுக்கு உகந்த அணிகள்' (matrices conformable for addition) என்போம்.

உதாரணம்

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

என்றால்,

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+2 & 2-1 & 3+1 \\ 4+5 & -1+3 & 1+7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 9 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

கவனிக்க

A-ன் பரிமாண அளவு $= 2 \times 3$

B-ன் பரிமாண அளவு $= 2 \times 3$

$A + B$-ன் பரிமாண அளவு $= 2 \times 3$

7·2. தேற்றங்கள்

7·2·1. தேற்றம்

அணிகள் கூட்டல் பரிமாற்றுப் பண்புடையது.

அதாவது, கூட்டலுக்குகந்த அணிகள் A, B என்றால் $A + B = B + A$

நிறுவல்

$A = (a_{ij}),\ B = (b_{ij})$ என்றால்

$A + B = (a_{ij} + b_{ij}),$ ... (கூட்டல் வ.இ.)

மேலும்,

$B + A = (b_{ij} + a_{ij})$

$a_{ij}, b_{ij} \in F$ (களம்) $\Longrightarrow$ F-ல் பரிமாற்றுப் பண்பு உண்டென்பதால் $a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij}$

$\Longrightarrow A + B = B + A$

7·2·2. தேற்றம்

அணிகள் கூட்டல் சேர்ப்புப் பண்பு உடையது.

அதாவது, எவையேனும் கூட்டலுக்குகந்த மூன்று அணிகள் A, B, C-க்கு $(A + B) + C = A + (B + C)$

நிறுவல்

$A = (a_{ij}),\ B = (b_{ij}),\ C = (c_{ij})$ என்க.

$A + B$ அணியின் பொது உறுப்பு $a_{ij} + b_{ij}$

$\therefore$ $(A + B) + C$ அணியின் பொது உறுப்பு $(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}$ இது போன்று, $A + (B + C)$ அணியின் பொது உறுப்பு,

$a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})$

$a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} \in$ களம் $F \Longrightarrow a_{ij} + (b_{ij} + c_{jj})$

$= (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}$

(F-ன் கூட்டலின் சேர்ப்புப் பண்பு)

$\therefore$ $(A + B) + C = A + (B + C)$

7·2·3. அணிகளின் கழித்தல்

இரு அணிகள் A, B சம பரிமாண அளவுகளாக இருந்தால் தான் அவை கழித்தலுக்குகந்தவை. $A - B$-யாவது, A அணியின்

ஒவ்வோர் உறுப்பிலிருந்து B-ன் அதே இடத்து உறுப்பைக் கழிக்க, கிடைக்கும் அணியாகும்.

வரை இலக்கணம்

அணி $A = (a_{ij})_{m \times n}$ என்றால் $-A = (-a_{ij})_{m \times n}$

$A - B = A + (-B)$.

$A = (a_{ij}),\ B = (b_{ij}) \Longrightarrow A - B = (a_{ij} - b_{ij})$

உதாரணம்

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 7 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 6 & 3 & -1 \end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 9 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

என்றால்,

$$\begin{bmatrix} 3-1 & 2-3 & 1-3 & 4-1 \\ 7-4 & 1-(-1) & 0-9 & 1-1 \\ -1-2 & 6-2 & 3-2 & -1-2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -9 & 0 \\ -3 & 4 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

7·2·4. வரை இலக்கணம்

பூச்சிய அணி அல்லது வெற்று அணி (Zero matrix or Null matrix)

$m \times n$ பரிமாண அளவுள்ள அணியின் உறுப்புகள் எல்லாமே பூச்சியமானால் அந்த அணியை $m \times n$ பரிமாண வரிசையுள்ள பூச்சிய அணி என்போம்,

இதை $[0]$ என்று குறியிடுவோம்.

உதாரணமாக, $[0] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ என்பது 2×3 பூச்சிய அணி. இதை 0 அணி (Zero matrix) என்றும் எழுதலாம்.

7·2·5. தேற்றம்

A ஒரு $m \times n$ அணி, $[0]$ ஒரு $m \times n$ பூச்சிய அணி என்றால்

$$A + [0] = [0] + A = A$$

அல்லது, $A + 0 = 0 + A = A.$

நிறுவல்

$$A = (a_{ij})_{m \times n}, \quad [0] = (0)_{m \times n} \text{ என்க.}$$

$$A + 0 = (a_{ij} + 0) = (0 + a_{ij}) = 0 + A.$$

[குறிப்பு: மேற்கண்ட நிறுவலில் ஆங்காங்கே வேண்டிய இடங்களுக்கு விளக்கங்கள் தருக.]

7·2·6. தேற்றம்

எந்த அணி A-க்கும், $A - A = 0.$

நிறுவல்

$$A = (a_{ij}) \text{ என்க.}$$

$$\begin{aligned} A - A = A + (-A) &= (a_{ij}) + (-a_{ij}) \\ &= (a_{ij} - a_{ij}) \\ &= (0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

7·2·7. தேற்றம்

$$-0 = 0$$

நிறுவல்

$$-0 = (-0) = (0) = 0$$

7·2·8. தேற்றம்

எந்த அணி A-க்கும், $-(-A) = A$

நிறுவல்

$$A = (a_{ij}) \text{ என்க.}$$

$$-A = -(a_{ij}) = (-a_{ij})$$

$$-(-A) = (-(-a_{ij})) = (a_{ij}) = A$$

7·2·9. தேற்றம்

கூட்டலுக்குகந்த அணிகள் A, B-க்கு

$$-(A+B)=(-A)+(-B)=-A-B$$

நிறுவல்

$$A=(a_{ij}),\ B=(b_{ij}) \text{ என்றால்}$$

$$\begin{aligned}-(A+B) &= -(a_{ij}+b_{ij}) \\ &= (-a_{ij}-b_{ij}) \\ &= (-a_{ij}+\{-b_{ij}\}) \\ &= (-a_{ij})+(-b_{ij})=(-A)+(-B) \\ &= -(a_{ij})+\{-(b_{ij})\} \\ &= -A+(-B)=-A-B.\end{aligned}$$

7·2·10. அணிகளை எண்ணியால் பெருக்கல்

$A=(a_{ij})$ என்ற அணி, k என்ற எண்ணி — இவற்றின் பெருக்கம் என்பது, A-ன் ஒவ்வோர் உறுப்பையும் k ஆல் பெருக்கக் கிடைக்கும் அணியாகும். இதனை kA அல்லது $k\,(a_{ij})$ என்று எழுதுவது வழக்கம்.

அதாவது, $k\,(a_{ij})=(k\,a_{ij})$

$A=(a_{ij})_{m\times n}$ அணி என்றால்

$$\begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & \cdots & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & & & \\ ka_{m1} & \cdots & \cdots & ka_{mn}\end{bmatrix}$$

k என்பது மெய்யெண்ணாகவோ இருக்கலாம்.

உதாரணம்

$$-3\begin{pmatrix}2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6 & -9 & 3 \\ -12 & 0 & -18\end{pmatrix}$$

இந்த வரை இலக்கணத்திலிருந்து புலனுவது:

$k(A \pm B) = kA \pm kB$ (A-ம், B-ம் கூட்டலுக்கு உகந்தவையாய் இருத்தல் வேண்டும்)

$kA = Ak$

7·3. அணிகள் பெருக்கல் (Matrix Multiplication)

இந்தச் செயலிக்கு 'நிரையை நிரலால் பெருக்கல்' (Row by column multiplication) என்பது பெயர்,

AB என்ருல், B ஐ A ஆல் முன்னுல் பெருக்கு (Pre multiply B by A) அல்லது A ஐ B ஆல் பின்னுல் பெருக்கு (Post multiply A by B) என்று சொல்வது வழக்கம்.

BA என்ருல், A ஐ B ஆல் முன்னுல் பெருக்கு அல்லது B ஐ A ஆல் பின்னுல் பெருக்கு என்பது பொருள்.

ஆகையால் AB என்பதும் BA என்பதும் ஒரே பொருளுடையன என்று கூற முடியாது.

A ஐ B, பின்னுல் பெருக்க வேண்டுமானுல் முக்கியமான நிபந்தனை, A-ன் நிரல்களின் எண்ணிக்கை, B-ன் நிரைகளின் எண்ணிக்கைக்குச் சமமாயிருத்தல் வேண்டும். அப்படியானுல் A-ம், B-ம் AB பெருக்கத்திற்கு உகந்தவை எனபோம்.

அதாவது, A-ன் பரிமாண அளவு $m \times n$ என்ருல், B-ன் பரிமாண அளவு $n \times p$ ஆக இருத்தல் வேண்டும்.

A-ன் பரிமாண அளவு 2×3, B-ன் பரிமாண அளவு 2×2 என்ருல் AB இல்லை: ஏனெனில் A-ன் நிரல்களின் எண்ணிக்கை யான 3-ம், B-ன் நிரைகளின் எண்ணிக்கையான 2-ம் சமமல்ல.

A-ம், B-ம், AB பெருக்கத்திற்கு உகத்தவை எனில் அவை BA பெருக்கத்திற்கு உகந்தவை என்பது அவசியமில்லை. உதாரணமாக, A-ன் பரிமாண அளவு 2×3, B-ன் பரிமாண அளவு 3×1 என்ருல், AB இருக்கிறது. ஏனெனில் A-ன் நிரல்களின் எண்ணிக்கையான 3-ம், B-ன் நிரைகளின் எண்ணிக்கை யான 3-ம் சமம். ஆனுல் BA இல்லை.

ஏனெனில் B-ன் நிரல்களின் எண்ணிக்கையான 1-ம், A-ன் நிரைகளின் எண்ணிக்கையான 2-ம் சமமல்ல. பரிமாண அளவு களைப் பொறுத்து, AB இருந்தால் BA-ம் இருக்கலாம்.

உதாரணமாக, A-ன் பரிமாண அளவு $m \times n$, B-ன் பரிமாண அளவு $n \times m$ என்க. A-ன் நிரல்களின் எண்ணிக்கை $=$ B-ன் நிறைகளின் எண்ணிக்கை $= n \Longrightarrow A\,B$ இருக்கிறது.

B-ல் நிரல்களின் எண்ணிக்கை $=$ A-ல் நிரைகளின் எண்ணிக்கை $= m \Longrightarrow B\,A$ இருக்கிறது.

பொதுவாக, $A\,B \neq B\,A$. ஆனால் $A\,B = B\,A$ ஆகவும் இருக்கலாம். $A\,B = B\,A$ என்றால் அணிகள் பெருக்கலுக்குப் பரிமாற்றுப் பண்பு உண்டு எனலாம்.

ஆக, A-ன் பரிமாண அளவு $m \times p$, B-ன் பரிமாண அளவு $l \times n$ என்றால், $A\,B$ இருப்பதற்கு $p = l$ என்றாகவேண்டும்.

7·3·1 எப்படிப் பெருக்குவது?

நிரலால் நிரையைப் பெருக்கல் (Row by column multiplication)

$A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m \times p}$ என்க.

$A\,B$ ஐக் காணும் முறை

A-ன் முதல் நிரையையும், B-ன் முதல் நிரலையும் எடுத்துக் கொள்க. A-ன் முதல் நிரையின் முதல் உறுப்பையும், B-ன் முதல் நிரலின் முதல் உறுப்பையும் பெருக்கு. இது போல் A-ன் முதல் நிரையின் இரண்டாவது உறுப்பையும் B-ன் முதல் நிரலின் இரண்டாவது உறுப்பையும் பெருக்கு. இப்படியே A-ன் முதல் நிரையின் எல்லா உறுப்புகளையும், B-ன் முதல் நிரையின் ஒத்த (அதே இடத்து) உறுப்புகள் எல்லாவற்றையும் பெருக்கு. இப்பெருக்கங்கள் எல்லாவற்றையும் கூட்டு. கிடைக்கும் கூட்டுத் தொகைதான் AB-ன் முதல் **நிரையின் முதல் உறுப்பு.**

AB-ன் முதல் நிரையின் இரண்டாவது உறுப்பு : முன் போல், A-ன் முதல் நிரையிலுள்ள எல்லா உறுப்புகளையும், B-ன் இரண்டாவது நிரலிலுள்ள ஒத்த உறுப்புகளையும் பெருக்கு. பெருக்கங்களின் கூட்டுத் தொகைதான் AB-ன் முதல் நிரையின் இரண்டாவது உறுப்பு.

இப்படியே AB-ன் முதல் நிரையை நிரப்பலாம்.

இப்பொழுது, AB-ன் இரண்டாவது நிரையின் முதல் உறுப்பைக் காண, A-ன் இரண்டாவது நிரையின் உறுப்புகளை

B-ன் முதல் நிரலின் உறுப்புகளைப் பெருக்கி, பெருக்கங்களின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்.

இப்படியே, A-ன் இரண்டாவது நிரையை நிலையாக வைத்து, B-ன் எல்லா நிரல்களையும் மேற்கண்டவாறு செயல்படுத்தினால் B-ன் இரண்டாவது நிரையை நிரப்பிவிடலாம்.

இந்தச் செயல் முறை (Process) யைத் தொடர்ந்து செய்து $A\,B$ ஐ அமைத்து விடலாம். A-ன் m நிரைகளும், B-ன் p நிரல்களும் பயன்பட்டனவாதலால், $A\,B$ ஆனது $m \times p$ அணியாகும்.

7.3.2. உதாரணங்கள்

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ என்க.

A-ன் பரிமாண அளவு 2×2. B-ன் பரிமாண அளவு 2×3. A-ன் நிரல்களின் எண்ணிக்கை $= 2 =$ B-ன் நிரைகளின் எண்ணிக்கை.

$\therefore$ அணிகள் A-ம், B-ம் பெருக்கலுக்கு உகந்தவை.

AB-ன் பரிமாண அளவு 2×3.

AB-ன் அமைப்பு $\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix}$

பெருக்கல் முறையை விளக்கமாக விவரிப்போம்.

$A\,B$-ன் முதல் நிரையின் முதல் உறுப்பைக் காணுவோம்.

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}} \quad \underset{B}{\begin{pmatrix} 6 & \cdot & \cdot \\ 5 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}}$$ என்பதைக் கருதுவோம்.

பெருக்கல் செயல் முறை விளக்கப்படி, வேண்டிய உறுப்பு

$$= (2 \times 6) + (3 \times 5)$$

$$= 12 \quad + \quad 15$$

$$= 27$$

$$= c_{11}$$

AB-ன் C_{12}

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & 2 & \cdot \end{pmatrix}$$ என்பதைக் கருதுவோம்.

$$c_{12} = (2 \times 1) + (3 \times 2)$$
$$= 2 + 6$$
$$= 8$$

AB-ன் C_{13}

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 4 \\ \cdot & \cdot & -3 \end{pmatrix}$$

$$c_{13} = (2 \times 4) + (3 \times -3)$$
$$= 8 - 9$$
$$= -1$$

AB-ன் c_{21}

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & \cdot & \cdot \\ 5 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

வேண்டிய உறுப்பு $= (-1 \times 6) + (4 \times 5)$
$$= -6 + 20$$
$$= 14$$

AB-ன் c_{22}

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & 2 & \cdot \end{pmatrix}$$

$$c_{22} = (-1 \times 1) + (4 \times 2)$$
$$= -1 + 8$$
$$= 7$$

AB-ன் c_{23}

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 4 \\ \cdot & \cdot & -3 \end{pmatrix}$$

$$C_{23} = (-1 \times 4) + (4 \times -3)$$
$$= -4 - 12$$
$$= -16$$

$$\therefore \quad AB = \begin{pmatrix} 27 & 8 & -1 \\ 14 & 7 & -16 \end{pmatrix}$$

இது 2×3 அணி.

குறிப்பு: BA இருக்க முடியாது. ஏனெனில், B-ன் நிரல்களின் எண்ணிக்கை $3 \neq A$-ன் நிரைகளின் எண்ணிக்கை 2.

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$

A-ன் நிரல்கள் = 3. B-ன் நிரைகள் = 3.

$\therefore$ AB இருக்கிறது.

$$AB = \begin{pmatrix} (1\times1)+(2\times3)+(3\times4) & (1\times2)+(2\times3)+(3\times-1) \\ (4\times1)+(5\times3)+(6\times4) & (4\times2)+(5\times3)+(6\times-1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1+6+12 & 2+6-3 \\ 4+15+24 & 8+15-6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 19 & 5 \\ 43 & 17 \end{pmatrix}.$$ இது 2×2 அணி.

இப்பொழுது B-ன் நிரல்கள் $= 2 = A$-ன் நிரைகள்.

$\therefore$ BA இருக்கிறது.

$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$; $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$

$$BA = \begin{bmatrix} (1\times1)+(2\times4) & (1\times2)+(2\times5) & (1\times3)+(2\times6) \\ (3\times1)+(3\times4) & (3\times2)+(3\times5) & (3\times3)+(3\times6) \\ (4\times1)+(-1\times4) & (4\times2)+(-1\times5) & (4\times3)+(-1\times6) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 15 & 21 & 27 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

இது 3×3 அணி

(3) $AB \neq BA$ என்பது தெளிவு.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}_{3 \times 3}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$$

$\therefore$ AB இருக்கிறது. இதன் பரிமாண அளவு 3×1.

$$AB = \begin{bmatrix} (1\times -1) + (2 \times 1) + (3\times -2) \\ (4\times -1) + (5 \times 1) + (6\times -2) \\ (7\times -1) + (8 \times 1) + (9\times -2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -5 \\ -11 \\ -17 \end{bmatrix}$$

இந்த அணியில் ஒரே ஒரு நிரல் தான் இருக்கிறது. இதை நிரல் அணி (Column matrix) என்பார்கள்.

7·3·3. வரை இலக்கணம்

'எண்ணி' (Scalar) :

1×1 அணியை 'எண்ணி' என்பதுண்டு. ஒரே ஒரு கணியம் அல்லது உறுப்பு கொண்டது இது. இதை அடைப்புகள் இல்லாமல் எழுதுவதும் உண்டு.

குறிப்பு : 'எண்ணி' **வேறு ;** 'எண்ணி அணி' **வேறு.**

உதாரணங்கள்

1. $A = (1 \quad 2 \quad 3)_{1\times 3}$; $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$

AB இருக்கிறது. இதன் பரிமாண அளவு 1×1

$AB = ((1 \times 4) + (2 \times 5) + (3 \times 6))$

$= (32) = 32$. இது 1×1 அணி. இதற்கு 'எண்ணி' (Scalar) என்பது பெயர். அடைப்புகளை நீக்கிவிடுவதும் உண்டு.

2. '$AB = 0$ என்றால், $A = 0$ அல்லது $B = 0$ என்று இருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை' என்பதை,

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ என்ற அணிகளைக் கொண்டு சரி பார்க்கலாம்.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1\times 0)+(0\times 0) & (1\times 0)+(0\times 1) \\ (0\times 0)+(0\times 0) & (0\times 0)+(0\times 1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

இம்மாதிரிப் பண்புள்ள அணிகள் A, B-க்களுக்குப் 'பூச்சிய வகுப்பான்கள்' (Zero divisors) என்பது பெயர்.

மேற்கண்ட 'அணிகள் பெருக்கலு'க்கு ஒரு முறைமையான (formal) வரை இலக்கணம் தருவோம்.

7·3·4. வரை இலக்கணம்

'அணிகள் பெருக்கல்'

$A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{n\times p}$ என்றால்

$AB = C = (c_{ij})_{m\times p}$;

$c_{ij} = a_{i1}\, b_{1j} + a_{i2}\, b_{2j} + \dots + a_{in}\, b_{nj}$

அதாவது $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}$

$$\overset{A}{\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdot & \cdot & a_{in} \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}}_{m\times n} \overset{\downarrow j \quad B}{\begin{bmatrix} \cdots & b_{1j} & \cdots \\ \cdots & b_{2j} & \cdots \\ \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdots & b_{nj} & \cdots \end{bmatrix}}_{n\times p}$$

$$= \overset{j \downarrow C}{\begin{bmatrix} & & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & c_{ij} & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & & \end{bmatrix}}_{m \times p}$$

7·3·5. தேற்றம்

அணிகளின் பெருக்கலுக்குச் சேர்ப்புப் பண்பு உண்டு.

நிறுவல்

$A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{n\times p}$, $C = (c_{ij})_{p\times q}$ என்க.

நிறுவ : $A(BC) = (AB)C$

A-ன் நிரல்களின் எண்ணிக்கை $= n =$ B-ன் நிரைகளின் எண்ணிக்கை.

$\therefore$ $(AB)_{n\times p}$ உண்டு.

B-ன் நிரல்களின் எண்ணிக்கை $= p =$ C-ன் நிரைகளின் எண்ணிக்கை.

$\therefore$ $(BC)_{n\times q}$, உண்டு.

AB-ன் நிரல்களின் எண்ணிக்கை $= p = C$-ன் நிரைகளின் எண்ணிக்கை.

$\therefore \quad ((AB)\,C)_{n\times q}$ உண்டு.

$$\overset{A}{i \rightarrow \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \end{bmatrix}} \quad \overset{\downarrow j \qquad BC}{\begin{bmatrix} \cdot\;\cdot & b_{11}c_{1j}+b_{12}c_{2j}+\cdots+b_{1p}c_{pj} & \cdots \\ \cdot\;\cdot & b_{21}c_{1j}+b_{22}c_{2j}+\cdots+b_{2p}c_{pj} & \cdots \\ & \cdot & \\ & \cdot & \\ & \cdot & \\ \cdot\;\cdot & b_{n1}\,c_{1j}+b_{n2}c_{2j}+\cdots+b_{np}\,c_{pj} & \cdots \end{bmatrix}}$$

$\therefore \quad A\,(BC)$-ன் ij ஆவது உறுப்பு

$= a_{i1}\,(b_{11}\,c_{1j} + b_{12}\,c_{2j} + \cdots + b_{1p}\,c_{pj})$

$+ \, a_{i2}\,(b_{21}\,c_{1j} + b_{22}c_{2j} + \cdots + b_{2p}\,c_{pj})$

$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$+ \, a_{in}\,(b_{n1}\,c_{1j} + b_{n2}\,c_{2j} + \cdots + b_{np}\,c_{pj})$

$= (a_{i1}\,b_{11} + a_{i2}\,b_{11} + \cdots + a_{in}\,b_{n1})\,c_{1j}$

$+ \, (a_{i1}\,b_{12} + a_{i2}\,b_{22} + \cdots + a_{in}\,b_{n2})\,c_{2j}$

$+ \cdots$

$+ \, (a_{i1}\,b_{1p} + a_{i2}\,b_{2p} + \cdots + a_{in}\,b_{np})\,c_{pj}$

$= (AB)\,C$-ன் ijஆவது உறுப்பு

$\therefore \quad A\,(BC) = (AB)\,C.$

குறிப்பு : ABC என்று எழுதினால் $A\,(BC)$ அல்லது $(AB)C$ என்பது பொருள்.

7·3·6. தேற்றம்

அணிகளின் பெருக்கலாவது கூட்டலின் மீது பங்கீட்டு விதி உடையது.

நிறுவல்

$A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{m\times n}$,

$C = (c_{ij})_{k\times m}$ என்க.

A-ம், B-ம் கூட்டலுக்கு உகந்தவை. $\therefore$ $A + B$ இருக்கிறது; இதன் பரிமாண அளவு $m \times n$.

C-ன் நிரல்களின் எண்ணிக்கை $= m =$ A-ன் நிரைகளின் எண்ணிக்கை.

$\therefore$ CA உள்ளது, பரிமாண அளவு $= k \times n$

C-ன் நிரல்களின் எண்ணிக்கை $= m =$ B-ன் நிரைகளின் எண்ணிக்கை.

$\therefore$ CB உள்ளது. பரிமாண அளவு $= k \times n$

C-ன் நிரல்களின் எண்ணிக்கை $= m =$ $A + B$-ன் நிரைகளின் எண்ணிக்கை.

$\therefore$ $C(A + B)$ உள்ளது. பரிமாண அளவு $= k \times n$

C-ன் i ஆவது நிரையின் உறுப்புகள் : c_{ij}. $c_{i1}, \ldots, c_{im}$

$A + B$-ன் j ஆவது நிரலின் உறுப்புகள் $= a_{1j} + b_{1j}, a_{2j} + b_{2j}; \ldots, a_{mj} + b_{mj}$

$\therefore$ $C(A + B)$-ன் ijஆவது உறுப்பு

$= c_{i1}(a_{1j} + b_{1j}) + c_{i2}(a_{2j} + b_{2j}) + \ldots + c_{im}(a_{mj} + b_{mj})$

$(c_{i1} a_{1j} + c_{i2} a_{2j} + \ldots + c_{im} a_{mj})$

$+ (c_{i1} b_{1j} + c_{i2} b_{2j} + \ldots + c_{im} b_{mj})$

$=$ CA-ன் ijஆவது உறுப்பு $+$ CB-ன் ij ஆவது உறுப்பு

$\therefore$ $C(A + B) = CA + CB$

$\therefore$ இடது பங்கீட்டு விதி உண்மை.

இது போல், $A+B$, AC, BC, $(A+B)C$ என்பவை உண்மையானுல்,

$(A+B)\,C = AC + BC$ என்ற வலது பங்கீட்டு விதியை நிறுவலாம்.

குறிப்பு : 1. பொதுவாக, $C\,(A+B) \neq (A+B)\,C$

2. E, A, B, F அணிகளானுல்,

$E\,(A+B)\,F = EAF + EBF$

7·3·7. தேற்றம்

C ஓர் எண்ணி, A. B என்பவை பெருக்கலுக்கு உகந்த அணிகள் என்ருல், $C\,(AB) = (CA)\,B = A\,(CB)$

நிறுவல்

$A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{n\times p}$.

அணியை எண்ணியால் பெருக்கல் விதியின்படி,

$CA = (ca_{ij})$, $CB = (cb_{ij})$

அணிகளின் பெருக்கல் விதிப்படி, AB-ன் ijஆவது உறுப்பு

$= a_{i1}\,b_{1j} + a_{i2}\,b_{2j} + \dots + a_{in}\,b_{nj}$

$C\,(AB)$-ன் ijஆவது உறுப்பு;

$c\,(a_{i1}\,b_{1j} + a_{i2}\,b_{2j} + \dots + a_{in}\,b_{nj})$

ஆனுல், $(CA)B$-ன் ij ஆவது உறுப்பு

$= a_{i1}\,b_{1j} + ca_{i2}\,b_{2j} + \dots + ca_{in}\,b_{nj}$

$A\,(CB)$-ன் ijஆவது உறுப்பு

$= a_{i1}\,cb_{1j} + a_{i2}\,cb_{2j} + \dots + a_{in}\,cb_{nj}$

$\therefore$ $C\,(AB)$, $(CA)\,B$, $A\,(CB)$ அணிகளின் ijஆவது உறுப்புகள் சமமே.

$\therefore$ $C\,(AB) = (CA)\,B = A\,(CB)$

குறிப்பு : இந்தத் தேற்றத்தின் மூலம், c ஐ எங்கு வேண்டுமானுலும் நகர்த்தலாம் என்ருகிறது.

7·3·8. கிளைத் தேற்றம்

a, b எண்ணிகள் ; A, B என்பவை பெருக்கலுக்கு உகந்த அணிகள் என்ருல், $(a A)(b B) = ab(AB)$

நிறுவல்

$(a A)(b B) = a(A(b B))$ தேற்றத்தின்படி

$= a(b(AB))$,, ,,

$= (ab)(AB)$,, ,,

7·3·9. மாதிரிக் கணக்குகள்

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

$C = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ என்பவற்றுக்குக் கூட்டலின்

சேர்ப்பு விதியைச் சரிபார்.

விடை

$$A + B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(A + B) + C = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 6 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 7 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 5 & 0 \\ -4 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

$$B + C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad A + (B + C) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -2 & 5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

முக்கியக் குறிப்பு

A-ம், B-ம் AB-க்குப் பெருக்கலுக்கு உகந்த அணிகள் என்ருல், AB இருக்கிறது. ஆனுல் BA இருக்கவேண்டிய கட்டாயமில்லை என்றேம். (உதாரணம் 1 ஐப் பார்க்க. அப்படியே BA இருந்

தாலும், AB-ம், BA-ம் சமமாக இருக்க வேண்டுவது இல்லை என்றும் பார்த்தோம். உதாரணம் 2 ஐப் பார்க்க.

A சதுர அணி, B சதுர அணி என்றால், AB இருக்க வேண்டுவதில்லை.

A-ன் பரிமாண அளவு 2×2, B-ன் பரிமாண அளவு 3×3 என்றால் A-ம், B-ம் சதுர அணிகள். ஆனால் A-ன் நிரல்களின் எண்ணிக்கையும், B-ன் நிரைகளின் எண்ணிக்கையும் சமமல்ல. $\therefore$ AB இல்லை. இதுபோல் BA-ம் இல்லை.

A ஒரு சதுர அணி, B ஒரு சதுர அணி, AB இருக்கலாம், BA இருக்கலாம்; ஆனால் AB-ம், BA-ம் சமமாக இருக்கவேண்டுவதில்லை.

உதாரணமாக,

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} 2 \times 2, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} 2 \times 2$ என்க.

$$AB = \begin{pmatrix} -7 & -1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -3 & -8 \end{pmatrix}$$

$$AB \neq BA$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 5 & 0 \\ -4 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad (A + B) + C = A + (B + C)$$

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$-ன் கூட்டலின் நேர்மாறு என்ன ?

விடை

$$A + (-1)\, A = 0$$

$\therefore$ $(-1)\, A$ என்பது A-ன் கூட்டலின் நேர்மாறு.

$$\therefore \quad (-1)\, A = \begin{pmatrix} -2 & -5 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

3. $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

என்ற அணிச் சமன்பாட்டைத் தீர்.

விடை

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + 3 & a_{12} + 1 \\ a_{12} - 4 & a_{22} + 0 \end{pmatrix}$$

(கூட்டலின் வ.இ.)

$$= \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow a_{11} + 3 = -3,\ a_{12} + 1 = 2,$

$a_{21} - 4 = 1,\ a_{22} = 0$ (சம அணிகள் வ.இ.)

$\Longrightarrow a_{11} = -6,\ a_{12} = 1,\ a_{21} = 5,\ a_{22} = 0$

தீர்வு : $\begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$

4. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ என்ற அணிகளைக் கொண்டு, 'பொதுவாக, சதுர அணிகளின் பெருக்கலுக்குப் பரிமாற்றுப் பண்பு இல்லை' என்று நிறுவுக.

$$AB = \begin{pmatrix} (-1 \times 0) + (2 \times 1) & (-1 \times 2) + (2 \times 4) \\ (3 \times 0) + (1 \times 1) & (3 \times 2) + (1 \times 4) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} (0 \times -1) + (2 \times 3) & (0 \times 2) + (2 \times 1) \\ (1 \times -1) + (4 \times 3) & (1 \times 2) + (4 \times 1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 11 & 6 \end{pmatrix}$$

$\therefore\ AB \neq BA$

5. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$

என்பவற்றைக் கொண்டு,

$C(A+B) = CA + CB$ என்ற இடது பங்கீட்டு விதியைச் சரி பார்.

விடை

$$C(A+B) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \right]$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (2 \times 3) + (-2 \times 6) & (2 \times 1) + (-2 \times 6) \\ (1 \times 3) + (3 \times 6) & (1 \times 1) + (3 \times 4) \\ (4 \times 3) + (-1 \times 6) & (4 \times 1) + (-1 \times 4) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -6 & -6 \\ 21 & 13 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

ஆனால்,

$$CA = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 10 & 2 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$CB = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & -10 \\ 11 & 11 \\ 5 & -8 \end{bmatrix}$$

$$CA + CB = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 10 & 2 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -10 \\ 11 & 11 \\ 5 & -8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -6 & -6 \\ 21 & 13 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad C(A+B) = CA + CB$$

6. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ என்பவற்றிற்கு அணிகள் பெருக்கலின் சேர்ப்பு விதியைச் சரி பார்க்க.

விடை

$A(BC) = (AB)C$ என்பதைச் சரி பார்த்தால் போதும்.

$$BC = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad A(BC) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(AB)C = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$\therefore \quad A(BC) = (AB)C.$

7. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix},$

$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ என்ற அணிகளுக்கு, பெருக்கலின் வலது பங்கீட்டு விதியை நிறுவுக.

விடை

$(A+B)C = AC + BC$ என்று காண்பித்தால் போதும்.

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad (A+B)C = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 - 2 + 15 & 3 + 0 + 10 \\ 0 - 3 + 9 & 0 + 0 + 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 19 & 13 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$$

$$AC = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 - 2 + 9 & 1 + 0 + 6 \\ -2 + 0 + 12 & -1 + 0 + 8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}$$

$$BC = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4+0+6 & 2+0+4 \\ 2-3-3 & 1+0-2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$AC + BC = \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 10 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 19 & 13 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$$

$\therefore \ (A+B)\,C = AC + BC.$

7. $A \cdot A = A^2$ என்றால்

$(A+B\ (A-B) \neq A^2 - B^2$ என்பதை

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

என்பவற்றைக் கொண்டு சரி பார்க்க.

விடை

$$A+B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad A-B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$(A+B)\,(A-B) = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3-4 & 6-8 \\ 3-2 & -6-4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -7 & -2 \\ 1 & -10 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} -5-3 & 3-4 \\ -2+4 & -6-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -1 \\ 2 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad (A+B)(A-B) \neq A^2 - B^2.$$

8. (a) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ என்ற சமன்பாட்டை உறுதிப்படுத்தும் எல்லா A அணிகளையும் காண்க.

(b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} A = A \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ என்றால் A அணிகளைக் காண்க.

விடை

(a) $X = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$-ன் ப.அ. 2×2. A-ன் ப. அ. $m \times n$ என்க.

$$Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\text{-ன் ப.அ. } 2 \times 3$$

XA உண்மை என்றால் $2 = m$.

Y-ன் ப.அ. $2 \times n = 2 \times 3 \quad \therefore \quad n = 3$

$\therefore$ A-ன் அமைப்பு

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3a_{11} & 3a_{12} & 3a_{13} \\ 5a_{11} & 5a_{12} & 5a_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore \quad 3a_{11} = 2; \quad 5a_{11} = 1$

$\therefore$ A இல்லை.

(b) $X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ என்க. இதன் ப. அ. 2×2. A-ன் ப. அ. $m \times n$ என்க.

இடப் பக்க அணி XA இருக்கவேண்டுமானுல்,

X-ன் நிரல்கள் எண்ணிக்கை $=$ A-ன் நிரைகள் எண்ணிக்கை.

$\therefore$ A-ன் பரிமாண அளவு $2 \times n$ $\quad \therefore \quad 2 = m$

XA-ன் பரிமாண அளவு $2 \times n$

வலப் பக்க அணி AX இருக்கவேண்டுமானுல்,

A-ன் நிரல்களின் எண்ணிக்கை $=$ X-ன் நிரைகளின் எண்ணிக்கை.

$\therefore \quad n = 2$

$\therefore$ A-ன் ப.அ. 2×2

$\therefore$ A-ன் அமைப்பு $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

கணக்கின்படி,

$XA = AX$

அதாவது,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

அதாவது,

$$\begin{pmatrix} 2a_{11} + a_{21} & 2a_{12} + a_{22} \\ 3a_{11} + 2a_{21} & 3a_{12} + 2a_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2a_{11} + 3a_{12} & a_{11} + 2a_{12} \\ 2a_{21} + 3a_{22} & a_{21} + 2a_{22} \end{pmatrix}$$

சம அணிகளின் வ.இ: படி,

$$a_{21} = 3a_{12}\ ;\quad a_{11} = a_{22}\ ;\quad 3a_{12} = a_{21}$$

A-ன் அமைப்பு $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 3a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$, அதாவது $\begin{pmatrix} r & s \\ 3s & r \end{pmatrix}$,

r, s என்பவை எண்ணிகள்.

9. சுருக்குக :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & -5 & 6 \\ -3 & 7 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -6 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

விடை

கொடுத்த வரிசையில் அணிகள் A, B, C என்க.

A-ன் ப. அ. 3×3. B-ன் ப. அ. 3×2. C-ன் ப. அ. 2×2.

AB-ம், BC-ம் இருக்கின்றன.

கொடுத்த வரிசையில், $ABC = A\,(BC) = AB\,(C)$

$$AB = \begin{bmatrix} (2\times1)+(1\times4)+(-1\times-2) & (2\times3)+(1\times-6)+(-1\times5) \\ (4\times1)+(-5\times4)+(6\times-2) & (4\times3)+(-5\times-6)+(6\times5) \\ (-3\times1)+(7\times4)+(3\times-2) & (-3\times3)+(7\times-6)+(3\times5) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2+4+2 & 6-6-5 \\ 4-20-12 & 12+30+30 \\ -3+28-6 & -9-42+15 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ -28 & 72 \\ 19 & -36 \end{bmatrix}$$

$$(AB)\,C = \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ -28 & 72 \\ 19 & -36 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 50 & 19 \\ -284 & -12 \\ 167 & 21 \end{bmatrix}$$

10. θ-ம், φ-ம் $\frac{\pi}{2}$-ன் ஒற்றை மடங்கில் வேறுபட்டால்

$$\begin{pmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta \sin\theta \\ \cos\theta \sin\theta & \sin\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos^2\varphi & \cos\varphi \sin\varphi \\ \cos\varphi \sin\varphi & \sin^2\varphi \end{pmatrix} = 0$$

என்று நிறுவுக.

$$\begin{pmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta \sin\theta \\ \cos\theta \sin\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos^2\varphi & \cos\varphi \sin\varphi \\ \cos\varphi \sin\varphi & \sin^2\varphi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2\theta \cos^2\varphi + \cos\theta \cos\varphi \sin\theta \sin\varphi & \cos^2\theta \cos\varphi \sin\varphi + \cos\theta \sin\theta \sin^2\varphi \\ \cos\theta \sin\theta \cos^2\varphi + \sin^2\theta \cos\varphi \sin\varphi & \cos\theta \sin\theta \cos\varphi \sin\varphi + \sin^2\theta \sin^2\varphi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta \cos\varphi (\cos\theta \cos\varphi + \sin\theta \sin\phi) & \cos\theta \sin\varphi (\cos\theta \cos\varphi + \sin\theta \sin\varphi) \\ \sin\theta \sin\varphi (\cos\theta \cos\varphi + \sin\theta \sin\varphi) & \sin\theta \sin\varphi (\cos\theta \cos\varphi + \sin\theta \sin\varphi) \end{pmatrix}$$

$$= \cos(\theta - \varphi) \begin{pmatrix} \cos\theta \cos\varphi & \cos\theta \sin\varphi \\ \sin\theta \cos\varphi & \sin\theta \sin\varphi \end{pmatrix}$$

θ-ம் φ-ம் ஒற்றைமடங்கில் வேறுபடுகின்றன என்று கொடுக்கப் பட்டுள்ளது.

$$\therefore \quad \theta - \varphi = (2n+1)\frac{\pi}{2}, \quad n \in Z$$

$$= \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots\ldots$$

$$\therefore \quad \cos(\theta - \varphi) = 0$$

$$\therefore \quad \cos(\theta - \varphi)\begin{pmatrix}\cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi\end{pmatrix}$$

$$= 0, \quad \because \quad \cos(\theta - \varphi) = 0.$$

11. $AC = CA$, $BC = CB$ என்றால்;

$C(AB + BA) = (AB + BA)C$ என்று நிறுவுக.

விடை

$C(AB + BA) = C(AB) + C(BA)$ இடது பங்கீட்டு விதி.

$= (CA)B + (CB)A$ அணிகள் பெருக்கலின் சேர்ப்பு விதி.

$= (AC)B + (BC)A$ கணக்கின்படி

$= A(CB) + B(CA)$ அணிகள் பெருக்கலின் சேர்ப்பு விதி.

$= A(BC) + B(AC)$ கணக்கின்படி

$= (AB)C + (BA)C$ அணிகள் பெருக்கலின் சேர்ப்பு விதி.

$= (AB + BA)C$ வலது பங்கீட்டு விதி.

12. $A^n = A \cdot A \cdot A \ldots\ldots n$ தடவைகள், $n \in Z^+$ என்று வரையறுத்து,

$A = \begin{pmatrix}1 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}$ என்றால், A^n-ன் பண்பைக் காண்க.

விடை

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A(AA) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A(A^3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^5 = A(A^4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^6 = A(A^5) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 8 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$$

முதலியன.

$$A^2 + A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 & 1+1 \\ 1+1 & 1+0 \end{pmatrix},$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = A^3$$

$A^3 = A^2 + A$. இதுபோல், $A^4 = A^3 + A^2$, $A^5 = A^4 + A^3$,

$A^6 = A^5 + A^4$ முதலியன.

$\therefore$ $A, A^2, A^3, A^4, A^5, A^6, \ldots\ldots\ldots$ என்ற தொடர்முறை (Sequence)யில் ஒவ்வோர் உறுப்பும் அதன் முந்தைய இரு உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகையாய் உள்ளது.

$\therefore$ தொடர்முறை $\{A^n\}$-க்கு 'ஃபிப்போனசி (Fibonacci) தொடர்முறை' என்பது பெயர்.

7·4. சில சிறப்பு வகை அணிகள் (Some special types of matrices)

7.4·1. நிரையணி (Row matrix)

n உறுப்புகளை ஒரே நிரையில் அமைக்கப்பெற்ற $1 \times n$ அணிக்கு நிரை அணி அல்லது நிரை வெக்டர் (row vector) என்பது பெயர்.

உதாரணமாக, $[A] = (a_1 \dots\dots a_n)$

7·4·2. நிரல் அணி (column matrix)

n உறுப்புகளை ஒரே நிரலில் அமைக்கப்பெற்ற $n \times 1$ அணிக்கு நிரல் அணி அல்லது நிரல் வெக்டர் (Column vector) என்பது பெயர்.

$$\text{உதாரணமாக, } [A] = \begin{bmatrix} a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{bmatrix}$$

7·4·3. பூச்சிய அணி அல்லது வெற்று அணி (zero or null martix)

ஒரு $m \times n$ அணியின் எல்லா உறுப்புகளும் பூச்சியமானுல் அந்த அணியை $m \times n$ பூச்சிய அணி அல்லது $m \times n$ வெற்று அணி என்போம்.

உதாரணம்

$$[0] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ என்பது } 2 \times 3 \text{ பூச்சிய அணி.}$$

குறிப்புகள்: 1. ஓர் அணி A ஆனது பூச்சிய அணி என்ருல், $A = [0]$ என்று எழுதுகிருேம். 0-க்கு அடைப்புகள் தேவையில்லை $A = 0$ என்று வெறுமனே எழுதினுலும் தவறில்லை.

2. A, B அணிகள் AB பெருக்கத்துக்கு உகந்தவை என்றும், $AB = [0]$ என்றும் கொண்டால், $A = [0]$ அல்லது $B = [0]$ அல்லது, $A = [0]$-ம், $B = [0]$-ம் என்று இருக்கவேண்டுமென்ற கட்டாயம் இல்லை. $A \neq [0]$, $B \neq [0]$, $AB = [0]$ என்ருல், A, B-க்களுக்குப் பூச்சிய வகுப்பான்கள் என்பது பெயர்.

உதாரணமாக, $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 6 & 2 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

என்பவை பூச்சியமற்ற அணிகள்.

ஆனால்

$$AB = \begin{pmatrix} (3\times2)+(1\times4)+(-2\times5) & (3\times1)+(1\times3)+(-2\times3) \\ (6\times2)+(2\times4)+(-4\times5) & (6\times1)+(2\times3)+(-4\times3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = [0]$$

$\therefore \quad AB = [0]$; $A \neq 0,\ B \neq 0$. $\therefore$ A-ம் B-ம் பூச்சிய வகுப்பான்கள்.

மற்றோர் உதாரணம்: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$,

$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad\therefore$ A-ம், B-ம் பூச்சிய வகுப்பான்கள்.

7·4·4. சதுர அணிகள் (Square Matrices)

$m \times n$ பரிமாண அளவுள்ள அணியானது, $m = n$ என்றால் அந்த அணிக்குச் சதுர அணி என்பது பெயர். அதாவது ஒரு சதுர அணியில் சம எண்ணிக்கையுள்ள நிரைகளும், நிரல்களும் உள்ளன.

$n \times n$ சதுர அணியின் பரிமாண அளவை வெறுமனே n என்றும் எழுதுவதுண்டு.

n பரிமாண அளவுள்ள சதுர அணியின் உரு அமைப்பு

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$a_{11}, a_{22}, \ldots\ldots a_{ii}, \ldots\ldots, a_{nn}$ உறுப்புகளைக் கொண்ட மூலை விட்டத்திற்கு முக்கிய மூலைவிட்டம் (leading diagonal) என்பது பெயர். இந்த உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகையான $\sum_{i=1}^{a} a_{ii}$-க்கு, அணியின் ஐகன் (eigen) கூட்டுத்தொகை என்பது பெயர். இதற்கு Trace, Spur என்றும் ஆங்கிலத்தில் பெயர்கள் உண்டு. இதனை $t_r\,A$ என்றும் $s_p\,A$ என்றும் குறிப்பர்.

$$\text{உதாரணமாக, } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ என்றால்,}$$

$$t_r\,A = 1 + 1 - 3 + 2 = 1$$

7·4·5. மூலை வரை அணி (Diagonal Matrix)

ஒரு சதுர அணியில் மூலை விட்டத்திலுள்ளவை நீங்கலாக, மற்றெல்லா உறுப்புகளும் பூச்சியங்கள் என்றால் அச்சதுர அணிக்கு 'மூலைவரை அணி' என்பது பெயர்.

ஆகையால், ஒரு மூலைவரை அணி, சதுர அணியாக இருத்தல் வேண்டும். ஒரு மூலைவரை அணியின் உறுப்புகள் a_{ij} என்றால்

$$a_{ij} \begin{cases} = 0, & i \neq j \\ \neq 0, & i = j \end{cases}$$

உதாரணமாக, பரிமாண அளவு n உள்ள மூலை வரை அணியின் அமைப்பு

$$D = \begin{vmatrix} d_{11} & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & d_{nn} \end{vmatrix}$$

ஒரு மூலை வரை அணியில் பூச்சியங்கள் எல்லாவற்றையும் எழுதுவதற்குப் பதில் மூலை விட்டத்திற்கு மேலண்டை ஒரு கொட்டை (bold faced) பூச்சியத்தையும், கீழண்டை ஒரு கொட்டை வடிவ பூச்சியத்தையும் போடுவது வழக்கம்.

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & & \mathbf{O} \\ & d_{22} & \\ & \cdots & \\ \mathbf{O} & & d_{nn} \end{bmatrix}$$ சில சமயங்களில் இந்த

மூலைவரை அணியை diag $(d_{11}, d_{22}, \ldots\ldots, d_{nn})$ என்றும் எழுதுவதுண்டு.

7·4·6. அணி அலகு அல்லது ஒருமை அணி (Unit Matrix)

ஒரு மூலைவரை அணியின் பூச்சியமற்ற உறுப்புகள் எல்லாமே 1 என்றால் அந்த அணிக்கு ஒருமை அணி என்பது பெயர். ஒருமை அணியை I என்ற குறியீட்டால் வழங்குவர். ஒருமை அணியின் பரிமாண அளவைக் கொடுக்கவேண்டும். தேவைப்பட்டால், n பரிமாண அளவுள்ள ஒருமை அணியை I_n என்று குறிக்கலாம்.

வழக்கமாக ஒருமை அணி I-ன் உறுப்புகளை δ_{ij} என்று குறியிட்டு,

I ஐ, $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ என்று எழுதுவர்.

இந்த δ_{ij}-க்கு க்ரோநெக்கர் டெல்டா (Kronecker delta) என்பது பெயர்.

இப்பொழுது n பரிமாண அளவு சதுர அணி

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \ldots\ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots\ldots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & \lambda_n \end{bmatrix}$$ என்பதை

$a_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$, $i = 1, \ldots\ldots, n$; $j = 1, \ldots\ldots, n$,

$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ என்று

க்ரோநெக்கர் டெல்டா வாயிலாக எழுதலாம்.

பரிமாண அளவு 3 உள்ள ஒருமை அணி

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ என்பதாகும்.

7·4·6. தேற்றம்.

A-ம், I-ம் ஒரே பரிமாண அளவுள்ள சதுர அணிகள் என்றால் $AI = IA = A$.

நிறுவல்

A-ம், I-ம் $n \times n$ சதுர அணிகள் என்க.

$$A = (a_{ij})_{n\times n}, \quad I = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

AI-ம், IA-ம் உள்ளன.

$AI = C$ என்றால், C ஒரு $n \times n$ அணி.

$C = (c_{ij})$ என்றால்,

$$c_{ij} = a_{i1}\,\delta_{1j} + a_{i2}\,\delta_{2j} + \cdots\cdots + a_{ij}\,\delta_{ij} + \cdots\cdots + a_{in}\,\delta_{nj}$$

$$\delta_{ij} = 0,\ i \neq j \Longrightarrow \delta_{1j} = \delta_{2j} = \cdots\cdots = \delta_{j-1},\ j = \delta_{j+1},\ j = \cdots\cdots = \delta_{n,j} = 0$$

$$\delta_{jj} = 1$$

$$\therefore\ c_{ij} = a_{ij}\cdot 1 = 1\cdot a_{ij}$$

$$\therefore\ (c_{ij}) = AI = IA,$$

I என்ற $n \times n$ ஒருமை அணியையும், $A = (a_{ij})_{n\times 1}$ ஐயும் எடுத்துக் கொண்டால் IA இருக்கிறது.

$IA = (c_{ij})_{n\times 1}$ ஆகும்.

$$I = (\delta_{ij})_{n\times n}, \qquad A = (a_{ij})_{n\times 1}$$

$$c_{ij} = \delta_{i1}\,a_{1j} + \delta_{i2}\,a_{2j} + \cdots\cdots + \delta_{ij}\,a_{ij} + \cdots\cdots + \delta_{in}\,a_{nj}$$

வ. இ. படி $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

$\therefore$ δ_{ii} ஐத் தவிர மற்றெல்லா δ-க்களும் 0

$\therefore$ $C_{ij} = \delta_{ij}\, a_{ij} = 1 \cdot a_{ij} = a_{ij}$

$\therefore$ $(C_{ij}) = (a_{ij})$

$\therefore$ $IA = A$

இதைப்போல் I-ம் A-ம் AI-க்கு உகந்தவையெனில் $AI = A$. பொதுவாக $IA \neq AI$

$IA = A$ என்பதில் $A = I$ என்றால்

$II = I$ அதாவது $I^2 = I$

இதுபோல் $I^k = I^{k-1} = \ldots\ldots = I^2 = I,\ k \in Z^+$

உதாரணங்கள்

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -1 \end{bmatrix}, I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ என்றால்,

$$AI = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -1 \end{pmatrix} = A$$

ஆனால் IA இல்லை. ஏனெனில் I-ன் நிரல்களின் எண்ணிக்கை $3 \neq A$-ன் நிரைகளின் எண்ணிக்கை 2.

$\therefore$ $AI \neq IA$.

2. $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ என்றால்

$$IB = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = B$$

ஆனால் BI இல்லை. ஏனெனில், B-ன் நிரல்களின் எண்ணிக்கை $\neq$ I-ன் நிரைகளின் எண்ணிக்கை 3.

7·4·7. எண்ணி அணி (Scalar Matrix)

ஒரு மூலைவரை அணியில் மூலைவிட்டத்திலுள்ள உறுப்புகள் யாவும் சமமானால், அந்த அணிக்கு 'எண்ணி அணி' என்பது பெயர்.

குறிப்பு : எண்ணி வேறு ; எண்ணி அணி வேறு.

உதாரணம்

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= a\,I$$

∴ ஓர் எண்ணி அணியாவது, சமபரிமாண அளவுள்ள ஒருமை அணியை எண்ணியால் பெருக்கினால் வரும் அணியாகும்.

7·4·8. முக்கோண அணி (Triangular Matrix)

ஒரு சதுர அணியின் மூலைவிட்டத்தின் மேலண்டைப் பக்கத்துள்ள எல்லா உறுப்புகளும் பூச்சியங்களாகவோ அல்லது கீழண்டைப் பக்கத்துள்ள எல்லா உறுப்புகளும் பூச்சியங்களாகவோ இருக்குமாயின் அந்த அணியை முக்கோண அணி என்போம்.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & & \cdot & & \\ \cdot & & \cdot & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & \cdots\cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

அல்லது, சுருக்கமாக,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \mathbf{0} \\ \cdot & \ddots & & \\ \cdot & & \ddots & \\ \cdot & & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

உதாரணம்

கான்டி நெம்புகோலின் (Cantilever) மீது வெட்டுத் தொடு பரவலை ((Shear distribution), $\{S\}$ என்ற நிரல் அணி குறித்தால், பயன்படுத்தப்பட்ட வெட்டுத் தொடு விசைகளை $\{P\}$ என்ற நிரல் அணி குறித்தால், T என்பது முக்கோண ஒருமை அணி என்றால்

$$\{S\} = T\,\{P\}$$

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & \mathbf{0} & \\ 1 & 1 & 1 & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \end{bmatrix}$$

குறிப்பு : ஒரு முக்கோண அணியைக் கூட்டல் (Summation) என்றும், தொகையீட்டு (Integrating) அணி என்றும் வழங்குவர்.

7.4.9. மாற்று அணிகள் (Idempotent Matrices)

$A^2 = A$ என்றவாறு ஒரு சதுர அணி A இருந்தால் அந்த அணிக்கு 'மாற்று அணி' என்பது பெயர்.

$AB = A$, $BA = B$ என்ற தொடர்புகள்தாம் மாற்று அணியின் தோற்றத்திற்குக் காரணமாய் இருப்பவை.

$ABA = (AB)\,A = AA = A^2$

மேலும் $ABA = A(BA) = AB = A$

$\therefore \quad A^2 = A$

7·4·10. பூச்சிய மாற்று அணிகள் (Nilpotent Matrices)

$k \in \mathbf{Z}^+$, $A^k = 0$ என்றவாறு உள்ள சதுர அணி A-க்கு k பரிமாண அளவுள்ள பூச்சிய மாற்று அணி என்பது பெயர்.

உதாரணமாக,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \text{ என்றால்,}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 0$$

$\therefore$ வ·இ·படி, அணி A ஆனது பரிமாண அளவு 2 உள்ள பூச்சிய மாற்று அணி.

7·4·11. இடமாற்ற அணி (Transposed Matrix)

ஒரு $m \times n$ பரிமாண அளவுள்ள அணியின் நிரல்களை நிரைகளாகவும், நிரைகளை நிரல்களாகவும் எழுதினால் நமக்கு $n \times m$ பரிமாண அளவுள்ள அணி கிடைக்கின்றது. இப்புதிய அணிக்கு இடமாற்ற அணி (Transposed Matrix) என்பது பெயர். இப்புதிய அணியை, கொடுக்கப்பட்ட அணியின் இடமாற்றம் (Transpose) என்றும் சொல்லுவதுண்டு.

A-ன் இடமாற்றத்தை $\tilde{A}$, A', A^T என்ற குறியீடுகளால் வழங்கலாம். A-ன் பரிமாண அளவு $m \times n$ என்றால் A^T-ன் பரிமாண அளவு $n \times m$ ஆகும்.

உதாரணம்

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ என்றால் $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ என்றால் $A^T = (a_1\ a_2\ a_3)$

நிரல் வெக்டரின் இடமாற்றம் நிரை வெக்டர்; நிரை வெக்டரின் இடமாற்றம் நிரல் வெக்டர்.

3. மேலண்டை 0 உள்ள முக்கோண அணியின் இடமாற்ற அணியாவது கீழண்டை 0 உள்ள முக்கோண அணியாகும்.

7.4.12. அணியின் கலப்பு இணை (Complex Conjugate)

கலப்பெண்களை உறுப்புகளாகக் கொண்ட $m \times n$ அணியை A என்க. கலப்பெண்களின் இடத்தில் அவற்றின் இணைகளை எழுது. கிடைக்கும் அணிக்கு, A-ன் கலப்பு இணை என்பது பெயர். இந்தக் கலப்பு இணையை $\bar{A}$ என்று குறியிடுவர்.

உதாரணமாக,

$$A = \begin{pmatrix} 1+i & 2 & -i \\ 3 & 1-i & 2+i \end{pmatrix} \text{ என்றால்,}$$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1-i & 2 & i \\ 3 & 1+i & 2-i \end{pmatrix}$$

7.4.13. தேற்றம்

$$\overline{(\bar{A})} = A.$$

நிறுவல்

$$A = (a_{pq})_{m\times n} \text{ என்க.}$$

$$a_{pq} = \alpha + i\beta \text{ என்க.}$$

$$\bar{A} = (\bar{a}_{pq})_{m\times n},\quad \bar{a}_{pq} = \alpha - i\beta$$

$$\overline{(\bar{A})} = \overline{(\bar{a}_{pq})}_{m\times n},\ \overline{(\bar{a}_{pq})} = \overline{(\alpha - i\beta)}$$

$$= \alpha + i\beta = a_{pq}$$

$$\therefore\ \overline{(\bar{A})} = (a_{pq})_{m\times n} = A$$

7·4·14. தேற்றம்

λ ஒரு கலப்பெண் என்றால்,

$\overline{(\lambda A)} = \bar{\lambda} \bar{A}$

நிறுவல்

$A = (a_{pq})$ என்றால், $a_{pq} = \alpha + i\beta$ என்க.

$\bar{A} = \overline{(a_{pq})} = \overline{(\alpha + i\beta)} = \alpha - i\beta$

$\lambda = \xi + i\eta$ என்றால், $\bar{\lambda} = \xi - i\eta$

$$\lambda A = (\lambda\ a_{pq}) = (\lambda\ [\alpha + i\beta]) = (\lambda\alpha + i\lambda\beta)$$

$$\overline{\lambda A} = \overline{\lambda\alpha + i\lambda\beta} = \bar{\lambda}\alpha - i\bar{\lambda}\beta$$

$$= ([\xi - i\eta]\alpha - i[\xi - i\eta]\beta)$$

$$= (\xi[\alpha - i\beta] - i\eta[\alpha - i\beta])$$

$$= ([\xi - i\eta][\beta - i\beta])$$

$$= (\bar{\lambda}[\alpha - i\beta])$$

$$= \bar{\lambda}(\alpha - i\beta)$$

$$= \bar{\lambda}\ \bar{A}$$

7·4·15. தேற்றம்

A-ம், B-ம் AB-க்கு உகந்தவை என்றால்

$\overline{(AB)} = \bar{A}\ \bar{B}$

நிறுவல்

$A = (a_{pq})_{m\times n}$, $B = (b_{pq})_{n\times l}$ என்றால்

$$A\ B\text{-ன் } pq \text{ ஆவதுஉறுப்பு} = \sum_{k=1}^{n} a_{pk}\, b_{kq}$$

$\overline{AB}$-ன் pq ஆவதுஉறுப்பு $= \overline{\sum_{k=1}^{n} a_{pk} b_{kq}}$ (கலப் பெண்கள் தொகையின் இணை = கலப் பெண்கள் இணைகளின் கூட்டுத் தொகை)

இரு கலப்பெண்களின் பெருக்கத்தின் இணை = கலப் பெண்கள் இணைகளின் பெருக்கம்.

$$\therefore \quad \sum_{k=1}^{n} \overline{a_{pk}\, b_{kq}} = \sum_{k=1}^{n} \overline{a_{pk}}\, \overline{b_{kq}}$$

$$\therefore \quad \overline{AB} = \bar{A}\bar{B}$$

∴ இரு அணிகள் பெருக்கத்தின் கலப்பு இணை = கலப்பு இணைகளின் பெருக்கம்.

7·4·16. மெய் அணி (Real Matrix)

$$\alpha + i\beta = \overline{\alpha + i\beta} \text{ என்க.}$$

அதாவது $\alpha + i\beta = \alpha - i\beta$

$$\therefore \quad \beta = 0$$

∴ $\alpha + i\beta$ என்பது α ஆகிறது.

∴ $A = \bar{A}$ என்ற சமன்பாட்டை உறுதிப்படுத்தும் A அணிக்கு 'மெய் அணி' என்பது பெயர்.

7·4·17. மெய்யில்லா அணி (Imaginary Matrix)

$$\alpha + i\beta = -\overline{\alpha + i\beta} \text{ என்க.}$$

அதாவது, $\alpha + i\beta = -(\alpha - i\beta) = -\alpha + i\beta$

$\therefore \quad \alpha = 0 \quad \therefore \quad \alpha + i\beta$ என்பது $i\beta$ ஆகிறது.

∴ $A = -\bar{A}$ என்ற சமன்பாட்டை உறுதிப்படுத்தும் A அணிக்கு 'மெய்யில்லா அணி' என்பது பெயர்.

7·4·18. சமச்சீர் அணிகள் (Symmetric Matrices)

$A = A^T$ என்றால் A-க்குச் சமச்சீர் அணி என்பது பெயர்.

A-ன் பரிமாண அளவு $n \times m$ என்றால், A^T-ன் பரிமாண அளவு $m \times n$

$$\therefore \quad A = A^T \Longrightarrow A\text{-ன் ப·அ} = A^T\text{-ன் ப·அ.}$$

$$\Longrightarrow m \times n = n \times m$$

$$\Longrightarrow m = n$$

$$\Longrightarrow m \times n = n \times m = m \times m$$

$\therefore$ ஒரு சமச்சீர் அணி நிச்சயமாகச் சதுர அணியாக இருக்க வேண்டும்

சமச்சீர் அணியின் உறுப்பின் அமைப்பின் வழி,

ஒரு சதுர அணி $A = (a_{ij})$-ல் $a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j$ என்றால் A என்பது சமச்சீர் அணி ஆகும்.

அதாவது ஒரு சதுர அணியில் (i, j)ஆவது உறுப்பும், (j, i)-வது உறுப்பும் சமமானால் அது சமச்சீர் அணியாகும்.

$a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j$ என்றால், $a_{12} = a_{21}, a_{23} = a_{31}$ முதலியன. அதே நேரத்தில் $i = j$ என்றால், $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{ii}, \ldots$ என்பவை மாறவில்லை.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ என்ற}$$

n பரிமாண அளவுள்ள சதுர அணி சமச்சீர் அணியாக வேண்டுமானால், முதல் நிரையும், முதல் நிரலும் பரிமாறினால், இரண்டாவது நிறை, நிரல் பரிமாறினால் இப்படியே n-ஆவது நிரை, நிரல் பரிமாறினால் கிடைக்கும் அணி A ஆகவே இருக்க வேண்டும். அப்படியானால், முதல் நிரையின் உறுப்புகளும், முதல் நிரலின் உறுப்புகளும் சமமே.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 13 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & & & \\ a_{31} & & & & \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & & & & \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{u1} \\ a_{12} & & & & \\ a_{13} & & & & \\ \vdots & & & & \\ a_{1n} & & & & \end{bmatrix}$$

$\therefore$ $a_{11} = a_{11}$, $a_{21} = a_{12}$, $a_{31} = a_{13}$, ..., $a_{n1} = a_{1n}$ முதலியன. மூலை விட்டத்து உறுப்புகள் $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ என்பவை மாருதவை.

இப்பொழுது n பரிமாண அளவுள்ள சமச்சீர் அணி A-ஐ

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \cdots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \cdots & a_{3n} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \cdots & a_{4n} \\ \vdots & & & & \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & a_{4n} \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$\therefore$ மூலை விட்டத்தின் இரு மருங்கிலும் சம தூரத்தில் உள்ள உறுப்புகள் சமம் அதாவது, சமச்சீர் அணியில், மூலை விட்டத்தைப் பொறுத்து, அணியின் உறுப்புகள் சீராக உள்ளன.

அதாவது, குறுக்கு வீச்சு உறுப்புகள் சமம். a_{ii} உறுப்புகள், அதாவது, $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{ii}, \ldots, a_{nn}$ என்பவற்றிற்கு நேரான உறுப்புகள் (Direct elements) என்பது பெயர்.

உதாரணங்கள்

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & a & b \\ a & 3 & c \\ b & c & 4 \end{bmatrix}$ என்பது பரிமாண அளவு 3 உள்ள சமச்சீர் அணி. ஏனெனில் $A = A^T$

2. $A = \begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix}$ என்பது சமச்சீர் அணி.

7·4·19 எதிர்ச் சீர் அணி (Skew Symmetric Matrix or, Anti Symmetiric Matrix.)

ஒரு சதுர அணியின் குறுக்கு வீச்சு உறுப்புகள் அளவில் சமமாக, ஆனால், குறியில் வேறுபட்டளவாக இருப்பின், அந்த அணிக்கு எதிர்ச் சீர் அணி என்று பெயர். அதாவது, சதுர அணி $A = (a_{ij})$ ஆனது எதிர் சீரணியாக வேண்டுமானல், $a_{ij} = -a_{ji}$ என்றிருக்க வேண்டும்.

அதாவது, A-ன் $(i\ j)$ ஆவது உறுப்பு A-ன் $(_{ij})$ ஆவது உறுப்பின் எதிர்.

$\therefore$ மூலை விட்டத்திலுள்ள உறுப்புகள் a_{iis}

வரை இலக்கணப்படி, $a_{ii} = -a_{ii}$

$$\therefore \quad a_{ii} = 0$$

எதிர் சீர் அணியின் மூலை விட்டத்து உறுப்புகள், எல்லாமே பூச்சியங்கள்.

எதிர்ச் சீர் அணி $(a_{ij}) = (-a_{ji})$ என்பதால், $A = -A^T$

உதாரணம்

$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ என்பது ஓர் எதிர் சீர் அணி.

7·4·20· எதிர் அணி (Skew Matrix)

ஒரு சதுர அணி $A = (a_{ij})$ ஆனது,

(i) $a_{ij} = -a_{ji}$

(ii) $a_{ii} \neq 0$ (ஒரு சிலவற்றைத் தவிர)

என்றவாறு அமைத்தால் A ஐ எதிர் அணி என்போம்.

உதாரணம்

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$ என்பது எதிர் அணி.

7·4·21· ஹெர்மீஷியன் அணி (Hermitian Matrix)

ஒரு சதுர அணி A ஆனது

$A = (\bar{A})^T$

என்றவாறு இருந்தால், A ஐ ஹெர்மீஷியன் அணி என்போம். பொதுவாக, $(\bar{A})^T$ என்பதை A^H அல்லது A^* என்று எழுதுவது வழக்கம். இப்பொழுது, சதுர அணி $A = A^H$, அதாவது $A = A^*$ என்ருல் A என்பது ஷெர்மீஷியன் அணி.

உறுப்புகள் வழி,

சதுர அணி $A = (a_{ij})$ என்பது ஹெர்மீஷியன்

$$\Longrightarrow a_{ij} = \overline{a_{ji}}$$

(அதாவது $(_{ij})$ ஆவது உறுப்பாவது, $(_{j,i})$ ஆவது உறுப்பின் கலப்பு இணை).

முலைவிட்டத்து உறுப்புகள் a_{kk} எத்தகையவை?

வரை இலக்கணப்படி, $a_{kk} = \overline{a_{kk}}$

$a_{kk} = \alpha + i\beta$ எனில், $a_{kk} = \overline{a_{kk}} \Longrightarrow \alpha + i\beta = \alpha - i\beta$

$\Longrightarrow \beta = 0$

$\Longrightarrow \alpha + i\beta = \alpha$

$\Longrightarrow a_{kk} = \alpha$

$\Longrightarrow a_{kk}$ ஒரு மெய்யெண்.

∴ ஒரு ஹெர்மீஷியன் அணியின் மூலைவிட்டத்து உறுப்புகள் எல்லாமே மெய்யெண்கள்.

உதாரணம்

$$\begin{bmatrix} 1 & 1+i & i \\ 1-i & 2 & 4 \\ -i & 4 & 3 \end{bmatrix}$$ என்பது ஹெர்மீஷியன் அணி.

7·4·22· சீரில்லா ஹெர்மீஷியன் அணி (Skew-Hermitian, Anti-Hermitian)

ஒரு சதுர அணி $A = (a_{ij})$ ஆனது,

$A = -(\bar{A})^T$ என்றால், (அதாவது $A = -A^*$)

A ஐச் 'சீரில்லா ஹெர்மீஷியன் அணி' என்போம்.

உறுப்புகள் வழி,

$A = (a_{ij})$ என்பது சீரில்லா ஹெர்மீஷியன்

$$\Longrightarrow a_{ij} = -\overline{a_{ji}}$$

மூலை விட்டத்து உறுப்புகள் a_{kk} எத்தகையன?

வ· இ· படி $a_{kk} = -\overline{a_{kk}}$, அதாவது $a_{kk} + \overline{a_{kk}} = 0$

$a_{kk} = \alpha + i\,\alpha$ என்றால், வ· இ· படி,

$(\alpha + i\,\alpha) + (\alpha - i\,\alpha) = 0 \quad \Longrightarrow 2\,\alpha = 0 \Longrightarrow \alpha = 0$

∴ $\alpha = 0$ என்றால் $\alpha + i\,\beta = i\beta$, ஒரு மெய்யில்லா எண். $\beta \neq 0$

$\beta \neq 0 \Longrightarrow i\,\beta = 0 \Longrightarrow \alpha + i\,\beta = 0.$

∴ சீரில்லா ஹெர்மீஷியன் அணியில் மூலை விட்டத்து உறுப்புகள் எல்லாமே மெய்யில்லா எண்களாகவாவது, அல்லது பூச்சியங்களாகவாவது இருக்க வேண்டும்.

உதாரணம்

$$A = \begin{bmatrix} i & 1 & 1-i \\ -1 & 0 & i \\ -1-i & i & 2i \end{bmatrix}$$ என்பது சீரில்லா ஹெர்மிஷியன் அணி.

ஏனெனில் :

$$\bar{A} \begin{bmatrix} -i & 1 & 1+i \\ -1 & 0 & -i \\ -1+i & -i & -2i \end{bmatrix}$$

$$(\bar{A})^T = \begin{bmatrix} -i & -1 & -1+i \\ 1 & 0 & -i \\ 1+i & -i & -2i \end{bmatrix}$$

$$-(\bar{A})^T = \begin{bmatrix} i & 1 & 1-i \\ -1 & 0 & i \\ -1-i & i & 2i \end{bmatrix}$$

$$= A$$

$\therefore$ A ஆனது சீரில்லா ஹெர்மீஷியன்.

7·4·23· மாதிரிக் கணக்குகள்

1. $a_{ij} = 3i + \delta_{ij} j^2$ என்றவாறு 3×4 பரிமாண அளவு உள்ள அணியை அமை.

விடை

3×4 பரிமாண அளவு உள்ள அணியின் அமைப்பு

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

$$a_{ij} = 3i + \delta_{ij} j^2 \qquad \delta_{ij} \begin{cases} = 0 & i \neq j \\ = 1 & i = j \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1,$$

$$\delta_{12} = \delta_{13} = \delta_{14} = \delta_{21} = \delta_{23} = \delta_{24} = \delta_{31} = \delta_{32} = \delta_{34} = 0.$$

$$a_{11} = 3(1) + \delta_{11}(1)^2 = 3 + 1 = 4$$

$$a_{12} = 3(1) + \delta_{12}(2)^2 = 3$$

$$a_{13} = 3(1) + \delta_{13}(3)^2 = 3$$

$$a_{14} = 3(1) + \delta_{14}(4)^2 = 3$$

$$a_{21} = 3(2) + \delta_{21}(1)^2 = 6$$

$$a_{22} = 3(2) + \delta_{22}(2)^2 = 6 + 4 = 10$$

$$a_{23} = 3(2) + \delta_{23}(3)^2 = 6$$

$$a_{24} = 3(2) + \delta_{24}(4)^2 = 6$$

$$a_{31} = 3(3) + \delta_{31}(1)^2 = 9$$

$$a_{32} = 3(3) + \delta_{32}(2)^2 = 9$$

$$a_{33} = 3(3) + \delta_{33}(3)^2 = 9 + 9 = 18$$

$$a_{34} = 3(3) + \delta_{34}(4)^2 = 9$$

∴ வேண்டிய அணி

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 & 3 \\ 6 & 10 & 6 & 6 \\ 9 & 9 & 18 & 9 \end{bmatrix}$$

2. ஒரே பரிமாணமுள்ள இரு மூலை வரை அணிகளின் பெருக்கல், பரிமாற்றுப் பண்புடையது என நிறுவுக.

விடை

(a_{ij}) ஒரு சதுர அணி என்க.

$i \neq j, a_{ij} = 0 \Longrightarrow (a_{ij})$: ஒரு மூலை வரை அணி.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

என்பவை F களத்தின் மீது வரையறுக்கப்பட்டவை என்க.

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11}\,b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}\,b_{22} & \cdots & 0 \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\,b_{nn} \end{bmatrix}$$

F களமாதலால், $a_{ii}\,b_{ii} = b_{ii}\,a_{ii}$

$\therefore \quad AB = BA.$

3. கீழ்க்கண்ட அணிகளில் சமச்சீர் அணிகளையும், எதிர்ச்சீர் அணிகளையும் பிரித்தெடுக்கவும்:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix},$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

விடை

(a) C-ம், D-ம் சதுர அணிகள்

மேலும் $C = C^T$, $D = D^T$, $J = J^T$

$\therefore$ C, D, J ஆகியவை சமச்சீர் அணிகள்.

(b) F ஒரு சதுர அணி.

$$F^T = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$-F^T = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= F$$

$\therefore$ சதுர அணி F ஓர் எதிர் சீரணி:

J ஒரு சதுர அணி.

$J = -J^T$ $\therefore$ சதுர அணி J-ம் ஓர் எதிர் சீர் அணி.

(c) $A \neq A^T \neq -A^T$, $B \neq B^T \neq -B^T$, $E \neq E^T \neq -E^T$

$G \neq G^T \neq -G^T$

H ஒரு சதுர அணி அல்லவாதலால், $H \neq H^T \neq -H^T$

$\therefore$ A, B, E, G, H என்பவை சமச்சீர் அணிகளும் அல்ல; எதிர் சீர் அணிகளும் அல்ல.

4. பரிமாண அளவு n உள்ள எந்த சமச்சீர் அணியிலுமுள்ள வெவ்வேறு உறுப்புகளின் மீப்பெரு எண்ணிக்கை என்ன என்பதைக் காண்.

விடை

சமச்சீர் அணி ஒரு சதுர அணி. இந்த எண்ணியில் எல்லா உறுப்புகளுமே சமம் என்றுதே. இதன் பரிமாண அளவு $n \times n$. இந்த அணியில் மொத்தம் n^2 உறுப்புகள் உள்ளன. இடது மூலைவிட்டத்தில், அதாவது, முக்கிய மூலைவிட்டத்தில் உள்ள n உறுப்புகள் நீங்கலாக, $n^2 - n$ உறுப்புகளைக் கருதுவோம், இந்த $n^2 - n$ உறுப்புகள் இந்தமூலை விட்டத்தின் மேற்புறமும்.

கீழ்ப்புறமும், $a_{ji} = a_{ij}$ என்றவாறு சீராகப் பரவியிருக்கின்றன. அதாவது, குறுக்கு வீச்சு உறுப்புகள் சமம்.

$\therefore$ $n^2 - n$ உறுப்புகளில் $\frac{n_z - n}{2}$ உறுப்புகள் தாம் வெவ்வேருனவை.

$\therefore$ முக்கிய மூலைவிட்டத்து உறுப்புகள் n உடன், $\frac{n^2 - n}{2}$ உறுப்புகளைச் சேர்த்தால், $\frac{n^2 - n}{2} + n$, அதாவது, $\frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ உறுப்புகள் வெவ்வேருனவை.

இப்பொழுது, சமச்சீர் அணியின் உறுப்புகள் எல்லாமே சம மானவை என்ருல், ஒரே ஓர் உறுப்புத்தான் தனிப்பட்டது.

(5) இடமாற்றம் செயல் (Transposition Operation), தானுதல் பண்பு (reflexive) உடையது என்று நிறுவுக. அதாவது $(A^T)^T = A$.

விடை

$A = (a_{ij})$, $A^T = (b_{ij})$ என்க.

$\therefore$ $b_{ij} = a_{ji}, \forall (i, j)$

$\therefore$ $(A^T)^T = (b_{ij})^T = (b_{ji}) = (a_{ij}) = A$

7·4·24. தேற்றம்

இரு அணிகளின் கூட்டுத் தொகை (அல்லது வேறுபாடு)யின் இடமாற்றமாவது, அவ்விரு அணிகளின் இடமாற்றங்களின் கூட்டுத் தொகை (அல்லது, வேறுபாடு) ஆகும். அதாவது,

$$(A + B)^T = A^T + B^T;$$

$$(A - B)^T = A^T - B^T$$

நிறுவல்

$A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ என்பவை சமபரிமாண அளவுள்ள இரு அணிகள் என்க.

$\therefore$ $A + B = (c_{ij})$ என்ருல் $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ $\forall (i,j)$

$(A + B)^T = (c_{ij})^T = c_{ji} = (a_{ji} + b_{ji})$

$A^T = (a_{ij})^T = a_{ji}$. $B^T = (b_{ij})^T = (b_{ji})$

$$A^T + B^T = (a_{ji}) + (b_{ji}) = (a_{ji} + b_{ji})$$
$$= (A + B)^T$$

இதுபோல், $(A - B)^T = A^T - B^T$ என்பதை நிறுவுக!

(பயிற்சி)

7·4·25· தேற்றம்

பெருக்கத்தின் இடமாற்ற விதி (Law of Transpose of a product)

A-ம், B-ம், AB பெருக்கத்துக்கு உகந்தவை என்றால் $(AB)^T = B^T A^T$.

நிறுவல்

$A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{n \times p}$ என்க.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & & & & & \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix}$$ என்க.

$A : m \times n$; $B = n \times p$. $\therefore AB = m \times p$

$AB = (c_{ij})$ என்றால், AB-ன் (i, j) ஆவது உறுப்பு

$= c_{ij} = a_{i1}\, b_{1j} + a_{i2}\, b_{2j} + \dots + a_{in}\, b_{nj}$

AB-ன் நிரல்களையும் நிரைகளையும் பரிமாற்றினால், $(AB)^T$ கிடைக்கிறது. $(AB)^T = (c_{ij})$

$\therefore$ $(AB)^T$-ன் (i, j) ஆவது உறுப்பு

$= a_{j1}\, b_{1i} + a_{j2}\, b_{2i} + \dots + a_{jn}\, b_{ni}$

$= b_{1i}\, a_{j1} + b_{2i}\, a_{j2} + \dots + b_{ni}\, a_{jn}$

B-ன் i ஆவது நிரல் $\begin{bmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ \vdots \\ b_{ni} \end{bmatrix}$ என்றால் B^T-ன் i ஆவது நிரை : $(b_{1i}, b_{2i}, \dots, b_{ni})$

A-ன் j_1 ஆவது நிரை : $(a_{j1}\ a_{j2} \dots a_{jn})$ என்றால்

A^T-ன் j ஆவது நிரல் $\begin{bmatrix} a_{j1} \\ a_{j2} \\ \vdots \\ a_{jn} \end{bmatrix}$

$\therefore$ $B^T A^T$-ன் (ij) ஆவது உறுப்பு

$= b_{1i}\, a_{j1} + b_{2i}\, a_{j2} + \dots + b_{ni}\, a_{jn}$

$= (AB)^T$-ன் (ij) ஆவது உறுப்பு

$\therefore$ $(AB)^T = B^T A^T$

கவனிக்க :

$B^T : p \times n$. $A^T = n \times m$.

$B^T A^T : p \times m$

$AB : m \times p$ $(AB)^T : p \times m$

7·4·26. கிளைத்தேற்றம்

எவையேனும் எண்ணிக்கையுள்ள அணிகளின் பெருக்கத்தின் இடமாற்றமாவது, தனித்தனி இடமாற்ற அணிகளை முன் பின் வரிசையில் எழுதியதன் பெருக்கமாகும்.

அதாவது, $(A_1 \dots A_n)^T = A_n{}^T \dots A_1{}^T$

நிறுவல்

n அணிகள் $A_1, A_2, \dots, A_n$ என்க. தொகுத்தறி முறையின் வழி, இந்தக் கிளைத்தேற்றத்தை நிறுவுவோம்.

நிறுவவேண்டியது : $(A_1 A_2 \dots A_n)^T = A_n{}^T \dots A_1{}^T$

$n = 2$-க்கு, $(A_1 A_2)^T = A_2{}^T A_1{}^T$ என்பது உண்மை (தேற்றம் 7·4·25).

$n = k$-க்கு, $(A_1 A_2 \dots A_k)^T = A_k{}^T \dots A_2{}^T A_1{}^T$ என்பது உண்மை என்க. இது தொகுத்தறி முறையின் தற்கோள்.

$n = k + 1$-க்கு, $(A_1 A_2 \dots A_k A_{k+1})^T$

$= ([A_1 A_2 \dots A_k] A_{k+1})^T$

$= A_{k+1}^T (A_1 A_2 \dots A_k)^T$ தேற்றம் (7·4·25)

$= A_{k+1}^T (A_k{}^T \cdot A_{k-1}{}^T \dots A_2{}^T A_1{}^T)$
(தொகுத்தறி முறையின் தற்கோள்)

$= A_{k+1}^T A_k{}^T \dots A_1{}^T.$

$\therefore$ $n = k + 1$-க்குத் தேற்றம் உண்மை.

$\therefore$ $(A_1 \dots A_n)^T = A_n{}^T \dots A_1{}^T$

7·4·27. மாதிரிக் கணக்குகள்

1. A-ம் B-ம் சமச்சீர் அணிகளானுல் ABA அணியும் சமச்சீர் அணி என நிறுவுக.

நிறுவல்

$(ABA)^T = A^T B^T A^T$

A-ம், B-ம் சமச்சீர் என்பதால், $A = A^T$, $B = B^T$

$\therefore \quad (ABA)^{T} = ABA.$

$\therefore$ ABA ஒரு சமச்சீர் அணி.

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ என்ற அணிகளைக் கொண்டு, $(AB)^{T} = B^{T} A^{T}$ என்ற 'இடமாற்றத்தின் முன் பின்னுதல் விதி'யைச் சரிபார்க்க.

விடை :

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 11 \\ 7 & 19 \end{pmatrix}$$

$$(AB)^{T} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 11 & 19 \end{pmatrix}$$

$$B^{T} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad A^{T} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix},$$

$$B^{T} A^{T} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 11 & 19 \end{pmatrix}$$

$\therefore \quad B^{T} A^{T} = (AB)^{T}$

3. A ஓர் அணியானால், AA^{T} ஒரு சமச்சீர் அணி எனக் காண்பிக்க.

அதாவது, $AA^{T} = (AA^{T})^{T}$

விடை :

$$(AA^{T})^{T} = (A^{T})^{T} \cdot A^{T}$$

$$= A \cdot A^{T}$$

ஓர் அணியும் அதன் இடமாற்ற அணியும் சமமானால் அது சமச்சீர் அணியாகும். $\therefore$ AA^{T} ஒரு சமச்சீர் அணி.

A-ன் பரிமாண அளவு : $m \times n$

A^T-ன் பரிமாண அளவு : $n \times m$

AA^T-ன் பரிமாண அளவு : $m \times m$

$(AA^T)^T$-ன் பரிமாண அளவு : $m \times m$

4. $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ என்ற அணிக்கு $(AA^T)^T = AA^T$

என்பதைச் சரி பார்க்க.

விடை :

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Longrightarrow A^T = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$AA^T = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 30 & 28 & 12 \\ 28 & 36 & 20 \\ 12 & 20 & 14 \end{bmatrix}$$

இதில் குறுக்கு வீச்சு உறுப்புகள் சமம். அதாவது $a_{ij} = a_{ji}$ இது சமச்சீர் அணி. $\therefore$ AA^T ஒரு சமச்சீர் அணி.

5. $(A+A^T)^T = A+A^T$, அதாவது, ஓர் அணியையும், அதன் இடமாற்ற அணியையும் கூட்ட, கிடைப்பது ஒரு சமச்சீர் அணியாகும்.

விடை :

$(A+B)^T = A^T + B^T$ என்பதாலும், $(A^T)^T = A$ என்பதாலும்,

$$(A+A^T)^T = A^T + (A^T)^T = A^T + A$$

$$= A + A^T$$ (அணிகள் கூட்டல் பரிமாற்று விதி)

ஓர் அணி அதன் இடமாற்ற அணிக்குச் சமமானல் அது சமச்சீர் அணி ஆகும்.

6. $(A - A^T)^T = -(A - A^T)$ எனக் காண்பி.

விடை : $(A - A^T)^T = (A + (-A^T))^T$

$$= A^T + (-A^T)^T$$

$$= A^T - (A^T)^T$$

$$= A^T - A$$

$$= -(A - A^T)$$

7. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ என்பதைக் கொண்டு,

$(A+A^T)^T = A + A^T$ என்ற உண்மையைச் சரிபார்க்க.

விடை :

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \therefore A + A^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$$

இது சமச்சீர் அணி ஏனெனில் $a_{ij} = a_{ji}$

$\therefore \quad (A + A^T)^T = A + A^T$

8. A, B என்பவை இரு n பரிமாண அளவுள்ள சமச்சீர் அணிகள் என்றால், AB ஒரு சமச்சீர் அணி $\Longleftrightarrow AB = BA$.

விடை : பாகம் 1 $\Longrightarrow$

தற்கோள் : AB ஒரு சமச்சீர் அணி

நிறுவல்

$$\therefore \quad AB = (AB)^T \quad \text{(சமச்சீர் அணி வ. இ.)}$$

$$= B^T A^T$$

$$= BA \quad \text{(A-ம் B-ம் சமச்சீர் அணிகள்)}$$

பாகம் 2 $\Longleftarrow$

தற்கோள் $AB = BA$.

நிறுவல் $(AB)^T = B^T A^T$

$$= BA \text{ (B-ம், A-ம் சமச்சீர் அணிகள்)}$$

$$= AB \text{ (தற்கோள்)}$$

$\therefore \quad AB$ ஒரு சமச்சீர் அணி.

9. ஒவ்வொரு மூலை வரை அணியும் ஒரு சமச்சீர் அணியாகும்.

விடை :

n பரிமாண அளவுள்ள மூலை வரை அணி

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ என்க.}$$

$a_{ij} = a_{ji} = 0, \quad i \neq j$

குறுக்கு வீச்சு உறுப்புகள், எல்லாமே 0 ஆவதால், அவை சமம்.

$\therefore$ A என்பது சமச்சீர் அணியாகும்.

10. ஒவ்வோர் எதிர்ச் சீர் அணியின் வர்க்கமும் ஒரு சமச்சீர் அணியாகும்.

விடை

எதிர்ச் சீர் அணியின் வ. இ. படி,

$$A = - A^T$$

$$\therefore A^2 = AA = (-A^T)(-A^T) = (-1) A^T \ (-1)A^T = A^T A^T$$

$$= (A\ A)^T = (A^2)^T$$

$A^2 = (A^2)^T \Longrightarrow A^2$ என்பது சமச்சீர் அணியாகும்.

11. $A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & -c \\ -b & c & 0 \end{bmatrix}$ என்றால் A^2 ஒரு சமச்சீர் அணி என்று காண்பிக்க.

விடை

$$A^2 = A\ A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & -c \\ -b & c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & -c \\ -b & c & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -a^2-b^2 & bc & -ac \\ bc & -a^2-c^2 & -ab \\ -ac & -ab & -b^2-c^2 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ $a_{ij} = a_{ji}$, இது ஒரு சமச்சீர் அணி.

12. ஒவ்வொரு சதுர அணியையும், ஒரே முறையில், ஒரு சமச்சீர் அணி, ஓர் எதிர்ச் சீர் அணி ஆகியவற்றின் கூட்டுத் தொகையாக எழுதலாம்.

விடை : பாகம் 1 $\Longrightarrow$

$A = (a_{ij})_{n\times n}$ என்றால், $A^T = (a_{ji})_{n\times n}$

$\therefore \quad A + A^T = (a_{ij}) + (a_{ji}) = (a_{ij} + a_{ji})$

$= (a_{ji} + a_{ij})$ (களத்தில் கூட்டலின் பரிமாற்றுப் பண்பு)

$= (A + A^T)^T_{n\times n}$

$\therefore \quad A + A^T$ ஒரு சமச்சீர் அணி.

$\therefore \quad \frac{1}{2}(A + A^T)_{n\times n}$ என்பதும் சமச்சீர் அணி.

$$A - A^T = A + (-A^T)$$

$$= (a_{ij}) + (-a_{ji})$$

$$= (a_{ij} - a_{ji})$$

$$= -(a_{ji} - a_{ij})$$

$$= -(A - A^T)^T_{n\times n}$$

$\therefore \quad A - A^T$ ஓர் எதிர்ச் சீர் அணி.

$\therefore \quad \frac{1}{2}(A - A^T)_{n\times n}$ என்பதும் ஓர் எதிர்ச் சீர் அணி.

$$B = (b_{ij}) = \frac{1}{2}(A + A^T) = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})$$

$$C = (c_{ij}) = \frac{1}{2}(A - A^T) = \frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji})$$

$$B + C = (b_{ij}) + (c_{ij}) = (b_{ij} + c_{ij})$$

$$= \left(\frac{a_{ij}}{2} + \frac{a_{ji}}{2} + \frac{a_{ij}}{2} - \frac{a_{ji}}{2}\right)$$

$$= (a_{ij})$$

$$= A$$

$$A = B + C = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$$

∴ ஒரு சதுர அணி = ஒரு சமச்சீர் அணி + ஓர் எதிர்ச் சீர் அணி.

பாகம் 2

நிறுவ : மேற்கண்டவாறு சதுர அணியை எழுதும் முறை ஒரு முறையே.

நிறுவல்

மேலே $A = B + C$ என்று எழுதினேம்.

முடியுமானல், $A = D + E$ என்பது மற்ருெரு முறை என்க. (D சமச்சீர், E எதிர்ச் சீர் அணிகள்.)

$$A^T = (D + E)^T$$
$$= D^T + E^T$$
$$= D - E \text{ (சமச்சீர் அணி, எதிர்ச் சீர் அணி வ.இ.)}$$

ஆனல் $A = B + C \Longrightarrow A^T = (B + C)^T = B^T + C^T$
$= B - C$ (B சமச்சீர், C எதிர்ச்சீர்)

$$D - E = B - C$$

∴ $D = B$; $E = C$

∴ A ஐ எழுதும் முறை ஒரே முறை.

13. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ என்ற சதுர அணியை, சமச்சீர் அணி, எதிர்ச் சீர் அணி—இவற்றின் கூட்டுத் தொகையாக எழுது.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ என்றால், } \frac{A}{2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \therefore \quad \frac{A^T}{2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{A + A^T}{2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix}$$ $\therefore$ இது ஒரு சமச்சீர் அணி.

$$\frac{A - A^T}{2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$ $\therefore$ இது ஓர் எதிர்ச்சீர் அணி.

$$\therefore \quad \frac{A + A^T}{2} + \frac{A - A^T}{2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = A$$

$\therefore \quad A = \frac{A + A^T}{2} + \frac{A - A^T}{2}$ = சமச்சீர்அணி + எதிர்ச்சீர் அணி.

14. A-ம் B-ம் கலப்பெண்கள் களத்தின் மீது வரையறுக்கப் பட்டால் $(AB)^* = B^* A^*$ என்று நிறுவுக.

விடை

வ.இ.படி, $(AB)^* = (\overline{AB})^T = (\overline{A}\,\overline{B})^T = (\overline{B})^T (\overline{A})^T$

$= B^* A^*$

15. A என்பது கலப்பெண்கள் களத்தின் மீது வரையறுக்கப் பட்டால்,

$(A^*)^* = A$ என்று நிறுவுக.

விடை.

$A^* = (\overline{A})^T$ வ.இ.

$(A^*)^* = (\overline{A^*})^T$ வ.இ.

$= \left(\overline{(\overline{A})^T}\right)^T$

$= (A^T)^T$

$= A$

16. A, B என்பவை கலப்பெண்கள் களத்தின் மீது வரை யறுக்கப்பட்டால், $(A + B)^* = A^* + B^*$ என நிறுவுக.

விடை

$$(A+B)^* = (\overline{A+B})^T$$
$$= (\bar{A}+\bar{B})^T$$
$$= (\bar{A})^T + (\bar{B})^T$$
$$= A^* + B^*$$

17. கலப்பெண்கள் களத்தின்மீது வரையறுக்கப்பட்ட ஓர் அணி, அதன் கலப்பு இணையின் இடமாற்ற அணி—இவற்றின் பெருக்கம் ஒரு ஹெர்மீஷியன் அணி ஆகும்.

அதாவது, $AA^* = (A\,A^*)^*$.

நிறுவல்

$(AB)^* = B^*\,A^*$ (14 ஆவது கணக்குப்படி)

$B = A^*$ என்றால்

$$(A\,A^*)^* = (A^*)^*\,A^*$$
$$= A\,A^* \quad \text{(15 ஆவது கணக்குப்படி)}$$

18. கலப்பெண்கள் களத்தின்மீது வரையறுக்கப்பட்ட ஒரு சதுர அணி, அதன் கலப்பு இணை இடமாற்ற அணி—இவற்றின் கூட்டுத் தொகை ஒரு ஹெர்மீஷியன் அணி ஆகும்.

அதாவது, $A + A^* = (A + A^*)^*$.

நிறுவல்

$$(A+A^*)^* = (\overline{A+A^*})^T \quad \text{(வ.இ.)}$$
$$= (\bar{A} + \overline{A^*})^T$$
$$= (\bar{A})^T + (\overline{A^*})^T$$
$$= (\bar{A})^T + (\overline{(\bar{A})^T})^T$$
$$= (\bar{A})^T + (A^T)^T$$

$$= (\bar{A})^{T} + A$$

$$= A^{*} + A$$

$$= A + A^{*}$$

19. A ஆனது ஒரு கலப்பெண்கள் களத்தின்மீது வரையறுக்கப்பட்ட அணி என்றால், A, A^{*} என்பவற்றின் வேறுபாடு ஒரு சீரில்லா ஹெர்மீஷியன் அணி ஆகும் என நிறுவுக.

அதாவது $A - A^{*} = -(A - A^{*})^{*}$ என நிறுவுக.

நிறுவல்

$$(A - A^{*})^{*} = (A + (-A^{*}))^{*}$$

$$= A^{*} + (-A^{*})^{*} \quad \text{(கணக்கு 16-ன்படி)}$$

$$= A^{*} + ((-1)A^{*})^{*}$$

$$= A^{*} - (A^{*})^{*}$$

$$= A^{*} - A$$

$$\therefore \quad A - A^{*} = -(A - A^{*})^{*}$$

20. கலப்பெண்கள் களத்தின்மீது வரையறுக்கப்பட்ட ஒவ்வொரு சதுர அணியையும், ஒரு ஹெர்மீஷியன் அணி, ஒரு சீரில்லா ஹெர்மீஷியன் அணி—இவற்றின் கூட்டுத் தொகையாக எழுதலாம்.

விடை

கணக்கு 18-ன் படி, $(A + A^{*})^{*}$ ஒரு ஹெர்மீஷியன் அணி.

கணக்கு 19-ன் படி, $-(A-A^{*})^{*}$ ஒரு சீரில்லா ஹெர்மீஷியன் அணி.

$$\therefore \quad (A + A^{*})^{*} + [-(A - A^{*})^{*}]$$

$$= A^{*} + A + A - A^{*}$$

$$= 2A.$$

$$\therefore \quad A = \frac{1}{2} \; [(A + A^{*})^{*} + \{-(A - A^{*})^{*}\}]$$

21. A என்பது ஒரு மெய்யான சமச்சீர் அணி, B ஒரு மெய்யான எதிர்ச் சீர் அணி என்றால்; ஒவ்வொரு ஹெர்மீஷியன் அணியையும் $A + Bi$ என்ற மாதிரி எழுதலாம் என நிறுவுக.

நிறுவல்

$H = (h_{pq})_{m \times n}$ என்பது ஒரு ஹெர்மீஷியன் அணி என்றால்,

$h_{pq} = a_{pq} + b_{pq}\, i$ என்க. இதில்,

$a_{pq}, b_{pq} \in \mathbf{R}$.

$H = H^*$ (ஹெர்மீஷியன் அணியின் வ. இ.)

அதாவது $(h_{pq}) = (\overline{h_{pq}})^T$

$$= (\overline{a_{pq} + b_{pq}\, i})^T$$

$$= (a_{pq} - b_{pq}\, i)^T$$

$$= a_{qp} - b_{qp}\, i$$

$$\therefore \quad a_{pq} + b_{pq}\, i = a_{qp} - b_{qp}\, i$$

$$\Longrightarrow a_{pq} = a_{qp};\ b_{pq} = -b_{qp}.$$

$\therefore$ (a_{pq}) என்பது சமச்சீர் அணி.

(b_{pq}) என்பது எதிர்சீர் அணி.

$$\therefore \quad H = (h_{pq}) = (a_{pq} + b_{pq}\, i) = (a_{pq}) + (b_{pq})i$$

$\therefore$ $H = A + Bi$ என்பதில் $A = (a_{pq})$; மெய்யான சமச்சீர் அணி ;

$B = (b_{pq})$: மெய்யான எதிர்ச் சீர் அணி.

22. A: ஒரு மெய்யான எதிர்ச் சீர் அணி, B: ஒரு மெய்யான சமச்சீர் அணி என்றால், $A + Bi$ அமைப்பில், ஒவ்வொரு சீரில்லா ஹெர்மீஷியன் அணியையும் எழுதலாம்.

நிறுவல்

$H = (h_{pq})$ என்பது ஒரு சீரில்லா ஹெர்மீஷியன் அணி என்றால்,

$h_{pq} = a_{pq} + b_{pq}\, i$, $a_{pq}, b_{pq} \in \mathbf{R}$.

ஹெர்மீஷியன் அணியின் வ.இ. படி, $H = - H^*$.

$$\therefore \quad H = (h_{pq}) = -(h_{pq})^*$$

$$= -(\overline{h_{pq}})^T$$

$$= -(\overline{a_{pq} + b_{pq} i})^T$$

$$= -(a_{pq} - b_{pq} i)^T$$

$$= -(a_{qp} - b_{qp} i)$$

$$= (-a_{qp} - b_{qp} i)$$

$$\therefore \quad (h_{pq}) = (a_{pq} + b_{pq} i) = (-a_{qp} + b_{qp} i)$$

$$\Longrightarrow a_{pq} = -a_{qp} \; ; \quad b_{pq} = b_{qp}$$

$\Longrightarrow (a_{pq})$ ஒரு மெய்யான எதிர்ச்சீர் அணி ;

(b_{pq}) ஒரு மெய்யான சமச்சீர் அணி.

$$\therefore \quad H = (h_{pq}) = (a_{pq} + b_{pq} i)$$

$$= (a_{pq}) + (b_{pq})i$$

$= A + Bi$ என்பதில் $A = (a_{pq})$, $B = (b_{pq})$

23. A என்பது கலப்பெண்கள் களத்தின் மீது வரையறுக்கப்பட்ட அணி என்றால்,

(i) A ஹெர்மீஷியன் $\Longrightarrow iA$ சீரில்லா ஹெர்மீஷியன் ;

(ii) A சீரில்லா ஹெர்மீஷியன் $\Longrightarrow iA$ ஹெர்மீஷியன் என்று நிறுவுக.

நிறுவல்

(i) $(iA)^* = \bar{i} A^*$ (k கலப்பெ**ண்** $\Longrightarrow (kA)^* = \bar{k} A^*$)

$$= -iA^*$$

$= -iA$ (A ஹெர்மீஷியன் $\Longrightarrow A = A^*$)

ஹெர்மீஷியன் அணியின் வ.இ. படி, $H = -H^*$.

$$\therefore \quad H = (h_{pq}) = -(h_{pq})^*$$

$$= -(\overline{h_{pq}})^T$$

$$= -(\overline{a_{pq}} + \overline{b_{pq} i})^T$$

$$= -(a_{pq} - b_{pq} i)^T$$

$$= -(a_{qp} - b_{qp} i)$$

$$= (-a_{qp} - b_{qp} i)$$

$$\therefore \quad (h_{pq}) = (a_{pq} + b_{pq} i) = (-a_{qp} + b_{qp} i)$$

$$\Longrightarrow a_{pq} = -a_{qp} ; \quad b_{pq} = b_{qp}$$

$\Longrightarrow (a_{pq})$ ஒரு மெய்யான எதிர்ச்சீர் அணி;

(b_{pq}) ஒரு மெய்யான சமச்சீர் அணி.

$$\therefore \quad H = (h_{pq}) = (a_{pq} + b_{pq} i)$$

$$= (a_{pq}) + (b_{pq})i$$

$= A + Bi$ என்பதில் $A = (a_{pq})$, $B = (b_{pq})$

23. A என்பது கலப்பெண்கள் களத்தின் மீது வரையறுக்கப்பட்ட அணி என்றால்,

(i) A ஹெர்மீஷியன் $\Longrightarrow$ iA சீரில்லா ஹெர்மீஷியன்;

(ii) A சீரில்லா ஹெர்மீஷியன் $\Longrightarrow$ iA ஹெர்மீஷியன்

என்று நிறுவுக.

நிறுவல்

(i) $(iA)^* = \bar{i} A^*$ (k கலப்பெண் $\Longrightarrow$ $(kA)^* = \bar{k} A^*$)

$$= -iA^*$$

$= -iA$ (A ஹெர்மீஷியன் $\Longrightarrow A = A^*$)

$\therefore \quad iA = -(iA)^*$

$\therefore$ iA என்பது சீரில்லா ஹெர்மீஷியன்.

(ii) $(iA)^* = \bar{i}A^*$ (k கலப்பெண் $\Longrightarrow (kA)^* = \bar{k}A^*$)

$$= -iA^* = i(-A^*)$$

$= iA$ (A சீரில்லா ஹெர்மீஷின் $\Longrightarrow A = -A^*$)

$\therefore \quad iA = (iA)^*$

$\therefore$ iA என்பது ஹெர்மீஷியன்.

24. கீழ்க்கண்ட அணிகளில் எவை ஹெர்மீஷியன், எவை சீரில்லா ஹெர்மீஷியன் என்று தீர்மானி :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3+i \\ -3-i & 5 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 5+2i \\ 5-2i & 1 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 4+5i \\ -4+5i & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 2+i & i \\ 2+i & 0 & 1+3i \\ i & 1+3i & 0 \end{bmatrix},$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2-i \\ -3 & 0 & -2i \\ -2-i & -2i & 0 \end{bmatrix}$$

விடை

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix};$$

$$A^* = (\bar{A})^T = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = A$$

∴ A ஒரு ஹெர்மீஷியன்.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3+i \\ -3-i & 5 \end{pmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3-i \\ -3+i & 5 \end{pmatrix},$$

$$B^* = (\bar{B})^T = \begin{pmatrix} 2 & -3+i \\ 3-i & 5 \end{pmatrix} \neq B$$

$$-B^* = \begin{pmatrix} -2 & 3-i \\ -3+i & -5 \end{pmatrix} \neq B$$

∴ B ஹெர்மீஷியனுமல்ல, சீரில்லா ஹெர்மீஷியனுமல்ல.

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}:$$ இது சமச்சீர் சதுர அணி.

$C^* = (\bar{C})^T = C$ ∴ C ஹெர்மீஷியன்.

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ ∴ C ஓர் எதிர்ச் சீர் சதுர அணி

$-C^* = C$ ∴ C ஒரு சீரில்லா ஹெர்மீஷியன்.

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 5+2i \\ 5-2i & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{D} = \begin{pmatrix} 3 & 5-2i \\ 5+2i & 1 \end{pmatrix}$$

$$D^* = (\bar{D})^T = \begin{pmatrix} 3 & 5+2i \\ 5-2i & 1 \end{pmatrix} = D$$

∴ D ஒரு ஹெர்மீஷியன்.

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 4+5i \\ -4+5i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{E} = \begin{pmatrix} 0 & 4-5i \\ -4-5i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad E^* = (\bar{E})^T = \begin{pmatrix} 0 & -4-5i \\ 4-5i & 0 \end{pmatrix}$$

$$-E^* = \begin{pmatrix} 0 & 4+5i \\ -4+5i & 0 \end{pmatrix} = E$$

$\therefore$ E ஒரு சீரில்லா ஹெர்மீஷியன்.

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{F} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$ (i இல்லை; ஆகையால் மாற்றமில்லை.
ஒரு மெய்யெண்ணின் இணையானது அந்த மெய்யெண்ணே.)

$$F^* = (\bar{F})^T = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \neq F$$

$$-F^* = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \neq F$$

$\therefore$ F ஹெர்மீஷியனுமல்ல; சீரில்லா ஹெர்மீஷியனுமல்ல.

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 2+i & i \\ 2+i & 0 & 1+3i \\ i & 1+3i & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{G} = \begin{bmatrix} 0 & 2-i & -i \\ 2-i & 0 & 1-3i \\ -i & 1-3i & 0 \end{bmatrix}$$

$$G^* = (\bar{G})^T = \begin{bmatrix} 0 & 2-i & -i \\ 2-i & 0 & 1-3i \\ -i & 1-3i & 0 \end{bmatrix} \neq G$$

$$-G^* = \begin{bmatrix} 0 & -2+i & i \\ -2+i & 0 & -1+3i \\ i & -1+3i & 0 \end{bmatrix} \neq G$$

∴ G ஆனது ஹெர்மீஷியனுமல்ல ; சீரில்லா ஹெர்மீஷியனுமல்ல.

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2-i \\ -3 & 0 & -2i \\ -2-i & -2i & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{H} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2+i \\ -3 & 0 & 2i \\ -2+i & 2i & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad H^* = (\bar{H})^T = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -2+i \\ 3 & 0 & 2i \\ 2+i & 2i & 0 \end{bmatrix} \neq H$$

$$-H^* = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2-i \\ -3 & 0 & -2i \\ -2-i & -2i & 0 \end{bmatrix} = H$$

∴ H ஒரு சீரில்லா ஹெர்மீஷியன்.

7·5. சதுர அணியின் 'அணிக் கோவை' (Determinant)

A என்பது ஒரு சதுர அணியானால், $|A|$ அல்லது det A என்பது A அணியின் உறுப்புகள், தத்தம் இடங்களில் இருந்து கொண்டே அமைக்கும் அணிக் கோவையைக் குறிக்கும்.

உதாரணமாக, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ என்றால்

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

det A ஐ, A அணியின் அணிக்கோவை எனலாம்.

ஓர் அணிக்கோவை சதுரமாக இருக்கவேண்டுமென்பதால், சதுரமற்ற அணிக்கு அணிக்கோவை கிடையாது.

ஒரே பரிமாண அளவுள்ள இரு அணிக் கோவைகளுக்கான பெருக்கல் விதியும், அணிகளின் பெருக்கல் விதியும் ஒன்றே.

A, B என்ற இரு அணிகள் சம பரிமாண அளவுடையவை என்றால்,

$\det AB = \det A \cdot \det B$

$\det BA = \det B \cdot \det A$

$\det AB = \det BA$.

ஆனால் $AB \neq BA$.

முக்கியக் குறிப்பு :

ஓர் அணிக்குப் பெறுமானம், அதாவது, மதிப்பு இல்லை. ஆனால் சதுர அணியின் அணிக் கோவைக்குப் பெறுமானம் அல்லது, மதிப்பு உண்டு. அணிக் கோவையின் இந்த மதிப்பு, ஓர் எண்ணி (Scalar) ஆகும்.

7·5·1. சிறப்பு அணிகள் (Singular Matrices)

A ஒரு சதுர அணி, $\det A = 0$ என்றால், A ஐச் 'சிறப்பு அணி' என்போம்.

A ஒரு சதுர அணி, $\det A \neq 0$ என்றால், A ஐச் 'சிறப்பில்லா அணி' (non-singular matrix) என்போம்.

உதாரணம்

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ என்றால், } \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= (1)(4) - (2)(3)$$
$$= 4 - 6 = -2$$

A-க்கு மதிப்பு இல்லை. det A-ன் மதிப்பு $= -2$

$\det A \neq 0 \Longrightarrow A$ ஒரு சிறப்பில்லா அணி.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \text{ என்றால், } \det B = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 0$$

B-க்கு மதிப்பு இல்லை. det B-ன் மதிப்பு $= 0$

$\det B = 0 \Longrightarrow B$ ஒரு 'சிறப்பு அணி'.

7·5·2. இணைக் காரணி அணி (Co-factor Matrix)

A என்பது ஒரு சதுர அணியானால், A-ன் அணிக்கோவை det A ஐ அமை. det A-ன் ஒவ்வோர் உறுப்பின் இணைக் காரணியையும் கொண்டு, அணி A-ன் உறுப்புகள் இருக்கும் இடங்களில் அவற்றின் இணைக் காரணிகளை எழுது. கிடைக்கும் அணிக்கு A-ன் இணைக் காரணி அணி என்பது பெயர். இதனை A^C என்போம்.

உதாரணம்

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \text{-ன் } A^C \text{ என்ன ?}$$

விடை

$$A^C = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}$$ என்க.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\alpha_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2$$

$$\alpha_{12} = -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 9$$

$$\alpha_{13} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5$$

$$\alpha_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -14$$

$$\alpha_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 7$$

$$\alpha_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\alpha_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

$$\alpha_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

$$\alpha_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

$$A^C = \begin{bmatrix} 2 & 9 & -5 \\ -14 & 7 & 0 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

7·5·8. சேர்ப்பு அணி (Adjoint Matrix)

ஒரு சதுர அணி A-ன் சேர்ப்பு அணி ஆவது A-ன் இணைக் காரணி அணியின் இடமாற்ற அணியாகும்.

இந்தச் சேர்ப்பு அணியை $adj\ A$ என்று குறியிடுவர்.

$\therefore\ adj\ A = (A^C)^T$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ என்றால்,}$$

$$A^C = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots\cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots\cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots\cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

$$adj\ A = (A^C)^T = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots\cdots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \cdots\cdots & \alpha_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \cdots\cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

உதாரணம்

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \text{ என்றால்}$$

$$A^C = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}; \quad adj\ A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

7.5.4. ' சேர்ப்பு அணிக்கு ஒரு முக்கியமான பெருக்கல் பண்பு உண்டு ' என்ற தேற்றத்தை நிறுவுக.

நிறுவல்

A அணியை அதன் சேர்ப்பு அணி $adj\ A$ உடன் பெருக்கு வோம்.

$A = (a_{ij})_{m\times n}$ என்றால், $adj\ A = (\alpha_{ji})_{n\times m}$

$$\underset{m\times n}{A} \cdot \underset{n\times m}{adj\ A} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots\cdots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \cdots\cdots & \alpha_{n2} \\ \vdots & & \\ \alpha_{1n} & \cdots\cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}\alpha_{11}+a_{12}\alpha_{12}+\cdots+a_{1n}\alpha_{1n} & \cdots\cdots & a_{11}\alpha_{n1}+\cdots+a_{1n}\alpha_{nn} \\ \vdots & & \\ \vdots & & \\ a_{n1}\alpha_{11}+\cdots\cdots+a_{nn}\alpha_{1n} & \cdots\,.. & a_{n1}\alpha_{n1}+\cdots+a_{nn}\alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} |A| & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & |A| \end{bmatrix}_{m\times m}$$

$$= |A| \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots\cdots & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots\cdots & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & \cdots\cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$= |A|\ I_{m\times m}$, $I_{m\times m}$ என்பது ஒருமை அணி.

மேலும் $adj\ A \cdot A$ இருக்கிறது.

$$A \cdot adj\ A = adj\ A \cdot A = |A|\ I$$

உதாரணம்

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad A^C = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$adj\ A = (A^C)^T = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot adj A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -11 & 0 \\ 0 & -11 \end{pmatrix} = -11 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -11\, I$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -11$$

$$\therefore \quad A \cdot adj = \det A \cdot I.$$

7·5·5. சேர்ப்பு அணியின் மற்ருெரு பண்பு.

A என்பது $n \times n$ சதுர அணி என்க.

$A\,(adj\ A) = (adj\ A)A = |\ A\ |\ I$ என்று கண்டோம்.

இவற்றிற்கு அணிக் கோவைகள் எடுத்தால்

$$|\ A\ |\ adj\ A\ | = |\ adj\ A\ |\ \ |\ A\ | = |\ A\ |\ I\ |$$

இப்பொழுது $|\ A\ |\ \ I =$

$$\begin{bmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{bmatrix}_{n \times n}$$

$$\det (\ |\ A\ |\ I) = \begin{vmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{vmatrix}$$

$$= \ |\ A\ |^n$$

$$\therefore \quad |\ A\ |\ \ |\ adj\ A\ | = |\ adj\ A\ |\ \ |\ A\ | = |\ A\ |^n.$$

7·5·6. சமன்பாடுகளும் அணிகளும்

இனி, ஒருங்கமை ஒருபடிச் சமன்பாடுகள் தொகுதியை (System of Simultaneous linear equations) அணி சமன்பாடாக (Matrix equation)வும் எழுதலாம் என்பதைக் காண்போம்.

உதாரணமாக, x_1, x_2 என்ற இரு தெரியாத கணியங்களை (unknown quantities)க் கொண்ட இரு ஒருங்கமை ஒருபடிச் சமன்பாடுகள்

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 = b_1$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 = b_2$$

என்க.

x_1, x_2-க்களின் கெழுக்களான $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$-க்களை அவற்றின் இடங்களை மாற்றுமல் அப்படியே ஓர் அணியை அமை. நமக்குக் கிடைப்பது

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$ இதை A என்று அழை.

x_1, x_2-க்களை அவை இருக்கும் வரிசை கலையாமல்

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$ என்ற நிரல் அணியை அமை.

இதை X என்று அழை.

A-ன் பரிமாண அளவு 2×2.

X-ன் பரிமாண அளவு 2×1.

$\therefore$ AX இருக்கிறது. இதன் பரிமாண அளவு 2×1.

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \end{pmatrix}$$

சமன்பாடுகள் தொகுதியின் வலப் பக்கத்தை (வரிசை குலையாமல்)

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$ என்ற நிரல் அணியாக எழுது.

இதை B என்று அழை.

இப்பொழுது மேற்கண்ட அணிகளின் பெருக்கம் AX ஐ B உடன் சமன்படுத்து. கிடைப்பது,

$$\begin{pmatrix} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

அணிகள் சமன்பாட்டின் படி,

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 = b_1$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 = b_2$$

இவைதானே நமது சமன்பாடுகள் தொகுதி ?

$$\therefore \left. \begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 &= b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 &= b_2 \end{aligned} \right\}$$

என்ற இரு ஒருங்கமை ஒருபடிச் சமன்பாடுகளை

$$AX = B, \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

என்ற 'அணிச் சமன்பாடு' (Matrix equation) வழி அமைக்கலாம்.

$B \neq [0]$ என்றால், மேற்கண்ட சமன்பாடுகள் 'சமபடியில்லாச் சமன்பாடுகள்' (non-homogeneous equations) எனப்படுவன.

$B = [0]$ என்றால், எடுத்துக்கொண்ட சமன்பாடுகள் சமபடிச் சமன்பாடுகள் (homogeneous equations) எனப்படுவன.

உதாரணமாக.

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &= -10 \\ 2x_1 + 7x_2 &= 11 \end{aligned}\right\}$$ என்பவை சமபடியில்லாச் சமன்பாடுகள்.

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &= 0 \\ 2x_1 + 7x_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$ என்பவை சமபடிச் சமன்பாடுகள்.

பொதுவாக, n தெரியாத கணியங்களைக் கொண்ட n ஒருங்கமைச் சமன்பாடுகளை எடுத்துக் கொள்ளுவோம்.

அதாவது,

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad & \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

என்றால், இத்தொகுதியை

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$A \quad \cdot \quad X \quad = \quad B$$

என்ற அணிச் சமன்பாடு அமைப்பில் எழுதலாம்.

மேற்கண்ட தொகுதியில் $b_1 = 0 = b_2 = \cdots = b_n$ என்றால் இச் சமன்பாடுகள் சமபடிச் சமன்பாடுகள் ஆவன.

7·5·7· ஓர் அணியின் நேர்மாறு (Inverse of a Matrix or Reciprocal of a Matrix)

வரை இலக்கணம்

A என்பது யாதாவதோர்அணி, I என்பது ஒருமை அணி என்றால், $AB = BA = I$ என்றவாறு அமையும் B அணிக்கு, A-ன் நேர்மாறு என்பது பெயர். இந்த B ஐ A^{-1} என்று குறியிடுவது வழக்கம்.

A^{-1}-க்கு A-ன் 'தலைகீழ்' (Reciprocal) என்றும் பெயர்உண்டு. AB இருக்கவேண்டுமானால், A-ன் பரிமாண அளவு $m \times n$ என்றால், B-ன் பரிமாண அளவு $n \times p$ என்க.

$\therefore$ AB-ன் பரிமாண அளவு $m \times p$.

BA உண்மையாவதற்கு, $p = m$ என்றாக வேண்டும்.

$\therefore$ AB-ன் பரிமாண அளவு : $p \times p$

$\therefore$ B-ன் பரிமாண அளவு : $n \times p$, A-ன் பரிமாண அளவு : $p \times n$ என்றால் BA-ன் பரிமாண அளவு : $n \times n$

$$AB = BA \implies AB\text{-ன் பருமன் (Size)} = BA\text{-ன் பருமன்}$$
$$\implies p \times p = n \times n$$
$$\implies n = p$$

$\therefore$ $m = p, n = p \implies A$-ன் பரிமாண அளவு : $p \times p$.

$\therefore$ B-ன் பரிமாண அளவு $= n \times p = p \times p$.

$\therefore$ A-ம், B-ம் ஒரே பரிமாண அளவுள்ள சதுர அணிகள்.

$\therefore$ சதுரமற்ற (non-square) அணிக்கு நேர்மாறு கிடையாது. ஓர் அணிக்கு நேர்மாறு இருக்க வேண்டுமானால் அது சதுர அணியாக இருத்தல்வேண்டும்.

7·5·8. தேற்றம்

ஓர் அணிக்கு ஒரே ஒரு நேர்மாறு அணிதான் உண்டு.

நிறுவல்

அணி A-ன் நேர்மாறு அணி B என்க.

முடியுமானால், A-ன் மற்றொரு நேர்மாறு C என்க.

வரை இலக்கணப்படி,

A-ன் நேர்மாறு B என்பதால், $AB = BA = I$

$$\Longrightarrow CAB = C(AB) = C(I) = C$$

A-ன் நேர்மாறு C என்பதால், $CA = AC = I$

$$\Longrightarrow CAB = (CA)B = IB = B$$

$\therefore \quad CAB = C = B \Longrightarrow B = C$

$\therefore \quad B$-ம், C-ம் வெவ்வேறு அல்ல.

$\therefore \quad A$ அணிக்கு ஒரே ஒரு நேர்மாறுதான் உண்டு.

7·5·9. தேற்றம்

ஒரு சதுர அணி A-க்கு நேர்மாறு இருக்க வேண்டுவதற்கு $|A| \neq 0$ என்பது வேண்டிய (necessary), போதிய (sufficient) நிபந்தனை (condition) ஆகும்.

(குறியீட்டு முறையில், $\Longleftrightarrow$ என்பது வேண்டிய, போதிய என்பதைக் குறிக்கும். அதாவது $\Longrightarrow$ என்பது 'வேண்டிய' என்பதையும், $\Longleftarrow$ என்பது 'போதிய' என்பதையும் குறிக்கும்.)

நிறுவல்

பாகம் 1 ($\Longrightarrow$)

சதுர அணியின் நேர்மாறு A என்க: தற்கோள்.

வ. இ. படி, $AB = I$

$$\Longrightarrow |AB| = |I|$$

$$\Longrightarrow |A|\,|B| = |I| = 1$$

$$\Longrightarrow |A| \neq 0.$$

பாகம் 2 ($\Longleftarrow$)

A ஒரு சிறப்பில்லா அணி என்க: தற்கோள்.

அதாவது $|A| \neq 0$ என்க.

சேர்ப்பு அணியின் பண்புப்படி (பார்க்க: 7·5·5),

$$A \,.\, adj\, A = adj\, A \,.\, A = |A|\, I$$

$|A| \neq 0$ என்பதால், இந்தச் சமன்பாடுகளை, $\dfrac{1}{|A|}$ எண்ணியால் பெருக்கலாம்.

$$\therefore \quad A \cdot \frac{adj\, A}{|A|} = \frac{adj\, A}{|A|} \cdot A = \frac{|A|}{|A|} I = I$$

∴ ஒரு சதுர அணியின் நேர்மாற்றின் வ.இ.படி,

$\dfrac{1}{|A|}\, adj$ A என்பது A-ன் நேர்மாறு.

∴ A சதுர அணி, $|A| \neq 0 \implies A$-க்கு நேர்மாறு உண்டு.

∴ பாகங்கள் 1, 2 உண்மையென்பதால், தேற்றம் உண்மை.

மேற்கண்ட தேற்றத்தின் வாயிலாக, ஒரு சிறப்பில்லாச் சதுர அணியின் நேர்மாறு அணியைக் கண்டுபிடிக்கும் விதியை நிறுவியுள்ளோம். A, ஒரு சிறப்பில்லாச் சதுர அணி என்றால்,

$$A^{-1} = \frac{adj\, A}{|A|}.$$

உதாரணம்

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$-ன் நேர்மாற்றைக் கண்டுபிடி.

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$A^C = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}$$ என்றால்,

$\alpha_{11} = -1, \ \alpha_{12} = -(-8) = 8, \ \alpha_{13} = -5$

$\alpha_{21} = -(-1) = 1, \ \alpha_{22} = -6, \ \alpha_{23} = -(-3) = 3$

$\alpha_{31} = -1, \ \alpha_{32} = -(-2) = 2, \ \alpha_{33} = -1.$

$$A^C = \begin{bmatrix} -1 & 8 & -5 \\ 1 & -6 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\textit{adj } A = (A^C)^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 8 & -6 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A^{-1} = \frac{\textit{adj } A}{|A|} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 8 & -6 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -4 & 3 & -1 \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

7·6. ஒருபடிச் சமன்பாடுகளின் தீர்வு (Solution of Linear equations)

ஓர் அணியின் நேர்மாற்றைப் பயன்படுத்தி ஒருபடிச் சமன்பாடுகளை எப்படித் தீர்க்கலாம் என்று காண்போம். உதாரணமாக, x, y, z என்ற தெரியாத கணியங்களைக் கொண்ட கீழ்க் காணும்

$$x + 2y + 2z = 3$$

$$2x + 2y - z = -2$$

$$x - y + z = 4$$

என்ற மூன்று சமன்பாடுகளை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$ என்றால்,

மேற்கண்ட சமன்பாடுகளை $AX = B$ என்றெழுதுவோம்.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -13$$

$$A^C = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix},$$

$\alpha_{11} = 1, \alpha_{12} = -3,$
$\alpha_{13} = -4, \alpha_{21} = -4,$
$\alpha_{22} = -1, \alpha_{23} = 3,$
$\alpha_{31} = -6, \alpha_{32} = 5,$
$\alpha_{33} = -2.$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -4 & -1 & 3 \\ -6 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

$$adj\ A = (A^C)^T = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -6 \\ -3 & -1 & 5 \\ -4 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{adj\ A}{|A|} = -\frac{1}{13}\begin{bmatrix} 1 & -4 & -6 \\ -3 & -1 & 5 \\ -4 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{13} & \frac{4}{13} & \frac{6}{13} \\ \frac{3}{13} & \frac{1}{13} & -\frac{5}{13} \\ \frac{4}{13} & -\frac{3}{13} & \frac{2}{13} \end{bmatrix}$$

$$AX = B \implies A^{-1}\ A\ X = A^{-1}\ B$$

$$\implies (A^{-1}A)\ X = A^{-1}\ B$$

$$\implies IX = A^{-1}\ B$$

$$\implies X = A^{-1}\ B.$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{13} & \frac{4}{13} & \frac{6}{13} \\ \frac{3}{13} & \frac{1}{13} & -\frac{5}{13} \\ \frac{4}{13} & -\frac{3}{13} & \frac{2}{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(-\frac{1}{13} \times 3\right) + \left(\frac{4}{13} \times -2\right) + \left(\frac{6}{13} \times 4\right) \\ \left(\frac{3}{13} \times 3\right) + \left(\frac{1}{13} \times -2\right) + \left(-\frac{5}{13} \times 4\right) \\ \left(\frac{4}{13} \times 3\right) + \left(-\frac{3}{13} \times -2\right) + \left(\frac{2}{13} \times 4\right) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-3-8+24}{13} \\ \frac{9-2-20}{13} \\ \frac{12+6+8}{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$\therefore \quad x = 1, \quad y = -1, \quad z = 2.$

7·7. அணியின் நேர்மாற்றின் பண்புகள்

7·7·1. தேற்றம்

A என்பது சிறப்பில்லாச் சதுர அணி என்றால்,

$AB = [0] \Longrightarrow B = [0],$

அதாவது, சிறப்பில்லா அணி பூச்சிய வகுப்பான் அல்ல.

நிறுவல்

A சிறப்பில்லா அணி $\Longrightarrow$ A^{-1} இருக்கிறது ;

$$A^{-1}(AB) = (A^{-1}A)B = IB = B$$

$$A^{-1}(AB) = A^{-1}[0] \quad = [0]$$

$$\therefore \quad B = [0]$$

இதுபோல், B சிறப்பில்லாச் சதுர அணி, $AB = [0] \Longrightarrow$ $A = [0]$ (நிறுவுக !)

7·7·2. தேற்றம்

A என்பது சிறப்பில்லாச் சதுர அணி என்றால் $(A^{-1})^{-1} = A$.

நிறுவல்

A-ன் நேர்மாறு A^{-1} என்பதால், $A^{-1}A = I$ ... (1) வ.இ.

A-ன் நேர்மாறு B என்க.

$\therefore$ வ.இ. படி, $BA^{-1} = I$ ... (2)

சமன்பாடு (1) ஐ B ஆல் முன்னால் பெருக்கினால்,

$$BA^{-1}A = BI$$

$$(BA^{-1})A = BI$$

$$IA = BI$$

$$A = B \quad \therefore \quad A = (A^{-1})^{-1}$$

7·7·3. தேற்றம்

அணிகள் A, B, AB — இவற்றுக்கு நேர்மாறுகள் உண்டானால், $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

இதற்கு 'நேர்மாறு பெருக்கத்தின் முன் பின்னுதல் விதி' என்பது பெயர்.

நிறுவல்

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1}$$
$$= AIA^{-1}$$
$$= AA^{-1} \quad \therefore \; AI = A.$$
$$= I$$

இதுபோல், $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B$

$$= B^{-1}IB = B^{-1}B = I$$

$\therefore \; (AB)(B^{-1}A^{-1}) = (B^{-1}A^{-1})AB = I$

$\therefore$ AB-ன் நேர்மாறு $B^{-1}A^{-1}$ (வ.இ.)

$\therefore \; (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$

7·7·4. கிளைத் தேற்றம்

$A, B, C, \ldots, F$ என்ற அணிகளுக்கு **நேர்மாறுகள்** உண்டானால்,

$(ABC \ldots F)^{-1} = F^{-1} \ldots C^{-1}B^{-1}A^{-1}.$

இது மேற்கண்ட தேற்றத்தின் விரித்தல் (Extension). (நிறுவுக !)

7·7·5. தேற்றம்

A-க்கும், A^T-க்கும் நேர்மாறுகள் உண்டானால்,

$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

நிறுவல்

$A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T$ (அணிகள் பெருக்கத்தின் இடமாற்றம் வ.இ.)

$= (I)^T$ (நேர்மாற்றின் வ.இ.)

$= I$

இதுபோல்,

$$(A^{-1})^T A^T = (A A^{-1})^T$$
$$= (I)^T$$
$$= I$$

$$A^T (A^{-1})^T = (A^{-1})^T A^T = I \Longrightarrow (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

(நேர்மாற்றின் வ.இ.)

7·7·6. தேற்றம்

A-க்கு நேர்மாறு உண்டு, c பூச்சியமற்ற மாறிலி

$\Longrightarrow$ cA-க்கு நேர்மாறு உண்டு, $(cA)^{-1} = c^{-1} A^{-1}$.

நிறுவல்

A-க்கு நேர்மாறு உண்டு $\Longrightarrow$ A சிறப்பில்லா அணி

A சிறப்பில்லா அணி, $c \neq 0$ $\Longrightarrow$ cA சிறப்பில்லா அணி.

$\Longrightarrow$ cA-க்கு நேர்மாறு உண்டு.

$$(cA)(c^{-1} A^{-1}) = c\, c^{-1} (A A^{-1})$$
$$= 1 I$$
$$= I$$

$$(c A)(C^{-1} A^{-1}) = (c^{-1} A^{-1})(c A) = I$$
$$\Longrightarrow (c A)^{-1} = c^{-1} A^{-1}$$

7.7·7. மாதிரிக் கணக்குகள்

1. $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$-ன் பெருக்கலின் நேர் மாற்றைக் கண்டுபிடி,

விடை

$$|A| = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$= 1 \neq 0$

$\therefore$ A-க்கு நேர்மாறு உண்டு.

$$A^C = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$$ என்க.

$\alpha_{11} = \cos\theta$; $\alpha_{12} = -\sin\theta$; $\alpha_{21} = \sin\theta$; $\alpha_{22} = \cos\theta$

$$A^C = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ adj\ A = (A^C)^T = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ A^{-1} = \frac{adj\ A}{|A|} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

2. $\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$ -ன் பெருக்கலின் நேர்மாறு என்ன?

விடை

$$det\ A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$$

$= 0$

$\therefore$ A என்பது ஒரு சிறப்பு அணி.

$\therefore$ A-க்கு நேர்மாறு இல்லை,

3. [வ. இ· $A\ A^{-1} = I$ என்றால் A^{-1} என்பது A-ன் 'வலது பெருக்கல் நேர்மாறு' எனப்படும்.

$A^{-1}\ A\ I$ என்றால் A^{-1} என்பது A-ன் 'இடது பெருக்கல் நேர்மாறு' எனப்படும்.]

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$ -ன் இடது பெருக்கல் நேர்மாற்றைக் காண்.

A-க்கு வலதுபெருக்கல் நேர்மாறு கிடையாது என்று காண்பி.

விடை

A-ன் இடது பெருக்கல் நேர்மாறு,

A-ன் பரிமாண அளவு : 3×2

$A^{-1}A$ இருக்கவேண்டுமானல், A^{-1}-ன் பரிமாண அளவு $m\times 3$ ஆக இருக்கவேண்டும். $A^{-1}A$-ன் பரிமாண அளவு $m \times 2$.

வ•இ•படி, $A^{-1}A = I$ என்பதால், I என்பது ஒரு சதுர அணி.

$\therefore \quad m = 2.$

$\therefore \quad A^{-1}$ன் பரிமாண அளவு : 2×3,

$$\therefore \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

வ•இ.படி

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a+3b & a+4b \\ d+3e & d+4e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$a + 3b = 1, \quad a + 4b = 0 \Longrightarrow a = 4, \quad b = -1$

$d + 4e = 1, \quad d + 3e = 0 \Longrightarrow d = -3, \; e = 1$

$\therefore$ c-ம், f-ம் எவையேனும் இரு எண்ணிகள்.

∴ இடது பெருக்கல் நேர்மாறு

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & e \\ -3 & -1 & f \end{pmatrix}$$

A-ன் வலது பெருக்கல் நேர்மாறு A^{-1} என்க.

$A\,A^{-1} = I$, A-ன் பரிமாண அளவு : 3×2.

A^{-1}-ன் ,, ,, : $2 \times p$.

∴ I-ன் ,, ,, : $3 \times p$.

I, சதுர அணி என்பதால், $p = 3$.

∴ A^{-1}-ன் பரிமாண அளவு : 2×3.

∴ $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ என்க.

வ. இ. படி,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a+e & b+c & c+f \\ 3a+4d & 3b+4e & 3c+f \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

இது ஒரு சமன்பாடு ஆகாது. ஏனெனில் இடப்பக்க அணியில் மூன்றுவது நிரையின் கடைசி உறுப்பு $= 0 \neq 1 =$ வலப் பக்க ஒருமை அணியின் மூன்றுவது நிரையின் கடைசி உறுப்பு.

4. $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ என்ற அணிகளைக் கொண்டு $(A\,B)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1}$ என்ற தேற்றத்தைச் சரி பார்.

விடை

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad \therefore \quad \det A = 12-10 = 2 \neq 0$$

$\therefore \quad A^{-1}$ உண்டு.

$$A^C = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \quad \therefore \quad adj\ A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{adj\ A}{det\ A} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{5}{2} & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \ | B | = 2-0 = 2 \neq 0$$

$\therefore \quad B^{-1}$ உண்டு.

$$B^C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \therefore \quad adj\ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{adj\ B}{| B |} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad B^{-1} A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{5}{2} & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

$$A\,B = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$|A\,B| = 16 - 12 = 4 \neq 0 \quad \therefore \quad (A\,B)^{-1}$ உண்டு.

$$(A\,B)^{C} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad adj\ AB = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(A\,B)^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -0 \\ -\frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad (A\,B)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1};$$

5. A சிறப்பில்லா அணி, $A\,B = A\,C \Longrightarrow B = C$ என நிறுவுக. (இதற்கு அணிகளின் 'அடித்தல் விதி' (cancellation law) என்பது பெயர்,)

விடை

A சிறப்பில்லா அணி $\Longrightarrow A^{-1}$ இருக்கிறது.

$A^{-1}\,(A\,B) = A^{-1}\,(A\,C)$

$(A^{-1}A)B = (A^{-1}A)\,C$ (அணிகள் பெருக்கல் சேர்ப்பு விதி உடையது.)

$I\,B = I\,C$

$\Longrightarrow B = C.$

6. ஒரு சிறப்பில்லாச் சமச்சீர் அணியின் பெருக்கலின் நேர் மாறும், சமச்சீர் அணியே எனக் காண்பி.

விடை

A சிறப்பில்லா அணி $\Longrightarrow A^{-1}$ இருக்கிறது.

$$\therefore \quad A^{-1} A = I = (I)^T = (AA^{-1})^T = (A^{-1})^T A^T = (A^{-1})^T A$$

(A சமச்சீர் அணி $\Longrightarrow A^T = A$)

$\therefore \quad A^{-1} A = (A^{-1})^T A \Longrightarrow A^{-1} = (A^{-1})^T$ (மேற்கண்ட 5 ஆம் கணக்குப்படி)

$\Longrightarrow A^{-1}$ ஒரு சமச்சீர் அணி.

7. $A B = B A \Longrightarrow A^{-1} B^{-1} = B^{-1} A^{-1}$ எனக் காண்பி.

விடை

$$A B = B A$$
$$\Longrightarrow (A B)^{-1} = (B A)^{-1}$$
$$\Longrightarrow B^{-1} A^{-1} = A^{-1} B^{-1},$$

8. $A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$ என்பதைக் கொண்டு

$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ என்ற உண்மையைச் சரிபார்.

விடை

$$A^T = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \quad \therefore \quad |A^T| = 36 - 24 = 12 \neq 0$$

$\therefore$ $(A^T)^{-1}$ இருக்கிறது.

$$(A^T)^C = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}$$

$$adj\ A^T = \begin{pmatrix} 6 & -8 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \therefore (A^T)^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 6 & -8 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 8 & 6 \end{pmatrix} \qquad \therefore \quad |A| = 36 - 24 = 12 \neq 0$$

$$A^C = \begin{pmatrix} 6 & -8 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$adj\ A = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -8 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$(A^{-1})^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

7·8· ஓர் அணியின் தொடக்க நிரை நிரல் மாற்றங்கள்

(Elementary row and column transformations of a matrix)

ஒருங்கமை ஒருபடிச் சமன்பாடுகளைச் சுலபமாகத் தீர்க்க, அணியின் தொடக்க நிரல், நிரை மாற்றங்கள் பெரிதும் பயன் படுகின்றன.

7·8·1. மூன்று வகை மாற்றங்கள்

(Three types of transformations.)

ஓர் அணியில்,

வகை 1

எவையேனும் இரு நிரைகளை(நிரல்களை)ப் பரிமாற்றம் செய்தல்.

வகை 2

ஒரு குறிப்பிட்ட நிரையில் (நிரலில்) உள்ள எல்லா உறுப்பு களையும் ஒரு பூச்சியமற்ற எண்ணியால் பெருக்குதல் அல்லது வகுத்தல்

வகை 3

எவையேனும் இரு நிரை (நிரல்) களைத் தேர்ந்தெடு. ஒரு நிரை யின் (நிரலின்) எல்லா உறுப்புகளையும் யாதேனும் ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணியால் பெருக்கு. இப்படிக் கிடைத்த புது உறுப்புகளை, உறுப்புக்கு உறுப்பு மற்ற நிரையின் (நிரலின்) உறுப்புகளுடன் கூட்டுதல்.

இந்த மூன்று வகைத் தொடக்க நிரை நிரல் மாற்றங்களின் விளைவாவது : ஒருங்கமை ஒருபடிச் சமன்பாடுகள் தொகுதி யொன்றைக் குறிக்கும் அணிச் சமன்பாட்டின் மீது மேற்குறித்த மாற்றங்களைப் பயன்படுத்தினால், கிடைக்கும் புதிய அணியானது, கொடுத்த சமன்பாடுகளுக்குச் சமநிலைச் சமன்பாடுகள் தொகுதியைக் குறிக்கும்.

7·8·2. உதாரணம்

$$\left.\begin{array}{r} x+y+2z=1 \\ 2x-y-z=1 \\ x+y-z=4 \end{array}\right\} \quad (I)$$

என்ற ஒருங்கமைச் சமன்பாட்டுத் தொகுதியை எடுத்துக் கொள்.

(I) ஐ $\qquad A \qquad\qquad X = B$

அதாவது,
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (II)$$

என்ற அணிச் சமன்பாட்டினால் குறிக்கலாம்.

(I)-ன் தீர்வுகள், $x = 1, \quad y = 2, \quad z = -1$

(II)-ல் கீழ்க் கண்ட தொடக்க மாற்றங்களைச் செய்.

வகை 1

முதல் நிரையையும், மூன்றும் நிரையையும் பரிமாற்றம் செய்.

கிடைப்பது

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

வகை 2

இரண்டாம் நிரை உறுப்புகளை (—3) ஆல் பெருக்கு.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

வகை 3

முதல் நிரை உறுப்புகளை 2 ஆல் பெருக்கி, இரண்டாம் நிரை உறுப்புகளுடன் கூட்டுக.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -4 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

இந்த அணிச் சமன்பாடு,

$$\left.\begin{aligned} x + y - z &= 4 \\ -4x + 5y + z &= 5 \\ x + y + 2z &= 1 \end{aligned}\right\} \quad (III)$$

என்ற சமன்பாடுகளைக் குறிக்கும். இவற்றின் தீர்வுகளும் $x = 1$, $y = 2$, $z = -1$ என்பன.

ஆகவே (III) ஆனது (I)-ன் சமநிலைத் தொகுப்பு.

7·8·3. தொடக்க அணிகள் (Elementary Matrices)

ஓர் அணியின்மீது தொடக்க மாற்றங்களின் விளைவை, கொடுத்த அணியின் இடப் பக்கத்தில் தகுந்த பெருக்கலுக்கு உகந்த அணியை எழுதி, இவ்விரு அணிகளையும் பெருக்கினால், அடையலாம். இம்மாதிரி அணிகளுக்குத் தொடக்க அணிகள் என்பது பெயர். இவை சிறப்பில்லா அணிகளாக இருக்கும். கொடுத்த அணியை ஒரு தொடக்க அணியால் முன்னால் பெருக்குதல் ஒரு தொடக்க மாற்றத்தின் விளைவு ஆகும்.

உதாரணம்

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

என்ற அணியில் முதல் நிரையையும், மூன்றும் நிரையையும் பரிமாற்றம் செய்வோம்.

$$\text{கிடைப்பது, } B = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

இதையே, A ஐ

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ஆல், முன் பெருக்குவோம்.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = B$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

என்பது முதல் நிரையையும், மூன்றும் நிரையையும் பரிமாற்றும் தொடக்க அணியாகும்.

இதுபோல், முதல் நிரையையும், இரண்டாம் நிரையையும் பரிமாற்றம் செய்யும் தொடக்க அணியாவது

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

இரண்டாம் நிரையையும், மூன்றும் நிரையையும் பரிமாற்றம் செய்யும் தொடக்க அணி

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

இரண்டாவது வகை: நிரை தொடக்க மாற்றத்தை விளைவிக்கும் தொடக்க அணிகள்

$$\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

என்பனவாம்.

மூன்றுவது வகை நிரை தொடக்க மாற்றத்தை விளைவிக்கும் தொடக்க அணிகள்,

$$\begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \end{bmatrix}$$

7·8·4. ஒரு பயனுள்ள அழகிய தேற்றம்

தொடக்க நிரை மாற்றங்களின் ஒரு தொகுப்பு ஆனது, A என்ற அணியை, ஒருமை அணி I-க்கு மாற்றம் செய்தால், அதே தொடக்க நிரை மாற்றங்களின் தொகுப்பு ஆனது I ஐ A^{-1}-க்கு மாற்றம் செய்வன.

நிறுவல்

A ஐ முன்னால் பெருக்கும், தொடக்க மாற்றங்களை விளைவிக்கும் தொடக்க அணிகள், $E_1, E_2, \ldots\ldots, E_p$ என்க.

$E_p \cdot E_{p-1} \ldots\ldots E_2 \cdot E_1 = E$ என்க.

$\therefore \quad EA = I$ (தேற்றத்தின் தற்கோள்)

$(EA)\,A^{-1} = I\,A^{-1}$

$E\,(AA^{-1}) = I\,A^{-1}$

$$EI = I\,A^{-1}$$

$$EI = A^{-1}$$

இந்தச் சமன்பாடு தெரிவிப்பது ;

'I ஐ, $E_p \ldots\ldots E_1$ ஆல் முன்னுல் பெருக்க, நமக்குக் கிடைப்பது A^{-1}'. ஆனுல் $EI = E$. $\therefore\; E = A^{-1}$

$\therefore$ தொடக்க அணிகளின் பெருக்கம் $= A^{-1}$

$\therefore$ I ஐ A^{-1}க்கு மாற்றம் செய்த அதே தொடக்க நிரை மாற்றங்கள்தாம் A ஐ I-க்கு மாற்றம் செய்தன.

இந்தத் தேற்றத்தினுல் ஓர் அணியின் நேர்மாற்றைக் கண்டு பிடிக்கலாம்.

உதாரணமாக,

$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ என்ற அணியின் நேர்மாற்றைக் காணலாம்.

$\det A = 20 - 6 = 14 \neq 0$. $\therefore$ A^{-1} இருக்கிறது. தேற்றத்தின்படி, ஒருமை அணி I தோன்றும் வரை A-ன் மீது தொடக்க மாற்றங்களைச் செயல்படுத்து. இந்தத் தொடக்க மாற்றங்களைக் குறிக்கும் தொடக்க அணிகளின் பெருக்கம்தான் A^{-1} ஆகும்.

முதல் நிரையின் உறுப்புகளை $-\frac{3}{5}$ ஆல் பெருக்கி, இரண்டாம் நிரையின் உறுப்புகளுடன் கூட்டு. இந்தத் தொடக்க மாற்றத்திற்கு ஏற்ற தொடக்க அணி $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{3}{5} & 1 \end{bmatrix}$ என்பதாகும்.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{3}{5} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & \frac{14}{5} \end{bmatrix}$$

முதல் நிரையின் உறுப்புகளை $\frac{1}{5}$ ஆல் பெருக்கு.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{3}{5} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{14}{5} \end{bmatrix}$$

இரண்டாம் நிரையின் உறுப்புகளை $\frac{5}{14}$ ஆல் பெருக்கு.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{5}{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{3}{5} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

இரண்டாம் நிரையின் உறுப்புகளை $-\frac{2}{5}$ ஆல் பெருக்கி, முதல் நிரையின் உறுப்புகளுடன் கூட்டு.

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{5}{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{3}{5} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

அதாவது $(E_4 \quad E_3 \quad E_2 \quad E_1)\, A = I$

$\therefore \quad A^{-1} = E_4 \quad E_3 \quad E_2 \quad E_1$

$$E_4\, E_3 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{5}{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{7} \\ 0 & \frac{5}{14} \end{bmatrix}$$

$$E_4\, E_3\, E_2 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{7} \\ 0 & \frac{5}{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{7} \\ 0 & \frac{5}{14} \end{bmatrix}$$

$$E_4\, E_3\, E_2\, E_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{7} \\ 0 & \frac{5}{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{3}{5} & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{3}{14} & \frac{5}{14} \end{bmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

7·9. கௌஸ்—ஜோர்டான் (Gauss—Jordan) முறையில் அணியின் நேர்மாறு கண்டு பிடித்தல்

இந்த முறையில் A என்ற அணியின் நேர்மாற்றைக் காண வேண்டின், A-ன் பக்கத்தில் ஒருமை அணி I ஐ $A \mid I$ என்ற 'பிரிவு முறை' (Block Method) யில் எழுதித் தொடக்க மாற்றங்களைச் செலுத்தி, $I \mid B$ என்ற பிரிவு முறையில் $A \mid I$ ஐ மாற்றம் செய்தால், B என்பது A-ன் நேர்மாறு ஆகும். உண்மையாகப் பார்த்தால், மேற்கண்ட உதாரணத்தின் (தத்துவம்தான்) கருத்து தான் இங்கே பயன் படுத்தப்படுகிறது. $I \mid A$ என்றவாறு எழுதி, $B \mid I$ என்று தோற்றுவித்தாலும் சரியே. அப்பொழுதும், B என்பது A-ன் அதே நேர்மாறுதான்.

உதாரணமாக, 7·8·4-ன் உதாரணத்தையே இங்கு எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\text{-ன் நேர்மாறு என்ன ?}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$ என்பதைப் 'பெரிதாக்கிய அணி' (Augmented Matrix) என்போம்.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 5 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{1}{5}R_1]{} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-3R_1 + R_2]{} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{14}{5} & -\frac{3}{5} & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{5}{14}R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{14} & \frac{5}{14} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-\frac{2}{5}R_2 + R_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{14} & \frac{5}{14} \end{array}\right]$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{3}{14} & \frac{5}{14} \end{bmatrix} = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

7·9·1. கௌஸ்—ஜோர்டான் முறையில் ஒருங்கமை ஒருபடிச் சமன்பாடுகளின் தீர்வு காணல்

$AX = B$ என்ற அணியின் சமன்பாடு ஒருங்கமை ஒருபடிச் சமன்பாடுகளைக் குறித்தால்,

(A/B) என்ற பெரிதாக்கிய அணி (Augmented Matrix)யைத் தொடக்க மாற்றங்களால் (I/C) என்று மாற்றினால், C என்பது தீர்வுகளைத் தரும்.

உதாரணமாக,

$$\left.\begin{aligned} 2x + y - z &= 4 \\ x + 2y + 2z &= 6 \\ x - y - 2z &= -1 \end{aligned}\right\}$$

என்ற சமன்பாடுகளைத் தீர்.

பெரிதாக்கிய அணியாவது,

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{\tfrac{1}{2}R_1} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(-1)\,\overrightarrow{R_1} + R_3 \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & 4 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -3 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{\tfrac{2}{3}R_2} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}R_2 + R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{3}{2}R_2 + R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{4}{3}R_3 + R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{5}{3}R_3 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore \quad x = 2, \quad y = 1, \quad z = 1.$

7·10. அணித்தரம் (Rank of a Matrix)

7·10·1. வரை இலக்கணம்

ஓர் எண் r என்பது, ஓர் அணியைப் பொறுத்து,

(i) பூச்சிய மதிப்பு அற்ற, r பரிமாண அளவுள்ள சிறு பகுதி (Minor) அணிக் கோவை, அணியில் குறைந்த பட்சம் ஒன்ருவது இருக்கிறது;

(ii) $(r+1)$ பரிமாண அளவுள்ள ஒவ்வொரு சிறு பகுதி அணிக் கோவையும் பூச்சிய மதிப்பு உள்ளது

என்ற இரு நிபந்தனைகளையும் நிறைவேற்றினுல், r ஐ அணியின் அணித்தரம் என்போம்.

ஆதலால், அணியின் உறுப்புகளினின்று பெறப்படும் மீப் பெரிய, பூச்சியமற்ற அணிக்கோவையின் பரிமாண அளவுதான் அணித்தரமாகும்.

இந்த வரையறை, சதுர அணிகளுக்கும், சதுரமற்ற, செவ்வக அணிகளுக்கும் பொருந்தும். ஆதலால், பூச்சியமற்ற அணி A ஆனது, (i) அணியின் r-சதுர சிறுபகுதி அணிக் கோவைகளில் (அதாவது, r பரிமாணமுள்ள) குறைந்த பட்சம் ஒன்ருவது பூச்சியமற்றதாய் இருக்கவேண்டும். (ii) அதே சமயம், $(r+1)$ சதுர, அல்லது, இன்னும் பெரிய சிறுபகுதி அணிக் கோவை பூச்சியமாக வேண்டும், என்ற நிபந்தனைகளை நிறைவேற்றினுல், A-ன் தரம் r என்போம்.

உதாரணம்

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 7 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$ என்ற அணியின் தரம் என்ன ?

விடை

A-ன் மீப்பெரிய அணிக் கோவையே $\det A$ (பரிமாண அளவு : 3)

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 7 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

∴ A-ன் உறுப்புகளால் ஆகிய பரிமாண அளவு 2 உள்ள அணிக் கோவைகளை ஆய்வோம்.

$$\mathcal{A}_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 8 = -3 \neq 0$$

∴ கொடுக்கப்பட்ட அணி A ஆனது

(i) அணியின் 2×2 அணிக் கோவைகளுள் ஒன்று பூச்சிய மற்றது.

(ii) 3×3 அணிக் கோவையான $\det A = 0$

∴ A-ன் அணித்தரம் 2

7·10·2. வரை இலக்கணம்

n பரிமாண அளவுள்ள சதுர அணி A-ன் தரம் $r = n$ என்றால், A-க்குச் சிறப்பில்லா அணி என்பது பெயர்.

அணித்தரத்தின் வ.இ.படி, $\det A \neq 0$

7·10·3. வரை இலக்கணம்

$n \times n$ சதுர அணி A-ன் தரம் n அல்ல என்றால், A-க்குச் சிறப்பு அணி என்பது பெயர்.

∴ $\det A = 0$

உதாரணங்கள்

1. $$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$ என்க.

D என்பது சதுர அணி.

$$\det D = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n \neq 0$$

$\therefore$ D-ன் தரம் $= n$

$\therefore$ D ஒரு சிறப்பில்லா அணி.

2. சதுரமற்ற அணிகளுக்கும் தரம் உண்டு.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

A-ன் பரிமாண அளவு 3×4. A-ல் 4 நிரல்கள் உண்டு. ஆனால் 4 நிரைகள் இல்லையே! ஆதலால் 4×4 அணிக்கோவை கிடையாது. $\therefore$ மீப்பெரிய அணிக்கோவையின் பரிமாண அளவு $= 3$

உதாரணமாக,

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(1-9) + 2(1-6) = -2 \neq 0$$

$\therefore$ A-ன் தரம் $= 3$

தொடக்க மாற்றங்கள் ஓர் அணியின் தரத்தை மாற்றுவதில்லை. இதனை நாம் இங்கு நிறுவ மாட்டோம்.

$\therefore$ தொடக்க மாற்றங்களால் ஓர் அணியை, பூச்சியங்கள் அதிகமாயுள்ள ஓர் அணியாக மாற்றினால், சுலபமாக அந்த அணியின் தரத்தைக் கண்டு பிடித்துவிடலாம். தொடக்க மாற்றங்களால் ஓர் அணியை A-லிருந்து B-க்கு மாற்றினால், A, B என்பவை சமநிலை அணிகள் (Equivalent Matrices) எனப்படுவன. B-ல் முக்கிய மூலை விட்டத்தின் மேலண்டை உள்ள உறுப்புகள் எல்லாம் 0 ஆக இருப்பின் நலம். சமநிலை அணிகள்

A ஐயும், B ஐயும், $A \sim B$ என்ற குறியீட்டால் எழுதுவது வழக்கம்.

7·10·4. உதாரணங்கள்

(1) $\begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -4 & -3 \\ 0 & 17 & -5 & -9 \end{bmatrix}$ என்ற அணியின் தரம் யாது?

விடை

(C_1, C_2, C_3, C_4 என்பவை முறையே முதலாவது, இரண்டாவது, மூன்ருவது, நான்காவது நிரல்களையும், R_1, R_2, R_3, R_4 என்பவை முறையே முதலாவது, இரண்டாவது, மூன்ருவது, நான்காவது நிரைகளையும் குறிக்கட்டும்.)

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & 2 \\ -3 & -4 & 4 & 3 \\ -9 & -5 & 17 & 0 \end{bmatrix}$$ (C_1, C_4), பரிமாற்றம் (C_2, C_3) பரிமாற்றம்

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -7 & -5 & 9 \\ -9 & -14 & -10 & 18 \end{bmatrix}$$ C_1 உடன் C_2 ஐக் கூட்டு. C_1 ஐ 3 ஆல் பெருக்கி, C_3 உடன் கூட்டு. C_1 ஐ 2 ஆல் பெருக்கி C_4 உடன் கூட்டு.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -9 & -14 & -10 & 18 \\ -3 & -7 & -5 & 9 \end{bmatrix}$$ R_2, R_3 பரிமாற்றம்.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -7 & -5 & 9 \end{bmatrix}$$

—2 ஆல் R_3 ஐப் பெருக்கி R_2 ஐக் கூட்டு.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -7 & -5 & 9 \end{bmatrix}$$

R_1 ஐ 3 ஆல் பெருக்கி R_2 உடன் கூட்டு.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -5 & 9 \end{bmatrix}$$

R_1 ஐ 3 ஆல் பெருக்கி R_3 ன் உடன் கூட்டு.

$$\sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -5 & 9 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

R_1 ஐயும், R_2 ஐயும் பரிமாற்றிய பின், R_2 ஐயும், R_3 ஐயும் பரிமாற்று.

இப்பொழுது பரிமாண அளவு 3 உள்ள ஒவ்வொரு சிறுபகுதி அணிக் கோவைக்கும் ஒரு பூச்சிய நிரை இருப்பதால், 3×3 அணிகள் பூச்சியமாகின்றன.

$$\begin{vmatrix} 0 & -7 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 7 \neq 0 \quad \text{என்பது பூச்சியமற்ற}$$

2×2 சிறுபகுதி அணிக் கோவை. அதாவது பரிமாண அளவு 2 உள்ள 'சிறு பகுதி தலை அணிக் கோவை' (leading minor).

$\therefore$ A-ன் தரம் 2.

உதாரணம் 2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -7 & 3 & -3 \\ 7 & 20 & -2 & 25 \\ 5 & -2 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$ என்ற அணியின்

தரம் காண்.

விடை

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & -7 & 3 & -3 \\ 7 & 20 & -2 & 25 \\ 4 & 5 & 1 & 10 \end{bmatrix}$$ R_1 ஐ (—1) ஆல் பெருக்கி R_3 உடன் கூட்டு.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -3 \\ 7 & 0 & -2 & 25 \\ 4 & 0 & 1 & 10 \end{bmatrix}$$ $(C_1 \times 1)$, $(C_3 \times 1)$, $(C_4 \times -1)$ ஆகிய பெருக்கங்களை C_2 உடன் கூட்டு.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -6 \\ 7 & 0 & -2 & 4 \\ 4 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$ $(C_1 \times -3)$ஐ C_4 உடன் கூட்டு.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 7 & 0 & -2 & -2 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$ C_4 ஐ (-2) ஆல் வகு.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 7 & 0 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad C_4 - C_3$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 7 & -2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C_2, C_3 \text{ பரிமாற்றம்}$$

3×3 அணிக் கோவைக்கு எப்படியும் ஒரு நிரல், பூச்சிய நிரல் ஆகும்.

$\therefore$ 3×3 அணிக் கோவையின் மதிப்பு 0.

ஆனால், ஒரு 2×2 அணிக் கோவை $\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 7+8 = 15 \neq 0.$

$\therefore$ A-ன் தரம் 2.

7·10·5. செங்குத்து அணி (Orthogonal Matrix)

தன்னுடைய நேர்மாற்றைப் பொறுத்து வரையறுக்கப்படுவது செங்குத்து அணி.

வ·இ. A என்ற அணி

(i) A ஒரு சதுர அணி

(ii) $A^{-1} = A^T$

என்ற நிபந்தனைகளுக்கு உட்பட்டால், A ஐச் 'செங்குத்து அணி' என்போம்.

உதாரணமாக,

$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ என்ற அணி செங்குத்து அணியாக இருக்க வேண்டுமானால், $ab - ba = 0$, $a^2 + b^2 = 1$ என்று காண்பி.

விடை

A ஒரு சதுர அணி. "செங்குத்து அணி"க்கான முதல் நிபந்தனை உறுதிப்பட்டது.

வரை இலக்கணத்தின் இரண்டாவது நிபந்தனைப்படி,

$$A^{-1} = A^T \Longrightarrow AA^{-1} = AA^T$$

$$\Longrightarrow I = AA^T$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ab - ba \\ ba - ab & b^2 + a^2 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow a^2 + b^2 = 1, ab - ba = 0$$

7·10·6. குறிப்பு: செங்குத்து அணியின் சிறப்பை 'ஆயத் தொலை வடிவ கணித' (Co-ordinate Geometry)-த்தில் காணலாம். முப்பரிமாண வெளியில் (3-dimensional Space) P என்ற புள்ளியின் கார்டீசியன் கூறுகள் x_1, x_2, x_3 என்க. அதாவது, $P(x_1, x_2, x_3)$. x_1, x_2, x_3 என்பவற்றை X-நிரல் வெக்டரின் உறுப்புகளாகக் கொள்ளலாம்.

$$\text{அதாவது } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

O என்பது 'ஆய மூலப் புள்ளி' (Origin) என்றால்,

$$OP^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1\ x_2\ x_3) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= X^T X$$

O ஐ நிலையாக வைத்து, அச்சுகளை மட்டும், O ஐப் பொறுத்துச் சுழற்றுவோம். பழைய நிலையில் இருந்த மாதிரியே புதிய நிலையிலும் அச்சுகள் செங்குத்தாகவே இருக்கவேண்டும்.

அதே புள்ளி P-ன் கூறுகள், அச்சுகளின் புதிய நிலையில், y_1, y_2, y_3 என்க.

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

என்க. 'கனவடிவ கணித' (Solid Geometry)த்தின்படி,

(l_1, m_1, n_1), (l_2, m_2, n_2), (l_3, m_3, n_3) என்பவை பழைய அச்சுகளைப் பொறுத்த, புதிய அச்சுகளின் 'திசைக் கிடக்கை' களானால் (Direction cosines),

$$y_1 = l_1 x_1 + m_1 x_2 + n_1 x_3$$

$$y_2 = l_2 x_1 + m_2 x_2 + n_2 x_3$$

$$y_3 = l_3 x_1 + m_3 x_2 + n_3 x_3$$

என்பவை தெளிபு.

$$A = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix}$$

எனில், மேற்குறித்த சமன்பாடுகளை

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_3 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

அதாவது $Y = A X$ என்ற அணிச் சமன்பாடாக எழுதலாம்.

புதிய கார்டீசியன் முறையில்,

$$OP^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = (y_1 \; y_2 \; y_3)\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$= Y^T Y$$

$$= (AX)^T (AX)$$

$$= (X^T A^T)(AX)$$

$$X^T (A^T A) X$$

ஆனல் $OP^2 = X^T X$

$$\therefore \quad X^T (A^T A) = X^T X \Longrightarrow A^T A = I \Longrightarrow A^T (AA^{-1}) = IA^{-1}$$

$$\Longrightarrow A^T I = IA^{-T} \Longrightarrow A^1 = A^{-1}$$

$$\therefore \quad A = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix}$$ என்பது வ.இ.படி

‘ செங்குத்து அணி ’ ஆகும்.

$$A^T A = I$$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} \sum_{r=1}^{3} l_r^2 & \sum_{r=1}^{3} l_r m_r & \sum_{r=1}^{3} l_r n_r \\ \sum_{r=1}^{3} l_r m_r & \sum_{r=1}^{3} m_r^2 & \sum_{r=1}^{3} m_y n_r \\ \sum_{r=1}^{3} l_r n_r & \sum_{r=1}^{3} m_r n_r & \sum_{r=1}^{3} n_r^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sum_{r=1}^{3} l_r^2 = \sum_{r=1}^{3} m_r^2 = \sum_{r=1}^{3} n_r^2 = 1 \\ \sum_{r=1}^{3} l_r m_r = \sum_{r=1}^{3} l_r n_r = \sum_{r=1}^{3} m_r n_r = 0 \end{array} \right.$$

இந்த ஆறு தொடர்புகளும் கன வடிவ கணிதத்தில் நமக்கு வழக்கமானவையே.

∴ செங்குத்து அணியானது நமக்கு மேற்கண்ட ஆறு தொடர்புகளையும் சுலபமாக அடைவதற்கு வழி கோலுகிறது.

இரு பரிமாண வெளியில், (Two dimenisonal space) அச்சுகளை, θ ஆரையன்கள் (θ-radians) அளவு சுழற்றினால்,

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = \quad x_1 \cos\theta + x_2 \sin\theta \\ y_2 = -x_1 \sin\theta + x_2 \cos\theta \end{array}\right\}$$ என்ற மாற்றங்கள் நமக்குக் கிடைக்கின்றன.

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$ என்றால்,

$$AA^T = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2\theta+\sin^2\theta & -\sin\theta\cos\theta + \sin\theta\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta+\cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta+\cos^2\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

∴ A என்பது செங்குத்து அணி.

7·10·7. அற்பத் தீர்வுகளும் (Trivial solutions), அற்பமற்ற தீர்வுகளும் (Non-trivial solutions)

$$\left.\begin{array}{l} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots\cdots + a_{1n} x_n = 0 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots\cdots + a_{2n} x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \cdots\cdots + a_{nn} x_n = 0 \end{array}\right\}$$

என்ற ஒருங்கமை ஒருபடிச் சமன்பாடுகள் தொகுதியின் வலப் பக்கத்தில் மாறிலிகள் எல்லாமே பூச்சியங்களாதலால், இத் தொகுதிக்குச் சமபடிச் சமன்பாடுகள் (homogeneous equations) தொகுதி என்பது பெயர். அணி சமன்பாட்டுக் குறியீட்டு முறையில் இத் தொகுதியை, $AX = 0$ என்று எழுதுவோம்.

இங்கே,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

$0 = [0]$

A என்பது சிறப்பில்லா அணி (non-singular matrix) யானால், $X = 0$ என்பது $AX = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வு ஆகும்.

$X = 0$ என்பதை 'அற்பத் தீர்வு' என்போம்.

அணியின் தரத்தைப் பற்றிப் படிக்கும்போது, $n \times m$ சிறப்பில்லா அணியின் தரம் n என்று பார்த்தோம்.

மேற்கண்ட கெழுக்கள் அணி A-ன் தரம் n என்றால் அற்பத் தீர்வு $X = 0$ ஆனது ஒரேமுறை என்பதுடன், A ஆனது சிறப்பில்லா அணியும் கூட.

தெரியாக் கணியங்கள் n எண்ணிக்கையைக் கொண்ட, m எண்ணிக்கையுள்ள சமபடிச் சமன்பாடுகள் தொகுதி

$AX = 0$ க்கு, A-ன் தரம் $< n$ என்றால்

$AX = 0$-க்குக் 'கணக்கில்லா அநேக (Infinitely many) அற்பமற்ற தீர்வுகள்' உண்டு.

$m = n$, A சதுர அணி என்றால், A சிறப்பு அணியாக இருந்தால்தான் ஓர் அற்பமற்ற தீர்வு உண்டு.

உதாரணங்கள்

1. $$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$ என்றால்,

$AX = 0$ என்ற அணிச் சமன்பாட்டைத் தீர்.

விடை

$AX = 0$ என்பதால் நமக்குக் கொடுத்திருப்பது, சமபடிச் சமன்பாட்டுத் தொகுதி.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

$\therefore$ A என்பது சிறப்பில்லா (non-singular) அணி.

$\therefore$ $AX = 0$ என்பதன் ஒரே தீர்வு $X = 0$ என்பதாகும்.

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ என்றால்,

$AX = 0$ என்ற அணிச் சமன்பாட்டைத் தீர்.

விடை

$AX = 0$ என்பது சமபடிச் சமன்பாட்டுத் தொகுதியைக் குறிக்கும்.

$\det A = 0$

$\therefore$ A என்பது சிறப்பு அணி.

$\therefore$ A-க்குக் கணக்கில்லா அநேக அற்பமற்ற தீர்வுகள் உண்டு.

சமபடிச் சமன்பாடுகளாவன:

$x_1 + x_3 = 0$ (i)

$x_2 - x_3 = 0$ (ii)

$x_1 + x_3 = 0$ (iii)

(i) $\Longrightarrow x_1 = -x_3$

$= -\alpha$ என்க (α என்பது யாதாவதொரு மாறிலி).

(ii) $\Longrightarrow x_2 = x_3 = \alpha$

$x_1 = -\alpha,\ x_2 = \alpha,\ x_3 = \alpha$

α, யாதாவதொரு மாறிலி என்பதால், கணக்கில்லா அநேக அற்பமற்ற தீர்வுகள் உண்டு.

7·11. அணியின் சிறப்பு மூலங்கள் (Characteristic roots, proper eigen values, latent roots)

A : n பரிமாண அளவுள்ள சதுர அணி.

X : பூச்சியமற்ற வெக்டர்கள்.

λ : எண்ணிகள்

என்றால், $AX = \lambda X$ என்ற அணிச் சமன்பாட்டை உறுதிப் படுத்தும் λ எண்ணிகளுக்குத் தீர்வு காணும் கணக்குக்குச் சிறப்பு மதிப்புக் கணக்கு, அல்லது ஐகன் மதிப்புக் கணக்கு என்பது பெயர்.

அணிச் சமன்பாட்டின் இரு பக்கங்களிலும் $-\lambda X$ ஐக் கூட்டினால்

$$AX + (-\lambda X) = \lambda X + (-\lambda X)$$

$$AX - \lambda X = [0]$$

$AX - \lambda I X = [0]$, I என்பது ஒருமை அணி.

$$(A - \lambda I) X = [0]$$

இந்தச் சமபடிச் சமன்பாட்டுத் தொகுதிக்கு,

det $(A - \lambda I) = 0$ என்றால் தான் (அதாவது $A - \lambda I$ என்பது சிறப்பு அணி) அற்பமற்ற தீர்வு உண்டு.

குறியீட்டு முறையில், $(A - \lambda I) X = [0]$-க்கு அற்பமற்ற தீர்வு உண்டு $\Longleftrightarrow |A - \lambda I| = 0$.

குறிப்பு : A ஒரு $n \times n$ அணி.

$A - \lambda I$-ம் $n \times n$ அணி.

$\therefore$ $(A - \lambda I) X = 0$-க்கு அற்பமற்ற தீர்வு உண்டு.

$\Longleftrightarrow$ $A - \lambda I$-ன் தரம் $< n$

$\Longleftrightarrow$ $|A - \lambda I| = 0$.

$$a_{11}\,x_1 + \dots + a_{1n}\,x_n = 0$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$a_{n1}\,x_1 + \dots + a_{nn}\,x_n = 0$$ என்க.

$$|A - \lambda I| = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

என்றால்தான் அற்பமற்ற தீர்வு $x \neq 0$ இருக்கிறது.

இந்தச் சமன்பாடு, அதாவது, $|A - \lambda I| = 0$-க்குச் 'சிறப்புச் சமன்பாடு' (characteristic equation) என்பது பெயர்.

இந்தச் சமன்பாடு λ-ல் n அடுக்குள்ள சமன்பாடு.

சிறப்புச் சமன்பாட்டின் மூலங்களுக்குச் சிறப்பு மூலங்கள் (characteristic roots) அல்லது ஐகன் மதிப்புகள் (eigen values) என்பது பெயர்.

det $(A - \lambda I)$-ன் விரித்தலுக்குச் சிறப்புப் பல்லுறுப்பு (characteristic polynomial) என்பது பெயர்.

ஒவ்வொரு சிறப்பு மூலம் λ-க்கும் ஏற்ற, $A\bar{X} = \lambda X$ அணிச் சமன்பாட்டின் அற்பமற்ற தீர்வு x-க்குச் 'சிறப்பு வெக்டர்' (latent vector) அல்லது 'ஐகன் வெக்டர்' (eigen vector) அல்லது 'துருவம்' (pole) என்பது பெயர்.

குறிப்பு : 'Eigen' என்பது ஜெர்மன் சொல்.

இதன் பொருள் 'தனித்தன்மை உடைய', அல்லது 'சொந்தமான', 'சிறப்பியல்பு உடைய' என்பதாகும்.

7·11·1. வரை இலக்கணம்

1. A என்பது $n \times n$ சதுர அணி என்க. எண்ணி λ என்பது A-ன் ஐகன் மதிப்பு, $\Longleftrightarrow$ $A - \lambda I$ ஒரு சிறப்பு அணி.

2. x என்பது பூச்சியமற்ற வெக்டர் என்க.

x என்பது ஐகன் மதிப்பு λ-னுடைய அல்லது λ உடன் இணைந்த ஐகன் வெக்டர் $\Longleftrightarrow (A - \lambda I)X = 0$, அதாவது $AX = \lambda X$.

7·11·2 மாதிரிக் கணக்குகள்

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ என்றால்

A-ன் சிறப்புப் பல்லுறுப்பு, ஐகன் மதிப்புகள், இவற்றுக்கு இணைந்த ஐகன் வெக்டர்கள் ஆகியவற்றைக் காண்.

விடை

A-ன் ஐகன் மதிப்பு λ என்றால் $|A - \lambda I| = 0$.

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)[(2-\lambda)(1-\lambda) - 1] - 1[1 - \lambda - 2] + 2[1 - 2(2-\lambda)]$$

$$= -\lambda^3 + 4\lambda^2 + \lambda - 4$$

இதுதான் A-ன் சிறப்புப் பல்லுறுப்பு.

$$-\lambda^3 + 4\lambda^2 + \lambda - 4 = 0 \Longrightarrow (\lambda - 4)(1 - \lambda^2) = 0$$

$$\Longrightarrow \lambda = 4, 1, -1$$

$\therefore$ A-ன் ஐகன் மதிப்புகள் : 4, 1, $-$1.

ஐகன் மதிப்பு 4 உடன் இணைந்த ஐகன் வெக்டர் $(A - 4I)X = 0$ என்பதன் தீர்வு.

அதாவது,

$$\begin{bmatrix} 1-4 & 1 & 2 \\ 1 & 2-4 & 1 \\ 2 & 1 & 1-4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = [0]$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \text{ ஆனதால்}$$

இந்தச் சமபடிச் சமன்பாட்டுக்குக் கணக்கற்ற அற்பமற்ற அநேக தீர்வுகள் உண்டு.

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \underset{\sim}{-2\, R_2 + R_3} \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\frac{1}{5} R_3} \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{-4\, R_3 + R_1} \begin{bmatrix} -3 & -3 & 6 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{-\frac{1}{3}R_1}\begin{bmatrix}1 & 1 & -2\\ 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}\quad \underset{\sim}{R_2 - R_1}\begin{bmatrix}1 & 1 & -2\\ 0 & -3 & 3\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\frac{1}{3}R_2}\begin{bmatrix}1 & 1 & -2\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}\quad \underset{\sim}{R_3 + R_2}\begin{bmatrix}1 & 1 & -2\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{R_1 + R_2}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$\therefore$ அணிச் சமன்பாடு $\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

அதாவது, $x_1 - x_3 = 0$; $-x_2 + x_3 = 0$

$\therefore \quad x_1 = x_2 = x_3.$

$x_1 = 1$ (யாதாவதொரு எண்ணி) என்றால்,

$x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 1$

$$\therefore \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ ஐகன் மதிப்பு 4 உடன் இணைந்த ஐகன் வெக்டர் $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

ஐகன் மதிப்பு 1 உடன் இணைத்த ஐகன் வெக்டர்

$(A - 1\ I)\ X = 0$ என்பதன் தீர்வு.

அதாவது,

$$\begin{bmatrix} 1-1 & 1 & 2 \\ 1 & 2-1 & 1 \\ 2 & 1 & 1-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underset{\sim}{(R_3) + R_1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\frac{1}{2}R_3}{\sim} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{\text{பரிமாற்றம்}}{\overset{R_1, R_2}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overset{(-1)R_2+R_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore\ x_1 - x_3 = 0$; $x_2 + 2x_3 = 0$; $x_1 = 1$ என்று வைத்துக் கொண்டால் $x_1 = x_3 = 1$; $x_2 = -2x_3 = -2$.

$$\therefore \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ ஐகன் மதிப்பு 1 உடன் இணைந்த ஐகன் வெக்டர் $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

ஐகன் மதிப்பு (-1) உடன் இணைந்த ஐகன் வெக்டர்

$(A + 1I)X = 0$ என்பதன் தீர்வு ;

அதாவது;

$$\begin{bmatrix} 1+1 & 1 & 2 \\ 1 & 2+1 & 1 \\ 2 & 1 & 1+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \underset{\sim}{R_3 - R_1} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{2R_2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{\sim}{R_2 - R_1} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\frac{1}{5} R_2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{\sim}{R_1 - R_2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\frac{1}{2} R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

அதாவது, $x_1 + x_3 = 0, \quad x_3 = 0$

$x_1 = -1$ என்றால், $x_3 = 1, x_2 = 0$

$\therefore$ -1 உடன் இணைந்த ஐகன் வெக்டர்

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. A சதுர அணியை k என்ற யாதாவதொரு எண்ணியால் பெருக்க, kA-ன் ஐகன் மதிப்புகள், A-ன் ஐகன் மதிப்புகளின் k மடங்குகளாவன என்று நிறுவுக.

விடை

$|A - \lambda I| = 0$-ன் மூலங்கள்தாம், அதாவது $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, A-ன் ஐகன் மதிப்புகள். இப்பொழுது, $|kA - k\lambda I| = |k(A - \lambda I)| = k^n |A - \lambda I|$

$\therefore$ kA அணியின் ஐகன் மதிப்புகள் : $k\lambda_1, \ldots, k\lambda_n$

(அல்லது) $AX = \lambda X$-ன் தீர்வுகள்தாம் A-ன் ஐகன் மதிப்புகள்.

$$k(AX) = k\lambda X \quad \therefore \quad (kA)X = k\lambda X$$

$B = kA$ என்றால் $BX = k\lambda X$. $\therefore$ இதன் தீர்வுகள் $k\lambda$-க்கள்.

3. A அணியின் நேர்மாறு A^{-1} என்றால்,

A^{-1} அணியின் ஐகன் மதிப்புகள் A-ன் ஐகன் மதிப்புகளின் நேர்மாறுகள் என நிறுவுக.

விடை

A-ன் ஐகன் மதிப்புகள்,

$AX = \lambda X$ என்ற சமன்பாட்டை உறுதிப்படுத்தும் λ-ன் மதிப்புகள்.

$$(A^{-1} A) X = A^{-1} \lambda X$$
$$I X = \lambda (A^{-1} X) \quad (\lambda, \text{எண்ணி})$$
$$X = \lambda (A^{-1} X)$$
$$A^{-1} X = \frac{1}{\lambda} X$$

இந்தச் சமன்பாட்டில் கிடைக்கும் $\frac{1}{\lambda}$-க்கள், A^{-1}-ன் ஐகன் மதிப்புகள் அதாவது, A-ன் ஐகன் மதிப்புகளின் நேர்மாறு.

4. A அணிக்கும், A^T அணிக்கும் ஒரே ஐகன் மதிப்புகள் தாம். எப்படி?

விடை

ஓர் அணிக் கோவையின் நிரைகளும் நிரல்களும் பரிமாறிக்கொண்டாலும் அந்த அணிக்கோவையின் மதிப்பு மாறுதாகையால்,

$$|A - \lambda I| = |(A - \lambda I)^T|$$

$$\therefore \quad |A - \lambda I| = 0 \Longrightarrow |(A - \lambda I)^T| = 0$$
$$\Longrightarrow |A^T - (\lambda I)^T| = 0$$
$$\Longrightarrow |A^T - \lambda I| = 0$$
$$\because \quad (I)^T = I$$

$\therefore$ A-க்கும், A^T-க்கும் ஒரே ஐகன் மதிப்புகள்.

5. ஒரு செங்குத்து அணியின் ஐகன் மதிப்புகள் ± 1 ஆகத்தான் இருக்க முடியும். —நிறுவுக.

விடை

A செங்குத்து அணி $\Longleftrightarrow A^{-1} = A^T$ (வ. இ.)

A அணியின் ஐகன் மதிப்புகள் $\lambda_1, \ldots, \lambda_i, \ldots, \lambda_n$ என்றால்

A^{-1} அணியின் ஐகன் மதிப்புகள் $\frac{1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{1}{\lambda_i} \ldots \frac{1}{\lambda_n}$ ஆவன.

(கணக்கு (3))

ஆனால் A அணியின் ஐகன் மதிப்புகளும், A^T அணியின் ஐகன் மதிப்புகளும் சமம். (கணக்கு (4))

$$\therefore \quad A^{-1} = A^T \Longrightarrow \frac{1}{\lambda_i} = \lambda_i \quad \forall\ i = 1, \ldots, n$$

$$\Longrightarrow \lambda_i^2 = 1$$

$$\Longrightarrow \lambda_i = \pm 1, \quad \forall\ i = 1, \ldots, n$$

6. A என்ற ஒரு முக்கோண அல்லது மூலைவரை அணியின் n ஐகன் மதிப்புகள் அந்த அணியின் மூலைவிட்ட உறுப்புகள் ஆகும். மேலும், A-ன் மதிப்புகளின் கூட்டுத் தொகை $= t_r(A)$.

விடை

மூலை வரை அணி

$$A = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & d_n \end{bmatrix} \quad \text{என்க.}$$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} d_1 - \lambda & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_2 - \lambda & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \ldots & d_n - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (d_1 - \lambda)(d_2 - \lambda) \ldots (d_n - \lambda)$$

$\therefore \quad |A - \lambda I| = 0 \Longrightarrow \lambda = d_1, d_2, \ldots, d_n$

$\therefore$ A-ன் ஐகன் மதிப்புகள் $d_1, d_2, \ldots d_n$ என்பவை A-ன் மூலைவிட்ட உறுப்புகள்.

மேலும் $t_r(A)$ = மூலைவிட்ட உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை

$= d_1 + d_2 + \ldots + d_n$

= A-ன் ஐகன் மதிப்புகளின் கூட்டுத்தொகை.

7. A அணியின் ஐகன் மதிப்புகள் $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ என்றால்

(i) $\det A = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n$

(ii) $t_r(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$

என நிறுவுக.

விடை

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \ldots & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$ என்க.

$|A - \lambda I| = 0$-லிருந்து $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ கிடைக்கின்றன.

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

இதை விரித்தால் கிடைக்கும் பல்லுறுப்புக் கோவையை

$|A - \lambda I| = \phi(\lambda) = (-1)^n \{ \lambda^n - s_1 \lambda^{n-1} + s_2 \lambda^{n-2} - \ldots + (-1)^n s_n \}$ ... (I)

இங்கே $s_1, s_2, \ldots, s_n$ என்பவை a_{ij}-க்களைக் கொண்டவை. சிறப்புச் சமன்பாடு $\phi(\lambda) = 0$-ன் மூலங்கள் $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ என்றால்

$\therefore \quad \phi(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \ldots (\lambda_n - \lambda) \ldots (II)$ என்க.

(I) (II)-க்களை ஒப்பிட்டால்,

$$(III) \begin{cases} s_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n \\ s_2 = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \ldots + \lambda_1 \lambda_n + \lambda_2 \lambda_3 \\ \qquad + \lambda_2 \lambda_4 + \ldots + \lambda_2 \lambda_n + \ldots + \lambda_{n-1} \lambda_n \\ s_3 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + \ldots + \lambda_{n-2} \lambda_{n-1} \lambda_n \\ \vdots \\ s_n = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n \end{cases}$$

(I)-ல் $\lambda = 0$ என்ற மதிப்புக்கு, $\phi(\lambda)$-ன் மதிப்பு

$$= (-1)^n (-1)^n s_n$$

$$= (-1)^{2n} s_n$$

$$= s_n$$

$$= \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n \ldots (III\text{-லிருந்து})$$

அதே சமயம், $|A - \lambda I|$ என்பது $|A|$ என்றாகும்.

$\therefore \quad |A| = \lambda_1 \ldots \lambda_n.$

III-லிருந்து, $s_1 = a_{11} + \ldots + a_{nn} = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$

$$\therefore \quad t_r(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

7·12 கெய்லி — ஹாமில்டான் தேற்றம்

(Cayley — Hamilton Theorem)

தேற்றம்

ஒவ்வோர் அணியும் தன்னுடைய சிறப்புச் சமன்பாட்டை உறுதிப்படுத்துகிறது.

நிறுவல்

A ஒரு $n \times n$ சதுர அணி என்க.

$A - \lambda I$ என்பது சிறப்புப் பல்லுறுப்பு (Characteristic polynomial).

$A - \lambda I = 0$ என்பது சிறப்புச் சமன்பாடு ஆகும்;

$$|A - \lambda I| = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix}$$

$|A - \lambda I|$ ஐ விரித்தால் அதை ஒரு n அடுக்குள்ள λ-ல் பல்லுறுப்பாக எழுதலாம்.

$|A - \lambda I| = a_0 + a_1 \lambda + \cdots + a_n \lambda^n = 0$ என்றால்,

A^0 ஐ I என்று எழுதினால்,

$a_0 I + a_1 A + \cdots + a_n A^n = [0]$ என்று நிறுவவேண்டும்.

இப்பொழுது $adj(A - \lambda I) = B_0 + B_1 \lambda + B_2 \lambda^2 + \cdots + B_{n-1} \lambda^{n-1}$ என்க.

$A \cdot (adj\, A) = |A| I$' என்ற ஒரு தேற்றத்தின்படி,

$(A - \lambda I) \cdot adj\,(A - \lambda I) = |A - \lambda I| I$

அதாவது,

$$(A - \lambda I)(B_0 + B_1 \lambda + B_2 \lambda^2 + \cdots + B_{n-1} \lambda^{n-1})$$
$$= (a_0 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + \ldots + a_n \lambda^n) I$$
$$= a_0 I + a_1 I \lambda + a_2 I \lambda^2 + \cdots + a_n I \lambda^n.$$

$$\Longrightarrow \quad AB_0 = a_0 I$$

$$AB_1 - B_0 = a_1 I$$

$$AB_2 - B_1 = a_3 I \ldots$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$AB_{n-1} - B_{n-2} = a_{n-1} I$$

$$- B_{n-1} = a_n I$$

இந்தச் சமன்பாடுகள் தொகுதியை, முதல் சமன்பாட்டை I ஆல், இரண்டாவதை A ஆல், மூன்றாவதை A^2ஆல், ..., கடைசியை A^n ஆல், முன்னால் பெருக்கி, பெருக்கங்களைக் கூட்டவும்.

$$IAB_0 = I a_0 I$$

$$A^2 B_1 - AB_0 = A a_1 I$$

$$A^3 B_2 - A^2 B_1 = A^2 a_2 I$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$A^n B_{n-1} - A^{n-1} B_{n-2} = A^{n-1} a_{n-1} I$$

$$- A^n B_{n-1} = A^n a_n I$$

இவற்றைக் கூட்ட, இடப் பக்கத்தில், குறுக்காக உறுப்புகள் அடித்துக் கொள்ளுகின்றன.

$$\therefore \quad [0] = I a_0 I + Aa_1 I + A^2 a_3 I + \ldots + Aa_{n-1} I + A^n a_n I$$

$$= a_0 + A a_1 + A^2 a_2 + \ldots + A^n a_n$$

$$= a_0 + a_1 A + a_2 A^2 + \ldots + a_n A^n$$

7·12·1. துணை முடிவு: 'அணியின் நேர்மாறு'

கெய்லி—ஹாமில்டன் சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்தி, சிறப்பில்லா அணியின் நேர்மாற்றைக் காணலாம்.

$| A - \lambda I | = a_0 + a_1 \lambda + \ldots + a_n \lambda^n$ என்க.

$\lambda = 0 \Longrightarrow a_0 = | A |$

கெய்லி-ஹாமில்டன் சமன்பாடாவது

$$a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \ldots + a_n A^n = [0], \ a_0 \neq 0.$$

அதாவது,

$$a_0 I = - a_1 A - a_2 A^2 - \dots - a_n A^n$$

$$I = -\frac{a_1}{a_0} A - \frac{a_2}{a_0} A^2 - \dots - a_n A^n$$

$$\therefore \quad I A^{-1} = -\frac{a_1}{a_0} AA^{-1} - \frac{a_2}{a_0} A^2 A^{-1} - \dots - \frac{a_n}{a_0} A_n A^{-1}$$

$$\therefore \quad A^{-1} = -\frac{a_1}{a_0} I - \frac{a_2}{a_0} A - \dots - \frac{a_n}{a_0} A^{n-1}$$

இதுதான் A-ன் நேர்மாறு.

மாதிரிக் கணக்கு

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

என்ற அணிக்குக் கெய்லி—ஹாமில்டன் தேற்றத்தை உண்மைப் படுத்து. A^{-1} ஐக் காண்.

விடை

A-ன் சிறப்புச் சமன்பாடு $| A - \lambda I | = 0$.

$$| A - \lambda I | = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 & 2 \\ 2 & -3-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

இதை விரித்தால்,

$\lambda^3 + 4 \lambda^2 - \lambda - 12 = 0$ என்பது A-ன் சிறப்புச் சமன்பாடு.

$A^3 + 4A^2 - A - 12 I = [0]$ என்பதைச் சரி பார்க்க வேண்டும்.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = AA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -6 & 11 & 4 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -6 & 11 & 4 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & 5 & 10 \\ 26 & -35 & -16 \\ -3 & 13 & -1 \end{bmatrix}$$

$\therefore \quad A^3 + 4A^2 - A - 12I$

$$= \begin{bmatrix} -4 & 5 & 10 \\ 16 & -35 & -26 \\ -3 & 13 & -1 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -6 & 11 & 4 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} - 12 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 5 & 10 \\ 26 & -35 & -16 \\ -3 & 13 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16 & -4 & -8 \\ -24 & 44 & 16 \\ 4 & -12 & 12 \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [0]$$

∴ கெய்லி — ஹாமில்டன் தேற்றம் உண்மையாயிற்று.

$A^3 + 4A^2 - A - 12\ I = 0$

∴ $12\ I = A^3 + 4\ A^2 - A$

$$I = \frac{1}{12}A^3 + \frac{1}{3}A^2 - \frac{1}{12}A$$

$$I A^{-1} = \frac{1}{12}A^3 A^{-1} + \frac{1}{3}A^2 A^{-1} - \frac{1}{12}AA^{-1}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{12}A^2 + \frac{1}{3}A - \frac{1}{12}I$$

$$= \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -6 & 11 & 4 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$- \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & \frac{11}{12} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{12} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} -\frac{1}{12} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{12} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{12} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

பயிற்சி

1. $A = \begin{pmatrix} -1 & -7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ என்றால்,

$A + B$, $A - B$, $(A - B)(A + B)$, $A^2 - B^2$ ஆகியவற்றைக் காண்.

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -5 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

AB, BA, $A-B$ ஆகியவற்றைக் காண்.

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -5 \\ 5 & 1 & -6 \end{bmatrix}$

AB ஐக் காண்.

4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$ என்றால் $A\,(BC)$ ஐயும், $(AB)\,C$ ஐயும் காண்.

$A\,(BC) = (AB)\,C$ என்பது சரியா?

5. $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, $X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

என்றால், AX_1, A^2X_1, AX_2, A^2X_2, $X_1{}^T\ A^2X_2$ ஆகியவற்றைக் காண்.

6. $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ என்ற அணியின்

சமச்சீர் அணி, எதிர்ச்சீர் அணிப் பகுதிகளைக் கணக்கிடு.

7. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

என்ற அணிகளுக்குப் பெருக்கலின் சேர்ப்பு விதியைக் கொடுத்த வரிசையில் சரி பார்.

8. $\begin{pmatrix} 2+i & 4-i \\ 3-i & 3+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2-i & 3+i & 3i \\ 3-i & 4+i & 2 \end{pmatrix}$ என்ன ?

9. $\begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}^2 = 0$ என்று நிறுவுக.

10. கீழ்க்காணும் பெருக்கங்களை, முடிந்தால், காண்.

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

(b) $(1 \quad 2 \quad 0 \quad 3) \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -0 \\ 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

11. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

என்றால், $A + B$, $A - B$, $3A - 2B$, $2A + 4B$ ஆகியவற்றைக் காண்.

12. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ என்பது பூச்சிய அணியா?

13. $a_{ij} = i^2 + 2j - 3$ என்றால் $(a_{ij})_{3 \times 3}$ அணியை அமை.

14. $a_{ij} = i^2 - ij$ என்றவாறு $(a_{ij})_{3 \times 2}$ அணியை அமை.

15. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 6 \\ 5 & 10 & 5 \end{bmatrix}$

$C = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & -3 & 3 \end{bmatrix}$ என்றால்,

AB, CA என்பவை பூச்சிய அணிகள் என்றும், $AB \neq 0$, $AC \neq 0$ என்றும் நிறுவுக.

16. $A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ என்றால் $AB = -BA = -C$ என்று காண்பி.

17. கீழ்க்காணும் அணிகளின் தரம் காண் :

(1) $\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 9 & 2 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 7 \\ 1 & -10 & -1 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & -2 \\ 7 & 7 & 11 & -4 \end{bmatrix}$

(5) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & -1 & 6 & 4 \\ 7 & -4 & -5 & 6 & 2 \\ 17 & 1 & -4 & 12 & 7 \end{bmatrix}$

(6) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 8 & 4 & 7 & 13 \\ 8 & 4 & -3 & -1 \end{bmatrix}$ (7) $\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

(8) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & 8 & 1 & 4 \\ 6 & 5 & 8 & 1 \\ 8 & 8 & 7 & 2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 & 8 \\ 16 & 4 & 12 & 15 \\ 5 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 6 & -1 \end{bmatrix}$

விடை

(1) 1 (2) 3 (3) 3 (4) 2

(5) 2 (6) 2 (7) 2 (8) 4

18. $\begin{bmatrix} i & 1 & 1-i \\ -1 & 0 & i \\ -1-i & i & 2i \end{bmatrix}$ என்பது சீரில்லா ஹெர்மீஷியன் என்று காண்பி.

19. $\begin{bmatrix} 1 & 1-i & 2 \\ 1+i & 3 & i \\ 2 & -i & 0 \end{bmatrix}$ என்பது ஹெர்மீஷியன் என்று காண்பி.

20. $\begin{bmatrix} i & 1-i & 2 \\ -1-i & 3i & i \\ -2 & i & 0 \end{bmatrix}$ என்பது சீரில்லா ஹெர்மீஷியன் என்று காண்பி.

21. கீழ்க்காணும் அணிகளின் நேர்மாறுகளைக் காண்.

(1) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & -2 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(5) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & -6 & -7 \end{bmatrix}$ (6) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(7) $\begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \beta & 1 \end{bmatrix}$ (8) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

(9) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 16 \end{bmatrix}$

(10) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ \beta & \gamma & 1 \end{bmatrix}$

22. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$

என்றால், AB, BA, A^{-1}, B^{-1}, $A^{-1}B^{-1}$, $B^{-1}A^{-1}$ ஆகியவற்றைக் காண். $B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$ என்பதையும்; $A^{-1}B^{-1} = (BA)^{-1}$ என்பதையும் நிறுவுக.

23. X, Y, Z என்பவை சிறப்பில்லா அணிகள் என்க.

$$\begin{pmatrix} X & 0 \\ XY & Z \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} X^{-1} & 0 \\ -Z^{-1}Y & Z^{-1} \end{pmatrix}$$ என்று நிறுவுக.

24. கீழ்க்காணும் அணிகள் செங்குத்து அணிகள் என்று நிறுவுக,

(a) $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{bmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

25. (a) A அணி சமச்சீர் என்றால் $adj A$-ம் கூடச் சமச்சீர்.
(b) A அணி ஹெர்மீஷியன் என்றால் $adj A$-ம் கூட ஹெர்மீஷியன் என்று நிறுவுக.

26. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ என்றால் A, A^2, A^3, A^4

என்பவற்றின் தரங்கள் முறையே 3, 2, 1, 0 என்று காண்பி.

27. கீழ்க்கண்ட அணிகளின் தரம் என்ன?

(a) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 2 & -1 & 7 \\ 1 & -2 & 8 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 3 & 11 & 1 & 5 \\ 5 & 13 & -1 & 11 \\ -2 & 2 & -4 & -8 \end{bmatrix}$

விடை

(a) 2 (b) 2

28. அணிகளைப் பயன்படுத்திக் கீழ்க்காணும் ஒருங்கமைச் சமன்பாடுகளைத் தீர் :

(a)
$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 4 \\ 2x - y + 3z &= 9 \\ 3x - y - z &= 2 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ x + 2y + 3z &= 14 \\ x + 4y + 9z &= 36 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} 4x - 3y + z &= 11 \\ 2x + y - 4z &= -1 \\ x + 2y - 2z &= 1 \end{aligned}$$

29. $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ என்ற அணியின் ஐகன் மதிப்புகளையும், அவற்றுக்கு ஏற்ற ஐகன் வெக்டர்களையும் காண்.

30. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ என்ற அணியின் ஐகன் மதிப்புகளையும், அவற்றுக்கு இணைந்த ஐகன் வெக்டர்களையும் கண்டுபிடி.

31. $\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{pmatrix}$ என்ற அணி ஹெர்மீஷியன் என்று நிறுவுக. இதன் ஐகன் மதிப்புகளையும் காண்க.

32. $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ என்பவை A-ன் ஐகன் மதிப்புகளானால், $\lambda_1 - k, \lambda_2 - k, \ldots, \lambda_n - k$ என்பவை $A - kI$-ன் ஐகன் மதிப்புகள் என்று நிறுவுக.

33. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ என்பது செங்குத்து

அணி என்று நிறுவுக ; இதன் ஐகன் மதிப்புகளையும் காண்.

34. $\begin{bmatrix} -\dfrac{1+i}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \dfrac{1+i}{\sqrt{6}} \\ \sqrt{\dfrac{2}{3}} \end{bmatrix}$ என்பவை

செங்குத்து அணிகள் என்று காண்பி.

35. ஓர் அணியின் ஐகன் மதிப்புகளிலொன்று பூச்சியம் என்க. இந்த அணி சிறப்பில்லா அணியாய் இருந்தால்தான், இந்தப் பூச்சிய ஐகன் மதிப்புக்கு இணைந்த ஐகன் வெக்டர்களில் ஒன்று பூச்சியமற்றதாயிருக்கும் என்று நிறுவுக.

8. எண் இயல்

(Theory of Numbers)

Z : முழு எண்கள் கணம் என்க.

8·1 வரை இலக்கணம்

வகுபடும் தன்மை (Divisibility)

$a, b \in \mathbf{Z}$ என்க.

$b = ac$ என்றவாறு $c \in \mathbf{Z}$ இருந்தால், a ஆனது b ஐ (மீதியில்லாமல்) வகுக்கிறது என்போம்.

a ஐ b-ன் வகுப்பான் அல்லது வகுக்கும் எண் (divisor) என்றோ, அல்லது b-ன் காரணி (factor) என்றோ பெயரிடுவோம். b ஐ a-ன் மடங்கு (multiple) என்போம்.

குறியீட்டுமுறை

a ஆனது b ஐ வகுக்கிறது (மீதியில்லாமல்) என்பதை $a \mid b$ என்று குறியிடுவோம்.

a ஆனது b ஐ வகுக்கவில்லை என்றால் $a \nmid b$ என்று குறியிடுவோம்.

'a-ன் மடங்கு b' என்பதை, $b = M(a)$ என்று எழுதலாம்.

உதாரணம்

$4 \mid 12, \quad 2 \nmid 5; \quad 12 = M(4)$

8·1·1 தேற்றம் 1

$a, b \in \mathbf{Z}^+, \ a \mid b \Longrightarrow a \leqq b$

நிறுவல்

$a \mid b \Longrightarrow \exists\, c \in \mathbf{Z},\ b = ac$

$a, b \in \mathbf{Z}^+ \Longrightarrow c \in \mathbf{Z}^+$

$\Longrightarrow c \geqq 1$

$\Longrightarrow ac \geqq a$

$\Longrightarrow b \geqq a, \quad \therefore\ b = ac$ (வகுபடும் தன்மையின் வரை இலக்கணம்)

$\Longrightarrow a \leqq b$ ||

8·1·2 தேற்றம் 2

வகுத்தல் குறியீடு | ஒரு சமநிலைத் தொடர்பு ஆகாது.

நிறுவல்

Z-ன் ஒவ்வொரு வரிசைப்பட்ட ஜோடி உறுப்புகளையும் அதாவது (a, b) ஐ '$a \mid b$ என்பது உண்மை அல்லது தவறு, ஆனால் இரண்டும் ஒருங்கே அல்ல' என்ற பண்புடன் குறியீடு | கோர்க்கிறது.

(i) ஓர் எண் தன்னையே வகுக்கிறது என்பது உண்மை. அதாவது, $a \mid a$ (| -க்குத் 'தானுதல்' பண்பு உண்டு.)

(ii) $3 \mid 6$, ஆனால் $6 \nmid 3$ (| -க்குச் சமச்சீர் பண்பு கிடையது.)

(iii) $a \mid b, b \mid c \Longrightarrow \exists\, d, f \in \mathrm{Z}, b = da, c = fb$

$\Longrightarrow c = f\,(da)$

$\Longrightarrow c = (fd)\, a$

$\Longrightarrow a \mid c \quad \therefore \quad fd \in \mathbf{Z}$ (| -க்குச் 'செல்லும் பண்பு' உண்டு.)

$\therefore$ | ஒரு சமநிலைத் தொடர்பு ஆகாது.

8·1·3. தேற்றம் 3

$ac \mid bc \Longrightarrow a \mid b, \quad a, b, c \in \mathbf{Z} - \{0\}$

நிறுவல்

$$ac \neq 0 \Longrightarrow a \neq 0,\ c \neq 0.$$

$$ac \mid bc \Longrightarrow \exists\, q \in \mathbf{Z} - \{0\},\ bc = qac$$

$$\Longrightarrow b = q\,a \because c \neq 0$$ (எண்களின் அடித்தல் விதி.)

8·1·4. தேற்றம் 4

$$a \mid b \Longrightarrow a \mid bx \quad \forall x,\ a, b, x \in \mathbf{Z} - \{0\}$$

நிறுவல்

$$a \mid b \Longrightarrow \exists\, q, \quad b = qa, \quad q \in \mathbf{Z} - \{0\}$$

$$\Longrightarrow bx = qx \cdot a$$

$$\Longrightarrow a \mid bx$$

8·1·5 தேற்றம் 5

$$a \mid b,\ a \mid c \Longrightarrow a \mid b + c,\ a \mid b - c$$

நிறுவல்

$$a \mid b \Longrightarrow b = q_1\, a,$$

$$a \mid c \Longrightarrow c = q_2\, a,$$

$$b \pm c = (q_1 \pm q_2)\, a$$

$$\therefore \quad a \mid b \pm c$$

8·1·6 தேற்றம் 6

$$a \mid b,\ a \mid c \Longrightarrow a \mid (bx + cy)\ \forall\ x, y$$

நிறுவல்

தேற்றம் 4-ன் படி.

$$a \mid b,\ a \mid c \Longrightarrow a \mid bx,\ a \mid cy$$

$\therefore$ தேற்றம் 5-ன் படி $a \mid bx + cy$

8·1·7. வரை இலக்கணம்

பகா எண் : ஒரு நேர் முழு எண் $p \neq 1$-ன் காரணிகள் 1 ஐயும், p ஐயும் தவிர வேறில்லை என்றால் p-க்குப் பகா எண் (prime number) என்பது பெயர்.

உதாரணம்

2, 3, 5, 7, 11, 13, 19, 23 ...... என்பவை பகா எண்கள்.

2-க்கு **இரட்டைப் பகா எண்** (even prime number) என்பது பெயர். வேறெந்த இரட்டை எண்ணும் பகா எண்ணாகாது என்பது உள்ளங்கை நெல்லிக்கனி.

2 ஐத் தவிர மற்றெல்லாப் பகா எண்களும் ஒற்றை எண்களே.

8·1·8. வரை இலக்கணம்

பகுநிலை எண் (Composite number)

ஓர் எண்ணுக்குத் தன்னையும், 1 ஐயும் தவிர வேறெதாவது எண்ணும் காரணியாக இருந்தால், அந்த எண்ணுக்குப் 'பகுநிலை எண்' என்பது பெயர்.

உதாரணம்

4, 10, 18, 96

8·2. மீப்பெரிய பொதுக் காரணி (Greatest common divisor, Highest common factor).

8·2·1. வரை இலக்கணம்

$a, b \in Z^+ - \{0\}$ என்றால்,

(i) $d \mid a,\ d \mid b,\ d \in Z^+$

(ii) $e \in Z,\ e \mid a,\ e \mid b \Longrightarrow e \mid d$

என்ற நிபந்தனைகளுக்குட்பட்ட $d \in Z$-க்கு a, b-க்களின் மீப்பெரிய பொதுக் காரணி என்பது பெயர். சுருக்கமாக இதை மீ. பொ. கா. என எழுதலாம்.

நிபந்தனை (i) ஆனது d என்பது a, b-க்களின் பொதுக் காரணி என்ற செய்தியையும், நிபந்தனை (ii) ஆனது d மீப்பெரிய பொதுக் காரணி என்ற செய்தியையும் தருகின்றன.

8·2·2. தேற்றம் 7

a, b என்பவை பூச்சியமற்ற முழு எண்கள் என்றால் a, b-க்களின் மீப்பெரிய பொதுக்காரணி d இருக்கிறது.

மேலும், $d = am + bn$ என்றவாறு m, n என்ற முழு எண்கள் இருக்கின்றன.

நிறுவல்

$S = \{ ax + by \mid x, y \in \mathbf{Z}, ax + by > 0 \}$ என்க.

$x = a, y = b$ என்றால் $ax + by$ என்பது $a^2 + b^2$ என்றாகும்.

$\because \quad a^2 + b^2 > 0, \qquad a^2 + b^2 \in S$

$\therefore \quad S \neq \emptyset$

$\therefore$ நேர் முழு எண்களின் நல்வரிசைப்படும் பண்பின்படி S-ல் மீச்சிறிய உறுப்பு இருக்கிறது. இந்த மீச்சிறிய உறுப்பு d என்க.

$d \in S \Longrightarrow d = am + bn,\ m\,n \in \mathbf{Z}$, $\because$ S-ன் உறுப்பின் உருமாதிரி $ax + by$

இப்பொழுது d-ஆனது a, b-க்களின் மீப்பெரிய பொதுக்காரணி என்று நிறுவ வேண்டும்.

$d \dagger a$ என்று வைத்துக்கொள்.

d மீச்சிறிய உறுப்பாவதால், வகுத்தல் கணக்கின்படி

$$a = qd + r, \qquad 0 \leqq r < d \qquad \ldots(1)$$

என்றவாறு q, r முழு எண்கள் உள்ளன.

அதாவது $a = q\,(am + bn) + r$

$$\Longrightarrow r = a\,(1 - qm) + b\,(qn)$$

இந்த r ஆனது $ax + by$ என்ற வடிவத்தில் உள்ளதால்

$r \neq 0 \Longrightarrow r \in S.$ (1)-ன்படி $r < d$

ஆனால் தற்கோளின்படி S-ன் எல்லா உறுப்புகளுக்கும் சிறியது d

$\therefore \quad r > d$

இது ஓர் எதிர் மறுப்பு (contradiction) $\therefore \; r = 0$

$\therefore \; a = qd$

$\Longrightarrow d \mid a$

இதுபோல் $d \mid b$

இப்பொழுது, $e \mid a, \; e \mid b, \; e \in \mathbf{Z}$ என்க.

$\therefore \; a = eu, \; b = ev$ என்றவாறு $u, v \in \mathbf{Z}$

$$d = am + bn \Longrightarrow d = a\,(eu) + b\,(ev)$$

$$= e\,(um + vn)$$

$$\Longrightarrow e \mid d$$

$\therefore \; d \mid a, \; d \mid b$ என்றும், $e \mid a, \; e \mid b \Longrightarrow e \mid d$ என்றும் நிறுவினோம்.

$\therefore$ வரை இலக்கணப்படி, d ஆனது a, b-க்களின் மீ.பொ.கா.

குறியீட்டு முறை

பொதுவாக, a, b-க்களின் மீ. பொ. கா. ஐ (a, b) என்று எழுதலாம். இந்தக் குறியீட்டை a, b-க்களின் வரிசைப்பட்ட ஜோடி என்று குழப்பிக் கொள்ளாதீர் !

இந்தத் தேற்றத்தின் விவரத்தின் மாற்றுவரை

$a, b, x, y \in Z \;\; ax + by$ என்பதற்கு a, b-க்களின் ஒருபடிச் சேர்மானம் என்பது பெயர். ஆதலால் மேற்கண்ட தேற்றத்தை 'a, b பூச்சியமற்ற முழு எண்கள் என்றால், a, b-க்களின் மீ. பொ. கா ஆனது, a, b-க்களின் மீச்சிறிய ஒருபடிச் சேர்மானம் ஆகும் ' என்றும் எழுதலாம்.

8·2·3. வரை இலக்கணம்

இரு பூச்சியமற்ற முழு எண்கள் a, b-க்களின் மீ. பொ. கா. 1 என்றால் a, b-க்களுக்கு ஒன்றுக்கொன்றுன பகா எண்கள் (Relatively prime numbers) என்பது பெயர்.

இதை $(a, b) = 1$ என்று எழுதுவது வழக்கம்.

இவ்விரு எண்களும் தனித்தனியே பகா எண்களாக இருக்க வேண்டும் என்ற அவசியமில்லை.

உதாரணம்

25-ம் 32-ம் பகா எண்கள் அல்ல.

ஆனால் $(25, 32) = 1$.

$\therefore$ 25-ம், 32-ம் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்கள். இதே போல் $(13, 17) = 1$.

8·2·4. தேற்றம் 8

p பகா எண், $p \mid ab \Longrightarrow p \mid a$; இல்லையெனில் $p \mid b$.

நிறுவல்

$p \mid ab$ என்றும், $p \dagger a$ என்றும் வைத்துக்கொள்.

$a = 1$ என்றால் $p \mid b$ என்பது தெளிவு.

$\therefore \quad a \neq 1$ என்க.

p பகா எண் என்பதால் p-க்கு 1 ஐயும், p ஐயும் தவிர வேறு காரணிகள் இல்லை.

மேலும் $p \dagger a \quad \therefore \ (p, a) = 1$.

$\therefore$ மீ. பொ. கா-ன் தேற்றத்தின்படி, $1 = pr + as$ என்றவாறு முழு எண்கள் r, s உள்ளன. சமன்பாட்டை b ஆல் பெருக்க,

$$b = bpr + bas.$$

தேற்றத்தின்படி $p \mid ab \Longrightarrow p \mid bas$.

தெளிவாக, $\quad p \mid b\,pr$

தேற்றம் 5-ன்படி $p \mid (bpr + bas)$

8·2·5. கிளைத்தேற்றம்

n யாதாவதொரு நேர் முழு எண் என்றும், p ஒரு பகா எண் என்றும் கொள்க.

$a_1, a_2, \ldots, a_n \in Z^+$, $p \mid a_1 a_2 \ldots a_n \Longrightarrow 1 \leq i \leq n$, குறைந்த பட்சம் ஒரு a_i ஐயாவது p வகுக்க வேண்டும்.

நிறுவல்

n-ன் மீது கணிதத் தொகு முறையைப் பயன்படுத்துவோம்.

$n = 1$ என்றால் $p \mid a_1 \Longrightarrow p \mid a_1$. இது உண்மை.

$n = 2$ என்றால் $p \mid a_1 a_2 \Longrightarrow p \mid a_1$ அல்லது $p \mid a_2$ (மேற்கண்ட தேற்றத்தின்படி). இது உண்மை.

$n = k$-க்கு $p \mid a_1\, a_2 \dots a_k \Longrightarrow 1 \leq i \leq k$, குறைந்த பட்சம் ஒரு a_i ஐயாவது p வகுக்கிறது — எடுகோள்.

$n = k + 1$, $p \mid (a_1, a_2 \dots a_k)\, a_{k+1} \Longrightarrow p \mid (a_1 \dots a_k)$
(எடுகோள்படி)

$\therefore$ $n = k + 1$, தேற்றம் உண்மையாயிற்று.

$\therefore$ கிளைத்தேற்றம் உண்மை ||

8·2·6. தேற்றம் 9

$a, b, N \in \mathbf{Z}^+$,

$a \mid N,\ b \mid N,\ (a, b) = 1 \Longrightarrow ab \mid N$.

நிறுவல

$a \mid N \Longrightarrow \exists\, m \in \mathbf{Z}^+,\ N = m\,a$.

$b \mid N \Longrightarrow b \mid ma$

ஆனால் $(a, b) = 1 \Longrightarrow b \nmid a$

$\therefore$ $b \mid m$.

$\therefore$ $\exists\, q \in \mathbf{Z}^+,\ m = qb$.

$\therefore$ $N = ma = (qb)\,a = q\,(ab)$

$\therefore$ $ab \mid N$ ||.

8·2·7. தேற்றம் 10

ஒரு பகுநிலை எண்ணின் மீச்சிறிய வகுப்பான் ஒரு பகா எண்ணாகும்.

நிறுவல்

N: ஒரு பகுநிலை எண் என்க.

$\therefore$ N-க்கு வகுப்பான்கள் உண்டு.

இந்த வகுப்பான்கள் d எனில் $1 < d < N$.

N-ன் மீச்சிறிய வகுப்பான் p என்க. அதாவது d-ன் மீச்சிறிய மதிப்பு p (1)

p ஒரு பகா எண் அல்ல என்று வைத்துக்கொள்.

அப்படியானால்

$1 < q < p$ என்றவாறு p–க்கு q என்ற வகுப்பான் உண்டு.

$q \mid p \Longrightarrow q \mid N. \quad \because p \mid N$ (2)

ஆனால் (1)-ன்படி p தான் மீச்சிறியது. அதற்குக் குறைந்து ஒரு வகுப்பானும் இல்லை என்பதற்கு (2) ஓர் எதிர் மறுப்பு.

$\therefore$ p பகா எண்தான்.

$\therefore$ பகுநிலை எண்ணின் மீச்சிறிய வகுப்பான் ஒரு பகா எண்ணாகும் ‖.

8·3. எண் கணித அடிப்படைத் தேற்றம் (Fundamental Theorem of Arithmetic)

8·3·1. தேற்றம் 11

ஒவ்வொரு பூச்சியமல்லாத முழு எண் a ஐயும், $a = p_1 p_2 \cdots p_n$, $p_1\ p_2\ \ldots, p_n$ பகா எண்கள் என்றவாறு ஒரே முறை அமைப்பில், (காரணிகளின் அமைப்பின் வரிசை ஒழுங்கு நீங்கலாக) எழுதலாம். இந்தத் தேற்றத்தில் இரு பாகங்கள் உண்டு.

முதல் பாகம்

ஒவ்வொரு முழு எண் $a > 1$ ஐயும் முடிவுள்ள எண்ணிக்கையுள்ள பல பகா எண்களின் பெருக்கமாக எழுதலாம்.

இரண்டாம் பாகம்

ஒவ்வொரு முழு எண் $a > 1$ ஐயும், a-ன் காரணிகளின் வரிசை ஒழுங்கைத் தவிர, ஒரே முறையில்தான் பல பகா எண்களின் பெருக்கமாக எழுதலாம்.

நிறுவல் : முதல் பாகம்

கணம் $S = \{ a \mid a > 1$, a ஆனது முடிவுள்ள எண்ணிக்கையுள்ள பல பகா எண்களின் பெருக்கம் **அல்ல** $\}$

$S = \emptyset$ என்றால் தேற்றம் நிறுவப்பட்டுவிடும்.

$S \neq \emptyset$ என்க. $\therefore$ S ஆனது நேர் முழு எண்களைக் கொண்ட வெற்றற்ற கணம். $\therefore$ S-ன் நல் வரிசைப்படும் பண்புப்படி, S-ல் மீச்சிறிய உறுப்பு உண்டு எனில் இதை b என்க.

$b \in S \Longrightarrow b$ பகா எண் **அல்ல**

$\Longrightarrow \exists\ c, d \in \mathbf{Z}^+,\ \ b = cd,\ 1 < c < b,\ 1 < d < b$

b என்பது S-ன் ஒரு மீச்சிறிய உறுப்பு என்பதால்,

$c < b,\ d < b \Longrightarrow c, d \notin S$

$\Longrightarrow c$ ஐயும் d ஐயும்

முடிவுள்ள எண்ணிக்கையுள்ள பல பகா எண்களின் பெருக்கமாக எழுத முடியும்.

$\therefore\ \ c = p_1 p_2 \cdots p_n,\ \ d = q_1 q_2 \cdots q_m$

($p_1, \cdots p_n, q_1, \cdots q_m$ எல்லாம் பகா எண்கள்) என்க.

$\therefore\ \ b = cd = p_1 \cdots p_n q_1 \cdots q_m$

$\therefore\ \ b$ ஆனது $(m + n)$ பகா எண்களின் பெருக்கம்.

இது $b \in S$ என்பதன் எதிர் மறுப்பு.

$\therefore\ \ S = \emptyset$ ||

நிறுவல் : பாகம் 2

$p_1, \cdots p_n, q_1 \cdots q_m$ என்பவை எல்லாம் பகா எண்கள் என்க. முடியுமானுல்,

$a = p_1 p_2 \cdots p_n$ என்றும்

$a = q_1 q_2 \cdots q_m$ என்றும் இரு முறைகளில் எழுதுக.

$n = m$ என்றும், கணம் $\{ p_1, \cdots, p_n \}$ = கணம் $\{ q_1, \cdots, q_m \}$ என்றும் காண்பித்தால் போதும்.

$p_1 p_2 \cdots p_n = q_1 q_2 \cdots q_m$

$\Longrightarrow p_1 \mid p_1 p_2 \cdots p_n$

$\Longrightarrow p_1 \mid q_1 q_2 \cdots q_m$

தேற்றம் 8-ன் கிளைத்தேற்றம் படி

$p_1 \mid q_1 \cdots q_m \Longrightarrow p_1 \mid q_i,\ \ (1 \leqq i \leqq m)$

q_i பகா எண் என்பதால், தன்னையும் 1 ஐயும் தவிர வேறெந்தக் காரணிகளும் இல்லையாதலின் $p_1 = 1$ அல்லது q_i.

ஆனால் p_1-ம் பகா எண் என்பதால் $p_1 \neq 1$ $\therefore$ $p_1 = q_i$ வேண்டுமானால் q-க்களின் கீழ்க்குறிகளை $q_i = q_1$ என்றவாறு மாற்றியமை. அப்பொழுது $p_1 = q_1$

$\therefore$ $p_1 p_2 \cdots p_n = p_1 \cdot q_2 q_3 \cdots q_m \Longrightarrow p_2 p_3 \cdots p_n = q_2 q_3 \cdots q_m$ (பெருக்கலின் அடித்தல் விதி)

$\therefore$ $p_2 \mid q_2 q_3 \cdots q_m,$ $\therefore$ $p_2 = q_j,\ 2 \leq j \leq m$

முன்போல் $p_2 = q_2$ என்றவாறு q-ன் கீழ்க்குறிகளை மாற்றியமை. இந்த முறையைத் தொடர்ந்து செய்தால், ஒவ்வொரு p_i-ம் ஒரு q_i-க்குச் சமம் என்ற முடிவிற்கு வருவோம்.

$$\therefore \{ p_1, p_2, \cdots, p_n \} \subseteq \{ q_1, \cdots, q_m \}$$

மேற்கண்ட விவாதத்தில் p, q-க்களின் பாத்திரங்களைப் பரிமாற்றினால்,

$\{ q_1, q_2, \cdots, q_m \} \subseteq \{ p_1, p_2, \cdots, p_n \}$ என்று காண்பிக்கலாம்.

$$\therefore \{ p_1, p_2 \cdots, p_n \} = \{ q_1, \cdots, q_m \}$$

$$\therefore n = m, p_i = q_i \quad \forall_i = 1, 2, \ldots, n \parallel$$

$\therefore$ பாகங்கள் 1-ம், 2-ம் நிறுவப்பட்டன $\Longrightarrow$ தேற்றம் நிறுவப்பட்டது ||

8·3·7. ஒரு பகுநிலை எண்ணின் நியமமான அமைப்பு
(Standard Form of a Composite Number)

மேற்கண்ட தேற்றத்தின்படி ஒவ்வொரு பகுநிலையெண் $a > 1$ ஐயும்; $p_i \cdots p_n$ என்பவை பகா எண்கள் என்றால்,

$a = p_1 p_2 \cdots p_n$ என்று எழுதலாம் என்று பார்த்தோம் இந்தக் காரணிகளில் சில திரும்பத் திரும்ப வரலாம்.

உதாரணமாக p_1 என்பது n_1 தடவைகள், p_2 என்பது n_2 தடவைகள் ... , என்று திரும்பத் திரும்ப வந்தால் $a = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_s^{n_s}$ என்று எழுதலாம்.

$p_1, p_2, \dots p_s$ ஐ ஏறு வரிசையில் எழுதினால் $a = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_s^{n_s}$ என்பது a-ன் நியமமான அமைப்பு எனப்படும்.

8·3·3. தேற்றம் 12

பகா எண்களின் எண்ணிக்கை முடிவில்லாதது.

நிறுவல்

பகா எண்களின் எண்ணிக்கை முடிவுள்ளது என்று வைத்துக் கொள். அப்படியானால் ஒரு மீப்பெரிய பகா எண் இருக்க வேண்டும். அதை p என்க. 2-லிருந்து p வரையுள்ள எல்லாப் பகா எண்களின் பெருக்கத்துடன் 1 ஐக் கூட்டு. கூட்டுத்தொகை N என்ற எண் என்றால்,

$$N = (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots p) + 1$$

இப்பொழுது N ஒரு பகா எண்ணாகவோ அல்லது பகுநிலை எண்ணாகவோ இருக்கவேண்டும். N பகா எண் என்றால், $N > p$ என்பது தெளிவு. ஆனால் இது 'p மீப் பெரிய பகா எண்' என்பதன் எதிர் மறுப்பு.

N பகுநிலை எண் என்றால், N-க்கு (தேற்றம் 11-ன்படி) ஒரு பகாக் காரணி (prime factor) q உண்டு.

இந்தப் பகாக் காரணி q ஆனது $2, 3, 5, \dots p$ என்ற பகாக் காரணிகளிலொன்றாக இருக்க முடியாது.

$q \in \{2, 3, \dots p\}$ என்றால், $q \mid 2 \cdot 3 \cdot 5 \dots p$. ஆனால் $q \dagger 1$.

$$\therefore \quad q \dagger [(2 \cdot 3 \cdot 5 \dots p) + 1] \implies q \dagger N$$

இது ஓர் எதிர் மறுப்பு.

$\therefore$ பகாக் காரணி $q > p$.

$\therefore$ முடிவுள்ள எண்ணிக்கையுள்ள பகா எண்களின் கணத்தில் இல்லாத ஒரு பகாக் காரணியை எப்பொழுதும் கண்டு பிடிக்கலாம் என்பதை இப்பொழுது நிறுவிவிட்டோம்.

$\therefore$ பகா எண்களின் எண்ணிக்கை முடிவில்லாதது. ||

8·3·4. ஒரு முழு எண்ணின் வகுப்பான்கள்

கொடுக்கப்பட்ட முழு எண் N ஐ,

$N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n}$, $p_1, p_2 \ldots p_n$ என்பவை N-ன் பகாக்காரணிகள் என்று எழுதலாம்.

N-ன் காரணி $p_1^{\alpha_1}$ என்ருல், $p_1 . p_1^2, \ldots p_1^{\alpha_1}$ என்பவைகளும் N-ன் காரணிகளே. இதுபோல் $p_2, p_2^2 \ldots p_2^{\alpha_2}, \ldots, p_n, p_n^2 \ldots p_n^{\alpha_n}$ என்பவைகளும் N-ன் காரணிகளே.

$p_1^i \cdot p_2^j$ $(i \leq \alpha_1; j \leq \alpha_2)$-ம் N-ன் காரணியே. இதுபோல், $\forall_i = 1, \ldots n$, p_i-களின் 1-லிருந்து α_i வரையுள்ள அடுக்குகளின் சேர்மானங்களும் N-ன் காரணிகள். 1-ம், N-ம் N-ன் காரணிகளே. இந்த எல்லாக் காரணிகளும்

$(1 + p_1 + \ldots + p_1^{\alpha_1})(1 + p_2 + \ldots + p_2^{\alpha_2}) \ldots (1 + p_n + \ldots + p_n^{\alpha_n})$ என்ற பெருக்கத்தின் விரித்தலில் உள்ள எல்லா உறுப்புக்களாவன.

$1 + p_1 + \ldots + p_1^{\alpha_1}$ -ல் $\alpha_1 + 1$ உறுப்புகள் உள்ளன.

$1 + p_n + \ldots + p_n^{\alpha_n}$ -ல் $\alpha_n + 1$ உறுப்புகள் உள்ளன.

$\therefore$ மேற்கண்ட பெருக்கத்தின் விரித்தலில் உள்ள உறுப்புகளின் மொத்த எண்ணிக்கை

$= (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_n + 1)$ இதனை $\gamma(N)$ என்று குறியிடுவர்.

$$1 + p_1 + \ldots + p_1^{\alpha_1} = \frac{p_1^{\alpha_1 + 1} - 1}{p_1 - 1};$$

$$1 + p_2 + \ldots + p_2^{\alpha_2} = \frac{p_1^{\alpha_2 + 1} - 1}{p_2 - 1}$$ முதலியன.

$$\therefore \text{ மேற்கண்ட பெருக்கம்} = \frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1} \cdots \frac{p_n^{\alpha_n+1}-1}{p_n-1}$$

$$\therefore N\text{-ன் வகுப்பான்களின் கூட்டுத்தொகை } \frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1} \cdots \frac{p_n^{\alpha_n+1}-1}{p_n-1}$$

இதை $\sigma(N)$ என்று குறியிடுவர்.

குறிப்பு : N-ன் வகுப்பான்களில் 1-ம், N-ம் சேர்ந்தவை ||

8·4. நிறை எண் (Perfect Number)

8·4·1. வரை இலக்கணம்

ஒரு முழு எண்ணின் எல்லா வகுப்பான்களின் கூட்டுத் தொகையும் அந்த எண்ணின் இருமடங்கு என்ருல் அந்த எண்ணை நிறை எண் என்போம். அதாவது N என்ற முழு எண், $\sigma(N) = 2N$ என்ருல், N-க்கு 'முழு எண்' என்பது பெயர்.

உதாரணம்

6-ன் வகுப்பான்கள் 1, 2, 3, 6

$\sigma(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12 = 2 \times 6$

. 6 என்பது நிறை எண்.

நிறை எண்களுக்கு மற்ற உதாரணங்கள், 28, 496, 8128, 130816, 2096128. 33550336 ஆகியவை.

இந்த நிறை எண்கள் எல்லாம் இரட்டை எண்கள்.

8·4·2. தேற்றம் 13

$2^p - 1$ ஒரு பகா எண், $N = 2^{p-1}(2^p-1) \Longrightarrow N$ ஒரு நிறை எண்.

நிறுவல்

$$\sigma(N) = [1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{p-1}][1 + (2^p-1)]$$

இப்பொழுது $1+2+2^2+\dots+2^{p-1}$ என்பது ஒரு பெருக்குத் தொடர். இதன் பொது விகிதம் 2 ; உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை p.

இப் பெருக்குத் தொடரின் தொகை : $\dfrac{1\,(2^p-1)}{2-1}=2^p-1$

$$\therefore \quad \sigma(N)=(2^p-1)\cdot 2^p$$

$$=2\cdot[2^{p-1}(2^p-1)]$$

$$=2N$$

$\therefore$ N என்பது நிறை எண்.

8·4·3. மாதிரிக் கணக்குகள்

1. 1400 என்ற எண்ணின் வகுப்பான்களின் எண்ணிக்கையையும் கூட்டுத்தொகையையும் காண்க.

விடை

$1400=2^3\cdot 5^2\cdot 7^1$; 2, 5, 7 என்பவை பகாக் காரணிகள்.

$$\sigma(1400)=(1+2+2^2+2^3)(1+5+5^2)(1+7)$$

$$=\frac{2^4-1}{2-1}\cdot\frac{5^3-1}{5-1}\cdot\frac{7^2-1}{7-1}$$

$$=\frac{15}{1}\cdot\frac{124}{1}\cdot\frac{48}{6}$$

$$=\mathbf{3840}$$

$$\gamma(1400)=(3+1)(2+1)(1+1)=4\cdot 3\cdot 2=\mathbf{24}$$

2. 24 வகுப்பான்களைக் கொண்ட மிகக் குறைந்த எண்ணைக் கண்டுபிடி.

அந்த எண் N என்க.

$N=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}p_3^{\alpha_3}\dots$ என்க.

N ஆனது மிகக் குறைந்த எண்ணென்றால், $p_1, p_2 \dots$ என்பவை ஏறு வரிசையிலும், $\alpha_1\ \alpha_2 \dots$ என்பவை இறங்குவரிசையிலும் இருக்க வேண்டும்.

$$N = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3} \cdot 7^{\alpha_4} \ldots$$

$\therefore$ வகுப்பான்களின் எண்ணிக்கை $= (\alpha_1 + 1)\ (\alpha_2 + 1)$ $(\alpha_3 + 1)(\alpha_4 + 1) = 24$

$$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

$\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4 \Longrightarrow \alpha_1 + 1 = 3,\ \alpha_2 + 1 = 2,$ $\alpha_3 + 1 = 2,\ \alpha_4 + 1 = 2$

$\therefore\ \alpha_1 = 2,\ \alpha_2 = 1,\ \alpha_3 = 1,\ \alpha_4 = 1$

$$\therefore\ N = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^1$$

$$= 420$$

3. N-ன் எல்லா வகுப்பான்களின் பெருக்கத்தைக் காண்க.

விடை :

$N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \ldots$ என்க.

N-ன் வகுப்பான்களின் எண்ணிக்கை $= (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)$ $(\alpha_3 + 1)\ldots$

N-ன் ஒரு வகுப்பான் x என்க. $\therefore\ x \in \mathbf{Z}^+$

$\therefore$ வரை இலக்கணப்படி $N = xk,\ k \in \mathbf{Z}^+$

$$\Longrightarrow \frac{N}{x} = k$$

$$\Longrightarrow N = kx$$

$$\Longrightarrow N = \left(\frac{N}{x}\right) \cdot x,\ \frac{N}{x} \in \mathbf{Z}^+,\ \therefore \frac{N}{x} = k \in \mathbf{Z}^+$$

$\Longrightarrow$ N-ன் ஒரு வகுப்பான் $\frac{N}{x}$

$\therefore$ N-ன் ஒரு வகுப்பான் x-க்கு ஏற்ப N-க்கு மற்ஞெரு வகுப்பான் $\frac{N}{x}$

$\left(x, \frac{N}{x}\right)$ போன்ற வகுப்பான் ஜோடிகளின் எண்ணிக்கை

$$= \frac{1}{2}(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1)\ldots = k$$

ஒரு ஜோடி வகுப்பான்களின் பெருக்குத் தொகை $= x \cdot \frac{N}{x}$
$= N$

$\therefore$ $\frac{1}{2}(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\ldots$ ஜோடிகளின் பெருக்குத் தொகை

$= N \cdot N \cdot N \ldots k$ தடவைகள்,

$= N^k$

$= N^{\frac{1}{2}(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\ldots}$

4. N-க்கு n வகுப்பான்கள் இருந்தால் அவற்றின் தொடர் பெருக்குத் தொகை (Continued product) $\sqrt{N^n}$ என்று காண்பிக்க.

விடை

மேற்கண்ட கணக்கு (3)-ல் $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\ldots = n$

என்று எழுதிஞல், வேண்டிய பெருக்குத் தொகை $= N^{\frac{n}{2}} = \sqrt{N^n}$

5. நேர் அல்லது எதிர் முழு எண்களைக் கெழுக்களாகக் கொண்ட முழு எண் x-ல், பல்லுறுப்புக் கோவை எதுவும் பகா எண்களை மட்டும்தான் குறிக்கும் என்பதில்லை.

விடை

கொடுத்த பல்லுறுப்புக் கோவை

$f(x) \equiv a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ என்க.

$x = m$ என்பதற்கு

$f(m) \quad = a_0 + a_1 m + a_2 m^2 + \dots + a_n m^n$

$= p$, ஒரு பகா எண் என்க.

$f(m+p) = a_0 + a_1(m+p) + a_2(m+p)^2 + \dots + a^n(m+p)_u$

$= (a_0 + \alpha_1 m + \dots + a_n m^n) + p$-ன் மடங்குகள்.

$= p + M(p)$

$= M(p)$, ஒரு பகுநிலை எண்.

$\therefore$ $f(x)$ ஆனது பகா எண்களை மட்டும் தான் தரும் என்பதில்லை.

6. ஒரு நிறையெண் $2^{n-1}(2^n-1)$-ன் வகுப்பான்களின் தலைகீழ் எண்களின் கூட்டுத்தொகை 2 என்று நிறுவுக.

விடை

$N = 2^{n-1}(2^n-1)$

$\sigma(N) = 2 \cdot N$ என்று பார்த்தோம்.

மேற்கண்ட கணக்கு (3)-ன் படி, x ஒரு வகுப்பான் என்றால், $\frac{N}{x}$-ம் ஒரு வகுப்பான் என்று பார்த்தோம்.

$\therefore$ N-க்கு மொத்தம் $2k$ வகுப்பான்கள் என்றால் $\left(x, \frac{N}{x}\right)$ என்று k ஜோடிகள் எழுதலாம் என்று பார்த்தோம்.

$x_1, x_2, \dots\dots, x_k, \frac{N}{x_1}, \frac{N}{x_2}, \dots\dots\dots, \frac{N}{x_k}$ என்பவை N-ன் எல்லா வகுப்பான்கள்.

$\sigma(N) = x_1 + x_2 + \dots\dots + x_k + \frac{N}{x_1} + \frac{N}{x_2} + \dots\dots + \frac{N}{x_k}$

வகுப்பான்களின் தலைகீழ் எண்களின் கூட்டுத் தொகை,

$$= \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots\dots + \frac{1}{x_k}\right) + \left(\frac{x_1}{N} + \frac{x_2}{N} + \dots\dots + \frac{x_k}{N}\right)$$

$$= \frac{1}{N}\left(\frac{N}{x_1}+\frac{N}{x_2}+\ldots\ldots+\frac{N}{x_k}\right)+\left(\frac{x_1}{N}+\frac{x_2}{N}+\ldots\ldots+\frac{x_k}{N}\right)$$

$$= \frac{1}{N}\left(\frac{N}{x_1}+\frac{N}{x_2}+\ldots\ldots+\frac{N}{x_k}\right)+\frac{1}{N}(x_1+\ldots\ldots+x_k)$$

$$= \frac{1}{N}\left[\frac{N}{x_1}+\ldots\ldots+\frac{N}{x_k}+x_1+\ldots\ldots+x_k\right]$$

$$= \cdot\sigma(N)\frac{1}{N}$$

$$= \frac{1}{N}\cdot 2N$$

$$= 2.$$

7. n என்பது 2-ன் மடங்கு அல்லவென்றால், 2^n+1 என்பது பகுநிலை எண் என்று நிறுவுக.

விடை

$n = 2^k(2m+1)$ என்க.

$$\therefore\ 2^n = 2^{2^k(2m+1)}$$

$$= \left(2^{2^k}\right)^{(2m+1)}$$

$$= a^{2m+1},\ a = 2^{2^k}$$

$$\therefore\ 2^n + 1 = a^{2m+1} + 1$$

$$a = -1 \Longrightarrow a^{2m+1} + 1 = (-1)^{2m+1} + 1 = 0$$

மீதித் தேற்றத்தின்படி $a^{2m+1}+1$-ன் காரணி $(a+1)$.

$\therefore \quad 2^n + 1$-ன் காரணி $(a+1)$

$\therefore \quad 2^n + 1$ என்பது பகுநிலை எண்.

8·5. ஆய்லரின் சார்பு (Euler's Function)

8·5·1. வரை இலக்கணம்

N என்ற நேர் முழு எண்ணுக்குக் குறைந்தும், N-க்குப் பகா எண்களாயுமுள்ள நேர் முழு எண்களின் எண்ணிக்கைக்கு 'ஆய்லரின் சார்பு' என்பது பெயர். இதனை $\varphi(N)$ என்று குறியிடுவோர்.

வழக்கு (Convention)

1. $\varphi(1) = 1$

2. எந்த எண் N-க்கும் 1 ஆனது பகா எண்.

$\therefore \quad \varphi(2) = 1$

உதாரணம் 1

5-க்குக் குறைந்த எண்கள்: 1, 2, 3, 4

$(1, 5) = 1, \ (2, 5) = 1, \ (3, 5) = 1, \ (4, 5) = 1$

$\therefore \quad \varphi(5) = 1$

2. 10-க்குக் குறைந்த எண்கள் : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. $(1, 10) = 1, \ (3, 10) = 1, \ (7, 10) = 1, \ (9, 10) = 1$

$\therefore \quad \varphi(10) = 4.$

3. p ஒரு பகா எண் என்றால், p-க்குக் குறைந்த எல்லா முழு எண்களுமே p-க்குப் பகா எண்கள்.

$\therefore \quad \varphi(p) = p - 1$

8·5·2 தேற்றம் 14

$\varphi(N)$-ன் மதிப்பைக் காண்.

அல்லது $N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots\ldots r_k^{\alpha_k}$ என்றால்

$$\varphi(N) = N\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\ldots\ldots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

$p_1, \ldots\ldots p_k$ என்பவை பகா எண்கள்.

நிறுவல்

$N = p_1^{\alpha_1} \; p_2^{\alpha_2} \ldots\ldots$ என்க.

N-ன் காரணி p_1 என்பதால் $p_1 \mid N$ $\quad \therefore \; \frac{N}{p_1}$ இருக்கிறது.

1, 2, 3, ..., N என்ற எண்கள் கணத்தை M என்க.

இந்த எண்களில், p_1-ன் மடங்குகள் $1 \cdot p_1, 2 \cdot p_1, \ldots\ldots \frac{N}{p} \cdot p_1$ ஆவன.

$\therefore$ இவை $\left(\frac{N}{p_1}\right)$ எண்ணிக்கையுள்ளவை. இவை p_1-ன் மடங்குகள் என்பதால் இவை N-க்குப் பகா எண்கள் அல்ல. M-ல் இவை நீங்கலாக இருப்பவை N-க்குப் பகா எண்கள்.

$\therefore$ M-ல், $N - \frac{N}{p_1} = N\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)$ எண்ணிக்கையுள்ள எண்கள் p_1-க்குப் பகா எண்கள். இந்த p_1 -க்குப் பகா எண்கள் கணத்தை p_1 என்க. இந்த p_1-ல் p_2-ன் மடங்குகள், ஆனால் p_1-ன் மடங்குகள் அல்லாத எண்களும் உள்ளன.

இப்பொழுது M-ல் p_2-ன் எல்லா மடங்குகள், $1 \cdot r_2, 2 \cdot p_2 \ldots\ldots r\, p_2, \ldots\ldots, \frac{N}{p_2} \cdot p_2$ ஆகியவை. இந்த $\frac{N}{p_2}$ எண்ணிக்கையுள்ள எண்களில் p_1 ஆல் rஐ வகுக்காத எண்கள் p_1-க்குப் பகா எண்கள் p_1-ல் உள்ளன. முதல் பத்தியில் உள்ளவாறு விவாதித்தால் 1, 2, 3, ... $\frac{N}{p_2}$ ஆகிய எண்களில் $\frac{N}{p_2}\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)$ எண்ணிக்கையுள்ளவை p_1 ஆல் வகுபடாதவை.

அதாவது p_1-ல் $\frac{N}{p_2}\left(1-\frac{1}{p_1}\right)$ எண்ணிக்கையுள்ள எண்கள் p_2-ன் மடங்குகள்.

$\therefore$ M-ல் p_1, p_2-க்களுக்குப் பகா எண்களின் எண்ணிக்கை

$$N\left(1-\frac{1}{p_1}\right)-\frac{N}{p_2}\left(1-\frac{1}{p_1}\right)=N\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)$$

இந்த எண்களின் கணத்தை p_2 என்க.

கணிதத் தொகுத்தறி முறையால் தேற்றத்தை முடிப்போம்.

தொகுத்தறி முறையின் தற்கோள் : M-லிருந்து பகா எண்கள் $p_1, p_2 \ldots\ldots p_i$-ன் மடங்குகளை நீக்கியபின் எஞ்சியிருக்கும்

$$(1) \ldots\ldots N\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{1}{p_i}\right)$$

எண்ணிக்கையுள்ள முழு எண்களின் கணத்தை p_i என்க.

M-ல் p_{i+1}-ன் எல்லா மடங்குகள் :

$p_{i+1}, 2p_{i+1}, \ldots, rp_{i+1}, \ldots, \frac{N}{p_{i+1}} \cdot p_{i+1}$ ஆகியவை. இவற்றுள் $p_1, p_2 \ldots p_i$ என்பவை ஒன்றினாலும் r ஐ வகுக்காத எண்கள் p_i-ல் உள்ளன. இப்படிப்பட்ட எண்கள் $\left\{1, 2, 3, \ldots, r, \ldots, \frac{N}{p_{i+1}}\right\}$-ல் $p_1\, p_2 \quad p_i$-க்குப் பகா எண்கள் ஆவன.

இவற்றின் எண்ணிக்கை : $\frac{N}{p_{i+1}}\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_i}\right)$

$\therefore$ M-ல், $p_1\, p_2 \ldots p_{i+1}$-க்குப் பகா எண்களாக உள்ள எண்களின் எண்ணிக்கை

$$= N\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\left(1-\frac{1}{p_i}\right) -$$

$$\frac{N}{p_{i+1}}\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_i}\right)$$

$$= N\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_i}\right)\left(1-\frac{1}{p_{i+1}}\right)$$

இது p_i-ன் (1) ஐப் போன்ற உருமாதிரி.

இந்த உருமாதிரியானது $i = 1, 2$-க்களுக்குச் சரியாக இருக்கிறது என்று நிறுவினோம். $\therefore$ இந்த உருமாதிரி i-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் சரி.

$$\therefore \quad \varphi(N) = N\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_k}\right) \quad \|$$

8·5·3. கிளைத்தேற்றம்

$N = p^{\alpha}$, p பகா எண் என்றால், மேற்கண்ட தேற்றத்தின் படி $\varphi(N) = N\left(1-\frac{1}{p}\right) = p^{\alpha}\left(1-\frac{1}{p}\right)$

8·5·4. தேற்றம் 15

$$(m, n) = 1 \Longrightarrow \varphi(m\,n) = \varphi(m)\cdot\varphi(n)$$

நிறுவல்

$m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$

$n = q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \cdots q_l^{\beta_l}$ என்க.

p-க்களும், q-க்களும் பகா எண்கள்.

$(m, n) = 1$ என்பதால் m-க்கும், n-க்கும் பொதுவான காரணிகள் இல்லை.

$\therefore$ p-க்களும், q-க்களும் வெவ்வேறானவை.

$$\therefore \quad mn = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} \cdot q_1^{\beta_1} \cdot q_2^{\beta_2} \dots q_l^{\beta_l}$$

$$\therefore \quad \varphi(m\,n) = m\,n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \left(1 - \frac{1}{q_1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{q_l}\right)$$

$$= \left[m \left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \right] \left[n \left(1 - \frac{1}{}\right) \left(1 - \frac{1}{q_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{q_l}\right) \right]$$

$$= \varphi(m) \cdot \varphi(n)$$

$$\therefore \quad \varphi(m\,n) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$$

குறிப்பு

$(m, n) = 1$ என்பதன் அவசியத்தை இன்னும் விளக்கமாகக் கீழே விவரிப்போம்.

$(m, n) \neq 1$ என்றால் m-க்கும் n-க்கும் 1 ஐத் தவிரப் பொது வான காரணிகள் உண்டு எனப் பொருள்.

உதாரணமாக, $p_i = p_j$ என்று வைத்துக் கொள்வோம்.

$1 < i \leq k, \; 1 < j \leq l$

$$\therefore \quad m\,n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \dots p_i^{\alpha_i} \dots p_k^{\alpha_k} q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \dots q_j^{\beta_j} \dots q_l^{\beta_l}$$

$$= p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \dots p_i^{(\alpha_i + \beta_j)} \dots\dots\dots\dots p_k^{\alpha_k} \cdot q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2}\, q_{j-1}^{\beta_{j-1}} \cdot q_{j+1}^{\beta_{j+1}} \dots q_l^{\beta_l} \quad (p_i = q_j)$$

இதில் p_i-ன் அடுக்கு கூட q_j மறைந்து விட்டது.

$$\therefore \quad \varphi(mn) = mn\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_i}\right)$$

$$\cdots\left(1-\frac{1}{p_k}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{q_1}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{q_{j-1}}\right)\left(1-\frac{1}{q_{j+1}}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{q_l}\right)$$

$$= \left[m\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_i}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_k}\right)\right]$$

$$\left[n\left(1-\frac{1}{q_1}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{q_{j-1}}\right)\left(1-\frac{1}{q_{j+1}}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{q_l}\right)\right]$$

வலப் பக்கத்தில் முதல் அடைப்புக் குறிகளிலுள்ளது. $\varphi(m)$ ஆனால் இரண்டாவது அடைப்புகளில் உள்ளது $\varphi(n)$ அல்ல; ஏனெனில் $\left(1-\frac{1}{q_j}\right)$ இல்லையே.

$$\therefore \quad \varphi(mn) \neq \varphi(m)\cdot\varphi(n)$$

8·5·5. மாதிரிக் கணக்கு

$\varphi(360)$, $\varphi(739)$, $\varphi(625)$ - இவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

$360 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5$

$$N = p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdots \Longrightarrow \varphi(N) = N\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots$$

$$\therefore \quad \varphi(360) = 360\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)$$

$$= 360 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3}$$

$$= \mathbf{96}.$$

739 ஒரு பகா எண். p ஒரு பகா எண் $\Longrightarrow \varphi(p) = p\left(1 - \frac{1}{p}\right)$

$$\varphi(739) = 739\left(1 - \frac{1}{739}\right) = 738.$$

$625 = 5^3$ p பகா எண் $\Longrightarrow \varphi(p^\alpha) = p^\alpha\left(1 - \frac{1}{p}\right)$

$$\varphi(625) = \varphi(5^3) = 5^3\left(1 - \frac{1}{5}\right) = 625 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)$$

$$= \mathbf{500}.$$

N-க்குங் குறைந்தும், N-க்குப் பகா எண்களுமான எல்லா எண்களின் கூட்டுத் தொகை $\frac{1}{2} N \varphi(N)$

விடை

N-க்குப் பகா எண் p என்ருல், $N - p$-ம் N-க்குப் பகா எண்.

N-க்குக் குறைந்த பகா எண்களின் எண்ணிக்கை $\varphi(N)$. $\varphi(N) = k$ என்க. இவற்றை ஏறுவரிசையில் $p_1, p_2, \ldots, p_k$ என்று எழுதவும்.

$\therefore$ $N - p_1$, $N - p_2$, ..., $N - p_k$ என்பவையும் N-க்குக் குறைந்த அதே பகா எண்கள்தாம். இவை இறங்கு வரிசையில் இருப்பன.

$S = p_1 + p_2 + \cdots + p_k$ என்ருல்

$$S = N - p_1 + N - p_2 + \cdots + N - p_k$$

கூட்டினுல் $2S = N + N + \cdots + N$ (k தடவைகள்).

$$= k\ N$$

$$S = \frac{k}{2} N$$

$$= \frac{1}{2} N \varphi (N)$$

8·6. ஒரு மெய்யெண்ணின் முழுப்பாகம்

மெய்யெண் $\frac{a}{b}$ -ன் முழுப்பாகத்தை $I\left(\frac{a}{b}\right)$ என்றும் $\left[\frac{a}{b}\right]$ என்றும் குறியிடுவர்.

$N = \frac{17}{7}$ என்பதை $2 + \frac{3}{7}$ என்று எழுதினல், $0 < \frac{3}{7} < 1$.

$\therefore$ $\frac{3}{7}$ ஐ N-ன் பின்னப் பகுதி என்றும், 2ஐ, N-ன் முழுப்பகுதி என்றும் சொல்லுவர்.

இதனை $I\left(\frac{17}{7}\right) = 2$ என்பர். இதேபோல் $I(7) = 7$.

$\frac{4}{5} = 0 + \frac{4}{5}$ $\quad \therefore \quad I\left(\frac{4}{5}\right) = 0$

$$-2\frac{1}{2} = -3 + \frac{1}{2}, 0 < \frac{1}{2} < 1$$

$$I\left(-2\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

8·6·1. வரை இலக்கணம்

$\frac{a}{b} = m + f,\ 0 < f < 1,\ m$ முழு எண் என்ருல் $I\left(\frac{a}{b}\right) = m$.

8·6·2. தேற்றம் 16

$a_1, \dots, a_n \in \mathbf{Z}^+$ என்ருல்,

$$s = a_1 + a_2 + \dots + a_n \Longrightarrow I\left(\frac{s}{b}\right) \geq I\left(\frac{a_1}{b}\right) + I\left(\frac{a_2}{b}\right) + \dots + I\left(\frac{a_n}{b}\right)$$

நிறுவல்

$\frac{a_r}{b} = m_r + f_r$ என்க. $(0 < f_r < 1), r = 1, 2, ..., n$

$$I\left(\frac{a_r}{b}\right) = m_r$$

$I = m_1 + ... + m_n$, $F = f_1 + ... + f_n$ என்க.

$$\therefore \quad \frac{a_1}{b} = m_1 + f_1, \quad 0 < f_1 < 1, \; I\left(\frac{a_1}{b}\right) = m_1$$

$$\frac{a_2}{b} = m_2 + f_2, \quad 0 < f_2 < 1, \; I\left(\frac{a_2}{b}\right) = m_2$$

$$\frac{a_3}{b} = m_3 + f_3, \quad 0 < f_3 < 1, \; I\left(\frac{a_3}{b}\right) = m_3$$

$$\frac{a_n}{b} = m_n + f_n, \quad 0 < f_n < 1, \; I\left(\frac{a_n}{b}\right) = m_n$$

கூட்டினுல்,

$$\frac{1}{b}(a_1 + ... + a_n) = (m_1 + ... + m_n) + (f_1 + ... + f_n)$$

$$\frac{s}{b} = I + F.$$

$F < 1$ அல்லது $F \geqq 1$ என்பவை சாத்தியம் அல்லது நிகழக் கூடியவை.

$F < 1$ என்ருல், $I\left(\frac{s}{b}\right) = I$

$$= m_1 + ... + m_n$$

$$= I\left(\frac{a_1}{b}\right) + ... + I\left(\frac{a_n}{b}\right)$$

$$F = 1 \implies \frac{s}{b} = I + 1.$$

$$\implies I\left(\frac{s}{b}\right) > I$$

$$F > 1 \implies F = 1 + f,\ 0 < f < 1 \text{ என்க.}$$

$$\implies \frac{s}{b} = I + 1 + f$$

$$\implies I\left(\frac{s}{b}\right) = I + 1 > I$$

$$\therefore\ F \geqq 1 \implies I\left(\frac{s}{b}\right) > I$$

$$\implies I\left(\frac{s}{b}\right) > I\left(\frac{a_1}{b}\right) + \dots + I\left(\frac{a_n}{b}\right)$$

$$\therefore\ I\left(\frac{s}{b}\right) \geqq I\left(\frac{a_1}{b}\right) + \dots + I\left(\frac{a_n}{b}\right)$$

8·6·3. தேற்றம் 17

$\underline{|n}$-ல் இருக்கும் பகா எண் p-ன் மீப்பெரிய அடுக்காவது $I\left(\frac{n}{p}\right) + I\left(\frac{n}{p^2}\right) + I\left(\frac{n}{p^3}\right) + \dots$ என்பதாகும்.

நிறுவல்

$$\left.\begin{array}{l} \angle n = 1\times2\times3\times4\times\dots\times n \\ p \text{ ஒரு பகா எண் } < n \end{array}\right\} \text{ கொடுக்கப்பட்டிருப்பவை.}$$

$\angle n$-ல் p ஐ ஒரு தடவையாவது காரணியாகக் கொண்ட எண்கள்

$$p,\ 2p,\ \dots,\ I\left(\frac{n}{p}\right)\cdot p\ \dots \qquad \dots (1)$$

(1)-ல் p^2 ஐக் காரணியாகக் கொண்டவை

$$p^2, 2p^2, \ldots, I\left(\frac{n}{p^2}\right) \cdot p^2 \ldots \qquad \ldots (2)$$

(2)-ல் p^3 ஐக் காரணியாகக் கொண்டவை

$$p^3, 2p^3, \ldots, I\left(\frac{n}{p^3}\right) \cdot p^3 \ldots \qquad \ldots (3)$$ முதலியன.

(2)-ல் உள்ள எண்கள் ஒவ்வொன்றிலும் p^2 ஒரு காரணியாய் உள்ளது. ஆனால் இவை (1)-ல் ஏற்கெனவே வந்து விட்டன.

இதேபோல் (3)-ல் உள்ள எண்கள் ஒவ்வொன்றிலும் p^3 ஒரு காரணி. ஆனால் இவை (1)-லும் (2)-லும் ஒரு தடவை வந்து விட்டன.

$\therefore$ $\underline{|n}$-ல் p-ன் மீப்பெரிய அடுக்கு

$$I\left(\frac{n}{p}\right) + I\left(\frac{n}{p^2}\right) + I\left(\frac{n}{p^3}\right) + \ldots$$

8·6·4. தேற்றம்

எவையேனும் r அடுத்தடுத்துத் தொடர்ச்சியாய் வரும் முழு எண்களின் பெருக்கத்தை (product) $\underline{|r}$ வகுக்கிறது.

நிறுவல்

இந்த r அடுத்தடுத்த தொடர்ச்சி முழு எண்களை (Consecutive Integers)

$(n+1), (n+2), \ldots, (n+r)$ என்க.

நிறுவ வேண்டியது : $\underline{|r} \mid (n+1)(n+2)\ldots(n+r)$

$$(n+1)(n+2)\ldots(n+r) = \frac{\underline{|n+r}}{\underline{|n}}$$

$$\therefore \quad \frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+r)}{\underline{|r}} \text{ அதாவது, } \frac{\underline{|n+r}}{\underline{|n}\;\underline{|r}}$$

என்பது ஒரு முழு எண் என்று காண்பித்தால் போதும்; அல்லது $\underline{|n+r}$-ல் யாதேனுமொரு பகா எண் p-ன் மீப்பெரிய அடுக்கு k என்றும், அதே p-ன் மீப்பெரிய அடுக்கு $\underline{|n}\;\underline{|r}$-ல் l என்றும் கொண்டால் $k \geq l$ என்று நிறுவினால் போதும். அப்பொழுதுதான்

$\frac{p^k}{p^l}$ ஆனது முழு எண்ணாகும். $\lfloor n+r$, $\lfloor n$ $\lfloor r$ என்பவற்றை; ஒவ்வொன்றையும் பகா எண்களின் பெருக்கமாக எழுதவும்.

சென்ற தேற்றத்தின்படி $\lfloor n+r$-ல் யாதாவதொரு பகா எண் p-ன் மீப்பெரிய அடுக்கு

$$k = I\left(\frac{n+r}{p}\right) + I\left(\frac{n+r}{p^2}\right) + \cdots$$

$\angle n$ $\angle r$-ல் p-ன் மீப்பெரிய அடுக்கு

$$l = \left\{ I\left(\frac{n}{p}\right) + I\left(\frac{n}{p^2}\right) + \cdots \right\} + \left\{ I\left(\frac{r}{p}\right) + I\left(\frac{r}{p^2}\right) + \cdots \right\}$$

ஆனால் $I\left(\frac{n+r}{p}\right) \geqq I\left(\frac{n}{p}\right) + I\left(\frac{r}{p}\right)$ (தேற்றத்தின் படி)

$I\left(\frac{n+r}{p^2}\right) \geqq I\left(\frac{n}{p^2}\right) + I\left(\frac{r}{p^2}\right)$ முதலியன.

கூட்டினால்

$$I\frac{(n+r)}{p} + I\frac{(n+r)}{p^2} + \cdots \geqq I\left(\frac{n}{p}\right) + I\left(\frac{n}{p^2}\right) + \cdots + I\left(\frac{r}{p}\right) + I\left(\frac{r}{p^2}\right) + \cdots$$

அதாவது $k \geqq l$

$\therefore$ $\lfloor n$ $\lfloor r$ ஐப் பகா எண்களின் பெருக்கமாக எழுதினால் ஒவ்வோர் அடுக்கும் $\lfloor n+r$-ன் அதற்கேற்ற அடுக்கை வகுக்கும்.

$\therefore$ $\frac{\lfloor n+r}{\lfloor n}$ என்பது முழு எண்.

8·6·5. தேற்றம்

p ஒரு பகா எண், $\Longrightarrow p \mid p\,C_r$ $(1 \leqq r < p)$

நிறுவல்

$m = (p-1)(p-2)\ldots(p-r+1)$ என்க.

$$pc_r = \frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-r+1)}{\underline{|r}}$$

$$= \frac{pm}{\underline{|r}}$$

சென்ற தேற்றத்தின்படி, $\underline{|r} \mid p(p-1) \ldots (p-r+1)$

$$\Longrightarrow \frac{p(p-1) \ldots (p-r+1)}{\underline{|r}} \text{ என்பது முழு எண்.}$$

$$\Longrightarrow \frac{pm}{\underline{|r}} = \text{ஒரு முழு எண்.}$$

p ஒரு பகா எண், $p > r$ என்பதால், $(\underline{|r}, p) = 1$

$\therefore$ $\underline{|r}$ ஆனது p ஐ வகுக்காது.

$\therefore$ $\underline{|r}$ ஆனது m ஐ வகுக்க வேண்டும்.

$$\therefore \quad pc_r = p\left(\frac{m}{\underline{|r}}\right) = p \cdot (\text{ஒரு முழு எண்}) = M(p)$$

$\therefore$ $p \mid pc_r$.

8·6·6. தேற்றம் 19. ஃபார்மாவின் தேற்றம் (Fermat's Theorem)

p ஒரு பகா எண், p-க்கு n பகா எண் என்றால்,

$n^{p-1}-1$ ஐ p வகுக்கிறது.

குறியீட்டு முறையில், p ஒரு பகா எண், $(p, n) = 1 \Longrightarrow p \mid n^{p-1}-1$.

நிறுவல்

இதனை n-ன் மீது கணிதத் தொகுத்தறி முறையால் நிறுவலாம்.

$f(n) = n^p - n$ என்க.

$f(1) = 1^p - 1 = 0 = 0.\ p = M(p)$

$$f(2) = 2^p - 2 = (1+1)^p - 2$$

$$= (1 + pc_1 + pc_2 + \ldots + pc_{p-1} + 1) - 2$$

$$= pc_1 + pc_2 + \ldots + pc_{p-1}$$

$$= \sum_{r=1}^{p-1} pc_r$$

$$= M(p) \qquad \text{(தேற்றம் 18-ன் படி, } p \mid pc_r)$$

$$\therefore \quad f(1) = M(p),\ f(2) = M(p), \ldots$$

இப்பொழுது, கணிதத் தொகுத்தறி முறையின் எடுகோளாக,

$f(n) \quad = M(p)$ என்க.

$$f(n+1) = (n+1)^p - (n+1)$$

$$= (n^p + pc_1\, n^{p-1} + \ldots + pc_{p-1}\, n + 1) - (n+1)$$

$$= (n^p - n) + \sum_{r=1}^{p-1} pc_r\, n^{p-r}$$

$$= f(n) + M(p) \qquad \text{(தேற்றம் 18-ன் படி, } p \mid pc_r)$$

$$= M(p) + M(p)$$

$$= M(p)$$

$\therefore$ முடிவுள்ள எண்ணிக்கையுள்ள எல்லா n-க்கும்,

$$n^p - n \quad = M(p)$$

அதாவது, $n(n^{p-1} - 1) = M(p)$

தேற்றத்தின்படி, $(n, p) = 1, \ \therefore \ p \dagger n$

$\therefore \quad p \mid n^{p-1} - 1$

$\therefore \quad n^{p-1} - 1 = M(p)$

8·6·7. கிளைத் தேற்றம்

p ஒரு பகா எண் $\Longrightarrow p \mid n^p - n$

அதாவது, $n^p - n = M(p)$

நிறுவல்

தேற்றம் 19-ன் நிறுவலின் ஒரு பகுதி. (பயிற்சி)

8·6·8. மாதிரிக் கணக்குகள்

1. p ஓர் ஒற்றைப் பகா எண், $(n, p) = 1 \Longrightarrow n^{\frac{p-1}{2}} \pm 1 = M(p)$ என நிறுவுக.

விடை

p ஒற்றைப் பகா எண் என்பதால், $p = 2m + 1$ என்க.

$\therefore \quad p - 1 = 2m$

$\therefore$ பார்மாவின் தேற்றப்படி,

$n^{p-1} - 1 = M(p)$

அதாவது $n^{2m} - 1 = M(p)$

$(n^m - 1)(n^m + 1) = M(p)$

$\therefore \quad n^m - 1$ ஆவது, $n^m + 1$ ஆவது p-ன் மடங்கு

அதாவது, $n^m \pm 1 = M(p)$

அதாவது, $n^{\frac{p-1}{2}} \pm 1 = M(p)$

2. $\underline{|1000}$-ல் 7-ன் மீப் பெரிய அடுக்கு என்ன ?

விடை

$$\frac{1000}{7} = 142\,\frac{6}{7}\cdot$$

$I\left(\frac{1000}{7}\right) = 142$

$I\left(\frac{1000}{7^2}\right) = I\left(\frac{142}{7}\right) = 20$

$$I\left(\frac{1000}{7^3}\right) = I\left(\frac{20}{7}\right) = 2$$

$\therefore$ $\underline{|1000}$-ல் 7-ன் மீப்பெரிய அடுக்கு $= 142 + 20 + 2$
$= 164$

$\therefore$ $\underline{|1000}$-ஐ வகுக்கும் 7-ன் மீப்பெரிய அடுக்கு $= 7^{164}$

3. $\underline{|82}$ ஐச் சுருக்கி வரும் எண் எத்தனை பூச்சியங்களோடு முடிகிறது?

விடை

பூச்சியங்களோடு முடியும் எண்ணை, பகா எண்கள் 2-ம், 5-ம் வகுக்கின்றன. (மீதியில்லாமல்)

$\angle 82$-ல் 2-ன் மீப்பெரிய அடுக்கு:

$$I\left(\frac{82}{2}\right) = 41$$

$$I\left(\frac{82}{2^2}\right) = I\left(\frac{41}{2}\right) = 20$$

$$I\left(\frac{82}{2^3}\right) = I\left(\frac{20}{2}\right) = 10$$

$$I\left(\frac{82}{2^4}\right) = I\left(\frac{10}{2}\right) = 5$$

$$I\left(\frac{82}{2^5}\right) = I\left(\frac{5}{2}\right) = 2$$

$$I\left(\frac{82}{2^6}\right) = I\left(\frac{2}{2}\right) = 1$$

$\underline{|82}$-ல் 2-ன் மீப்பெரிய அடுக்கு $= 41 + 20 + 10 + 5 + 2 + 1$

$= 79$

இப்பொழுது, $\underline{|82}$-ல் 5-ன் மீப்பெரிய அடுக்கு :

$$I\left(\frac{82}{5}\right) = 16$$

$$I\left(\frac{82}{5^2}\right) = I\left(\frac{16}{5}\right) = 3$$

$\therefore$ $\underline{|82}$-ல் 5-ன் மீப்பெரிய அடுக்கு $= 16 + 3 = 19$.

$\underline{|82}$ ஐ வகுப்பது $2^{79} \cdot 5^{19} = 2^{19} \cdot 2^{60} \cdot 5^{19}$

$$= 10^{19} \cdot 2^{60}.$$

ஓர் எண்ணின் கடைசியில் n பூச்சியங்கள் இருந்தால், அந்த எண்ணை 10^n வகுக்கும்.

$\therefore$ $\underline{|82}$-ல் 10-ன் மீப்பெரிய அடுக்கு $= 19$

$\therefore$ $|82$-ன் மதிப்பின் கடைசியில் 19 பூச்சியங்கள் இருக்கின்றன.

4. n யாதாவதோர் ஒற்றை எண் என்றால், $24 \mid [n(n^2 - 1)]$ என்று காண்பிக்க.

விடை

n ஓர் ஒற்றை எண்ணாதலால்,

$n = 2m + 1$ என்க.

$$\therefore\ n(n^2 - 1) = n(n+1)(n-1)$$

$$= (2m+1)(2m+2)(2m+1-1)$$

$$= (2m+1)(2m+2)(2m)$$

$$= (2m+1) \cdot 2(m+1) \cdot 2 \cdot m$$

$$= 4m(m+1)(2m+1)$$

$$= 4m(m+1)\{(m-1)+(m+2)\}$$

$$= 4\{(m-1)m(m+1) + m(m+1)(m+2)\}$$

$(m-1), m, (m+1)$ என்பவை அடுத்தடுத்த தொடர் எண்கள்.

$$\therefore \quad \underline{|3}\,|\,(m-1)\,m\,(m+1)$$

$$\therefore \quad (m-1)\,m\,(m+1) = M(\underline{|3})$$

$$= M(6)$$

இதேபோல், $m(m+1)(m+2) = M(6)$

$$\therefore \quad n(n^2-1) = 4\{M(6) + M(6)\}$$

$$= 4\,M(6)$$

$$= M(24)$$

$$\therefore \quad 24 \mid n(n^2-1)$$

5. n ஓர் ஒற்றை எண் என்றால்,

$(n^2+3)(n^2+7) = M(32)$ என்று நிறுவுக.

விடை

n ஓர் ஒற்றை எண் என்பதால்,

$n = 2m + 1$ என்க.

$$n^2 + 3 = (2m+1)^2 + 3$$

$$= 4m^2 + 4m + 4$$

$$= 4(m^2 + m + 1)$$

$$n^2 + 7 = (2m+1)^2 + 7$$

$$= 4m^2 + 4m + 8$$

$$= 4(m^2 + m + 2)$$

$$\therefore \quad (n^2+3)(n^2+7) = 16(m^2+m+1)(m^2+m+2)$$

$$= 16\,k(k+1), \quad k = m^2+m+1$$

$k(k+1)$ என்பது அடுத்தடுத்த இரு தொடர் எண்களின் பெருக்கம்.

$\therefore \quad 2 \mid k(k+1) \qquad \therefore \quad k(k+1) = M(2)$

$\therefore \quad (n^2+3)(n^2+7) = 16\,M(2)$

$= M(32)$

6. $n^5 - n = M(30)$ என்று நிறுவுக.

விடை

தேற்றம் 19-ன் கிளைத் தேற்றத்தின்படி,

$n^5 - n = M(5)$

மேலும், $n^5 - n = n(n^4-1) = n(n^2-1)(n^2+1)$

$= n(n-1)(n+1)(n^2+1)$

$= [(n-1)n(n+1)][n^2+1]$

$= (n^2+1)M\,\lfloor 3 = (n^2+1)M(6)$

$= M(6)$

$\therefore \quad (n^5-n) = M(5), M(6), (5,6) = 1 \Longrightarrow n^5 - n = M(30)$

8·7. ஒருங்கிசைவுகள் (Congruences)

8·7·1. வரை இலக்கணம்

இரு முழு எண்கள் a ஐயும், b ஐயும் தனித்தனியே m என்ற எண்ணால் வகுக்க, ஒரே மீதிகள் கிடைக்குமானால், a, b எண்கள் 'm' மட்டைப் பொறுத்து ஒருங்கிசைவில் இருக்கின்றன என்போம்.

குறியீட்டு முறையில், $a \equiv b \pmod{m}$

இதனை, 'a ஒருங்கிசைவு b, மட்டு m' என்று படிக்கவும்.

உதாரணங்கள்

1. 93 ஐ 13 ஆல் வகுக்க மீதி 2

28 ஐ 13 ஆல் வகுக்க மீதி 2.

$\therefore \quad 93 \equiv 28 \pmod{13}$

அல்லது, $28 \equiv 93 \pmod{13}$ என்றும் எழுதலாம்.

2. 8 ஐ 2ஆல் வகுக்க மீதி 0.

0 ஐ 2ஆல் வகுக்க மீதி 0.

$\therefore \quad 8 \equiv 0 \pmod 2$

பொதுவாக, $a \equiv 0 \pmod m \Longrightarrow m \mid a$.

அல்லது, $a = M(m)$

8·7·2. தேற்றம் 20

$$a \equiv b \pmod m \Longleftrightarrow (a - b) \equiv 0 \pmod m$$

நிறுவல்

பாகம் 1 ($\Longrightarrow$)

$a \equiv b \pmod m$ என்க.

$\therefore \quad a = q\ m + r, \quad 0 < r < m$

$b = q'\ m + r, \quad 0 < r < m$ (வரை இலக்கணம்)

கழித்தால்,

$$a - b = (q - q')\ m$$
$$= M(m)$$

$\therefore \quad a - b \equiv 0 \pmod m$

$a \equiv b \pmod m \Longrightarrow a - b \equiv 0 \pmod m$

பாகம் 2 ($\Longleftarrow$)

$a - b \equiv 0 \pmod m$ என்க. அதாவது $a - b = M(m)$

நிறுவல்

$$\left.\begin{array}{ll} a = q\ m + r & 0 < r < m \\ b = q'\ m + r' & 0 < r' < m \end{array}\right\}$$ என்க.

கழித்தால், $a - b = m(q - q') + (r - r')$

தற்கோளின்படி, $a - b = m(m)$ என்பதால், $r - r' = 0$

$\therefore \quad r = r'$

$\therefore$ (1)-ம், (2)-ம்,

$a = qm + r, \quad b = q'm + r$ என்றுகின்றன.

$\therefore$ வ.இ. படி, $a \equiv b \pmod{m}$

8·7·3. தேற்றம் 21.

$a_1 \equiv b_1 \pmod{m}, \quad a_2 \equiv b_2 \pmod{m}$

$$\Longrightarrow a_1 a_2 \equiv b_1 b_2 \pmod{m}$$

நிறுவல்

$a_1 \equiv b_1 \pmod{m}, \quad a_2 \equiv b_2 \pmod{m}$

$$\Longrightarrow a_1 - b_1 \equiv 0 \pmod{m}, a_2 - b_2 \equiv 0 \pmod{m}$$

$$\Longrightarrow a_1 - b_1 = km, \quad a_2 - b_2 = lm, \quad k, l \in \mathbf{Z}$$

$$a_1 a_2 - b_1 b_2 = a_1 (a_2 - b_2) + b_2 (a_1 - b_1)$$

$$= a_1 lm + b_2 km$$

$$= m(a_1 l + b_2 k)$$

$$= M(m)$$

$\therefore \quad a_1 a_2 - b_1 b_2 = 0 \pmod{m}$

$$\Longrightarrow a_1 a_2 \equiv b_1 b_2 \pmod{m}$$

8·7·4. கிளைத்தேற்றம் 1.

$a_r \equiv b_r \pmod{m}. \quad r = 1, 2, \ldots, n$

$$\Longrightarrow a_1 \cdot a_2 \ldots a_n \equiv b_1 b_2 \ldots b_n \pmod{n}$$

நிறுவல்

பயிற்சியாய் விடப்பட்டது.

8 7·5. கிளைத்தேற்றம் 2

$a \equiv b \pmod{m} \Longrightarrow a^n \equiv b^n \pmod{m}$

8·7·6. கிளைத்தேற்றம் 22

$q, r \in \mathbf{Z}, \quad a_1 \equiv b_1 \pmod{m}, a_2 \equiv b_2 \pmod{m}$

$$\Longrightarrow qa_1 + ra_2 \equiv (qb_1 + rb_2) \pmod{m}$$

நிறுவல்

$$a_1 \equiv b_1 \pmod{m} \Longrightarrow a_1 - b_1 = km$$
$$a_2 \equiv b_2 \pmod{m} \Longrightarrow a_2 - b_2 = lm$$

$$qa_1 + ra_2 = q(km + b_1) + r(lm + b_2)$$
$$= qb_1 + rb_2 + m(qk + rl)$$
$$= qb_1 + rb_2 + M(m)$$

$$\therefore \quad qa_1 + ra_2 \equiv (qb_1 + rb_2) \pmod{m}$$

8·7·7. கிளைத்தேற்றம் 1

$$a_1 \equiv b_1 \pmod{m},\ a_2 \equiv b_2 \pmod{m}$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} a_1 + a_2 \equiv (b_1 + b_2) \pmod{m} \\ a_1 - a_3 \equiv (b_1 - b_2) \pmod{m} \end{cases}$$

நிறுவல்

மாணவர்க்குப் பயிற்சியாய் விடப்பட்டது.

குறிப்பு : ஒருங்கிசைவுக் குறியீட்டு முறையைப் பயன்படுத்தி, ∴பார்மாவின் தேற்றத்தை, 'p ஒரு பகா எண், $(n, p) = 1$

$$\Longrightarrow n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p},$$

(அல்லது) $n^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$'. என்று எழுதலாம்.

8·7·8. கிளைத்தேற்றம் 23

$$a \equiv b \pmod{m},\ (a; m) = 1 \Longrightarrow (b, m) = 1$$

நிறுவல்

$$a \equiv b \pmod{m} \Longrightarrow a - b = km$$
$$\Longrightarrow a = b + km$$

இப்பொழுது, a-க்கும், m-க்கும் பொதுவான காரணி s என்க.

$$\therefore \quad s \mid a \Longrightarrow s \mid (b + km)$$
$$\Longrightarrow s \mid b,\ s \mid km$$

$\therefore \quad s \mid m \Longrightarrow s \mid b$. $\quad \therefore$ b-க்கும், m-க்கும் பொதுவான காரணியும் s தான்.

ஆனால் தேற்றத்தின்படி, $(a, m) = 1 \quad \therefore \quad (b, m) = 1$.

8·7·9. கிளைத்தேற்றம்

a ஐ b ஆல் வகுக்க, மீதி r என்க.

$(a, b) \Longleftrightarrow (b, r) = 1$

நிறுவல்

பாகம் 1 ($\Longrightarrow$)

$a = bq + r, \quad 0 < r < b$ என்க.

a-க்கும், b-க்கும் பொதுவான காரணி t என்றால்

$a = tk, b = tl$ என்க.

$\therefore \quad r = a - bq = tk - tlq = t\,(k - lq)$

$\therefore \quad t$ என்பது r-ன் ஒரு காரணியுமாகும்.

$\therefore \quad (a, b) = 1 \Longrightarrow (b, r) = 1$

பாகம் 2 ($\Longleftarrow$)

$(b, r) = 1$ என்க.

$\therefore \quad a = bq + r, \quad 0 < r < b$

b-க்கும் r-க்கும் பொதுவான காரணி t என்க.

$\therefore \quad a = tk, \quad r = tl$

$\therefore \quad a = tkq + tl$

$= t\,(kq + l) = M\,(t) \quad \therefore \quad t$ என்பது a-ன் காரணியுமாகும்.

$\therefore \quad (b, r) = 1 \Longrightarrow (a, b) = 1.$

8·7·10. தேற்றம் 24

நேர் முழு எண்கள் a-ம், b-ம் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்கள் என்றால், $a, 2a, 3a, \ldots, (b-1)a$ என்ற எண்களை b ஆல் வகுத்தால் வரும் மீதிகள் எல்லாம் வெவ்வேறானவை, அல்லது சமமில்லாதவை.

மேலும் அந்த மீதிகள் ஏதோ ஒரு வரிசையில் $1, 2, \ldots, (b-1)$ என்பவை.

நிறுவல்

பாகம் 1

தேற்றம் சரியல்ல என்று வைத்துக் கொள்வோம்.

அப்படியானால், $a, 2a, \ldots, (b-1)\,a$ என்பவற்றுள் எவையேனும் இரு எண்கள் ra, sa என்பவற்றைத் தனித் தனியே b ஆல் வகுக்க, அவை ஒரே மீதிகளை உடையனவாய் இருக்கட்டும். $r > s$ என்க.

∴ ஒருங்கிசைவுக் குறியீட்டு முறையில்,

$ra \equiv sa \pmod b$

$\Longrightarrow ra - sa = M(b)$

$\Longrightarrow a(r-s) = M(b)$ ... (1)

$\Longrightarrow b \mid a$ அல்லது, $b \mid r-s$

$r < b,\ s > b \Longrightarrow (r-s) < b$

$\Longrightarrow b \dagger (r-s)$

∴ 1-ன் படி, $b \mid a$. இது தேற்றத்தின் $(a, b) = 1$ என்பதற்கு எதிர் மறுப்பு.

∴ மீதிகள் எல்லாமே வெவ்வேறானவை.

பாகம் 2

$a, 2a, \ldots, (b-1)\,a$ என்பவற்றுள் யாதாவதோர் எண் sa என்க.

$sa = bq + k,\ \ 0 < k < b$

$(a, b) = 1 \Longrightarrow (b, k) = 1$ (தேற்றம் 23-ன் கிளைத்தேற்றம்)

மேலும் $k < b$.

∴ மீதி k ஆனது b-க்குக் குறைந்த, b-க்குப் பகா எண்கள்.

ஆனால் b-க்குக் குறைந்த, b-க்குப் பகாவெண்கள் $1, 2, \ldots; b-1$
(∵ b, பகா எண்)

$\therefore$ k ஆனது 1, 2,..., $b-1$ என்பவற்றுள் ஓர் எண்.

இதுபோல் எல்லா மீதிகளும் ஏதோ ஒரு வரிசையில் 1, 2,..., $b-1$ என்பவைகளே.

8·7·11. ஃபார்மாத் தேற்றத்தின் பொதுவுரை (Generalisation of Fermat's Theorem)

(அல்லது) ஃபார்மாத் தேற்றத்தின் மிகை (Extension of Fermat's Theorem)

தேற்றம் 25

N என்பது யாதாவதோர் எண் என்றால்,

$$(a, N) = 1 \Longrightarrow a^{\varphi(N)} - 1 \equiv 0 \pmod N$$

நிறுவல்

N-க்குக் குறைந்த, N-க்குப் பகா எண்கள்

$b_1, b_2, \ldots, b_l$ என்க.

$l = \varphi(N)$

$ab_1, ab_2, \ldots, ab_l$ என்ற எண்களை N ஆல் வகுத்தால் வெவ்வேறான மீதிகள் கிடைக்கும். இந்த மீதிகள் ஏதோ ஒரு வரிசையில் $b_1, b_2, \ldots, b_l$ என்பவை. எப்படி ?

இந்த உண்மை தவறு என்று வைத்துக் கொண்டால்,

ab_r, ab_s $(b_r > b_s)$ என்ற இரு எண்கள் ஒரே மீதியைக் கொடுக்கட்டும்.

$$\therefore \quad ab_r \equiv ab_s \pmod N$$

$$\Longrightarrow ab_r - ab_s \equiv 0 \pmod N$$

$$\Longrightarrow a(b_r - b_s) \equiv 0 \pmod N$$

தேற்றத்தின்படி, $(a, N) = 1 \;\therefore\; N \dagger a$

மேலும் $b_r, b_s < N \Longrightarrow N \dagger b_r - b_s$

$$\therefore \quad a(b_r - b_s) \not\equiv 0 \pmod N$$

$\therefore$ ab_r, ab_s என்பவை வெவ்வேறான மீதிகளையே கொடுக்கின்றன.

ab_r ஐ N ஆல் வகுக்க, மீதி k_r என்க.

$\therefore$ $k_r < N$. மேலும் $(b_r, N) = 1, (a, N) = 1$ (தற்கோள்)

$\therefore$ $(ab_r, N) = 1$. $\therefore$ $(N, k_r) = 1$ (தேற்றம் 23-ன் கிளைத் தேற்றம்)

$\therefore$ $k_r < N,$ $(N, k_r) = 1$

ஆனால் N-க்குக் குறைந்த, N-க்குப் பகா எண்கள் ஆவன;

$b_1, b_2, \ldots, b_l$ என்ற $\varphi(N)$ எண்ணிக்கையுள்ள எண்கள்.

$\therefore$ k_r என்பது இந்த $\varphi(N)$ எண்களுள் ஓர் எண்.

$\therefore$ இந்த வரிசையில் எல்லா மீதிகளும் ஏதோ வரிசையில் $b_1, b_2, \ldots, b_l$ என்பவையே.

ab_r ஐ N ஆல் வகுக்க, மீதி k_r எனில்

$N \mid ab_r - k_r \Longrightarrow ab_r - k_r \equiv 0 \pmod N$

$\Longrightarrow ab_r \equiv k_r \pmod N$

$\therefore$ $ab_1 \equiv k_1 \pmod N$

$ab_2 \equiv k_2 \pmod N$

$\vdots$

$ab_l \equiv k_l \pmod N$

$\therefore$ $(ab_1)(ab_2)\ldots(ab_l) \equiv k_1 k_2 \ldots k_l \pmod N$

$\Longrightarrow a^l b_1 b_2 \ldots b_l \equiv b_1 b_2 \ldots b_l \pmod N$

$\Longrightarrow (b_1 \ldots b_l)(a^l - 1) \equiv 0 \pmod N$

$\Longrightarrow (b_1 \ldots b_l)(a^l - 1) = M(N)$

ஆனால் $b_1, \ldots, b_l$ என்பவை N-க்குப் பகா எண்கள்.

$\therefore$ $N \dagger b_1 \ldots b_l$ $\therefore$ $N \mid a^l - 1$

$\therefore \quad N \mid a^{\varphi(N)} - 1$

$\therefore \quad a^{\phi(N)} - 1 \equiv 0 \pmod{N}$

8·7·12. கிளைத்தேற்றம் (ஃபார்மாவின் தேற்றம்)

மேற்கண்ட தேற்றத்தில் N என்பது பகா எண்ணுனல்,

$\varphi(N) = N - 1$

$\therefore \quad a^{N-1} - 1 \equiv 0 \pmod{N}$ என்ற முடிவை அடைவோம்.

$\therefore$ N பகா எண், $(a, N) = 1 \Longrightarrow a^{N-1} - 1 \equiv 0 \pmod{N}$

இதுதான் ஃபார்மாவின் தேற்றம்.

8·7·13. மாதிரிக் கணக்குகள்

1. $16^{99} - 1 = M(437)$ என்று நிறுவுக.

விடை

$437 = 19 \times 23$

$$\therefore \quad \varphi(437) = 437\left(1 - \frac{1}{19}\right)\left(1 - \frac{1}{23}\right)$$

$$= 437 \cdot \frac{18}{19} \cdot \frac{22}{23} = 396.$$

ஆனல் $16^{99} = (2^4)^{99} = 2^{396} = 2^{\varphi(437)}$

மேலும் $(2, 437) = 1 \Longrightarrow 2^{\varphi(437)} - 1 \equiv 0 \pmod{437}$

($\therefore$ பார்மாவின் பொதுவுரை)

$\Longrightarrow 16^{99} - 1 \equiv 0 \pmod{437}$

2. $(a, 1365) = 1, \quad (b, 1365) = 1$ என்ருல்,

$a^{12} - b^{12} = M(1365)$ என்று நிறுவுக.

விடை

$1365 = 3 \times 5 \times 7 \times 13$

$\therefore$ 3, 5, 7, 13 என்ற எண்களுக்கு a-ம், b-ம் பகா எண்கள் ஆனால், $\therefore$ பார்மாவின் தேற்றம் : N பகா எண்,

$(a, N) = 1 \Longrightarrow a^{N-1} - 1 \equiv 0 \pmod N$

இதனை இங்கே தொடர்ச்சியாய்ப் பயன்படுத்துவோம்.

13 பகா எண், $(a, 13) = 1 \Longrightarrow a^{12} - = 1\ M(13)$ ... (1)

$a^{12} - 1 = (a^2)^6 - 1.\quad (a, 7) = 1 \Longrightarrow (a^2, 7) = 1$

$\therefore$ 7 பகாஎண், $(a^2, 7) = 1 \Longrightarrow (a^2)^6 - 1 = M(7)$

$\Longrightarrow a^{12} - 1 = M(7)$ ... (2)

$a^{12} - 1 = (a^3)^4 - 1\quad (a, 5) = 1 \Longrightarrow (a^3, 5) = 1$

$\therefore$ 5 பகா எண், $(a^3, 5) = 1 \Longrightarrow (a^3)^4 - 1 = M(5)$

$\Longrightarrow a^{12} - 1 = M(5)$ ... (3)

$a^{12} - 1 = (a^6)^2 - 1.\quad (a, 3) = 1 \Longrightarrow (a^6, 3) = 1$

3 பகா எண், $(a^6, 3) = 1 \Longrightarrow (a^6)^2 - 1 = M(3)$

$\Longrightarrow a^{12} - 1 = M(3)$ ... (5)

3, 5, 7, 13 என்பவை எல்லாமே a-க்குப் பகா எண்கள்.

$\therefore$ (1), (2), (3), (4) என்ற சமன்பாடுகளினின்று நாம் அறிவது,

$$a^{12} - 1 = M(13 \times 7 \times 5 \times 3)$$

$$\therefore\ a^{12} - 1 \equiv 0 \pmod{1365}$$

இதுபோல், $b^{12} - 1 \equiv 0 \pmod{1365}$

$$\therefore\ a^{12} - b^{12} \equiv 0 \pmod{1365}$$

$$\therefore\ a^{12} - b^{12} = M(1365)$$

3. m, n பகா எண்கள் என்றால், $m^{n-1} + n^{m-1} - 1 = M(mn)$ என்று நிறுவுக.

விடை

m பகா எண் $\Longrightarrow$ m-க்கு, 1, m என்பவைதாம் காரணிகள்.

n பகா எண் $\Longrightarrow$ n-க்கு, 1, n என்பவைதாம் காரணிகள்.

$\therefore \quad (m, n) = 1$

$\therefore$ பார்மாவின் தேற்றப்படி,

m பகா எண், $(m, n) = 1 \Longrightarrow m^{n-1} - 1 \equiv 0 \pmod{n}$

n பகா எண், $(n, m) = 1 \Longrightarrow n^{m-1} - 1 \equiv 0 \pmod{m}$

$\therefore \quad (m^{n-1} - 1)(n^{m-1} - 1) \equiv 0 \pmod{mn} \quad \because \quad (m, n) = 1$

அதாவது, $m^{n-1} n^{m-1} - \{ m^{n-1} + n^{m-1} - 1 \} = M(mn) \dots (I)$

ஆனால் $m \mid m^{n-1}$, $n \mid n^{m-1} \qquad \therefore \quad mn \mid m^{n-1} n^{m-1}$

$\therefore \quad (I)$-ல் $m^{n-1} + n^{m-1} - 1$ என்பதை mn வகுக்கவேண்டும்.

$\therefore \quad m^{n-1} + n^{m-1} - 1 = M(mn)$

4. n ஒரு பகா எண், $(n, N) = 1$ என்றால் $N^{n^3 - n^2} - 1$ என்பது n^3 ஆல் மீதியில்லாமல் வகுபடுகிறது என்பதை நிறுவுக.

நிறுவல்

$\therefore$ பார்மாவின் தேற்றப்படி,

$$N^{n-1} - 1 \equiv 0 \pmod{N}$$

அதாவது, $N^{n-1} - 1 = M(n)$

$$\Longrightarrow N^{n-1} - 1 = kn$$

$$\Longrightarrow N^{n-1} = 1 + kn$$

$$(N^{n-1})^n = (1 + kn)^n = 1 + n(kn) + n\,c_2\,(kn)^2 + \dots\dots k^n n^n$$

(n ஒரு நேர் முழு எண் $\therefore$ ஈருறுப்புக் கோவை

மேலும் $nc_2, nc_3, \ldots\ldots$ என்பவை முழு எண்கள்,

$$\therefore \quad N^{n^2-n} = 1 + kn^2 + M(n^2)$$

$$= 1 + M(n^2)$$

$$= 1 + ln^2$$

$$\left(N^{n^2-n}\right)^n = (1 + ln^2)^n = 1 + nc_1\,(ln^2) + nc_2\,(ln^2)^2 + \ldots\ldots + (ln^2)^n$$

$$= 1 + ln^3 + nc_2\, l^2 n^4 + \ldots\ldots;$$

$nc_2, nc_3, \ldots\ldots$ முழு எண்கள்.

$$\therefore \quad N^{n^3-n^2} = 1 + n^3\,\{l + nc_2\, l^2 + \ldots\ldots\}$$

$$= 1 + M(n^3)$$

$$\therefore \quad N^{n^3-n^2} - 1 = M(n^3)$$

5. p பகா எண், $(x, p) = 1 \Longrightarrow x^{p^2-p} - 1 = M(p^2)$ என்று நிறுவுக.

நிறுவல்

$\therefore$ பார்மாவின் தேற்றப்படி,

$$x^{p-1} - 1 = M(p)$$

$$\Longrightarrow x^{p-1} = 1 + kp \text{ என்க.}$$

$$(x^{p-1})^p = (1 + kp)^p$$

$$= 1 + pc_1 \cdot kp + pc_2\,(kp)^2 + \ldots\ldots + (kp)^p$$

(p நேர் முழு எண், $\therefore$ ஈருறுப்புக் கோவை)

$\therefore \quad pc_1, pc_2, \ldots\ldots, pc_r, \ldots\ldots$ என்பவை முழு எண்கள்.

$$\therefore \quad x^{p^2-p} = 1 + kp^2 + pc_2 k^2 p^2 + pc_3 k^3 p^3 + \ldots + k^p p^p$$

$$= 1 + p^2\,(k + k^2\, pc_2 + k^3\, pc_3\, p + \ldots\ldots)$$

$$= 1 + M(p^2)$$

$$\therefore \quad x^{p^2-p} - 1 = M(p^2)$$

6. 12 அடுக்குள்ள எந்த எண்ணும் 13 n அல்லது $13n+1$ என்ற உருமாதிரியில் இருக்கும் எனக் காண்பிக்க.

விடை

அம்மாதிரி எண் N என்க.

$(N, 13) = 1$ அல்லது $(N, 13) \neq 1$, இரண்டிலொன்று உண்மை.

$(N, 13) \neq 1$ என்க. N-க்கும், 13-க்கும் பொதுவான காரணி 1 ஐத் தவிர வேறு உண்டு. அது $k\ (\neq 1)$ என்க.

$\therefore\ k \mid N;\quad k \mid 13$

13, பகா எண் $\Longrightarrow k = 13$. $\therefore\ 13 \mid N\quad \therefore\ N = M(13)$

$\therefore\ N^{12} = [M(13)]^{12} = M(13) = 13n$. $\therefore\ N^{12} = 13n$

இப்பொழுது, $(N, 13) = 1$ என்க.

$$\begin{aligned} \therefore\ 13 \text{ பகாஎண்}, (N, 13) = 1 &\Longrightarrow N^{13-1} - 1 = M(13) \\ &\Longrightarrow N^{12} - 1 = M(13) \\ &\qquad\qquad\quad = 13n \\ &\Longrightarrow N^{12} = 13n + 1 \end{aligned}$$

7. $3^{4n+2} + 5^{2n+1} = M(14)$ என நிறுவுக.

விடை

$3^{4n+2} = 3^{4n} \cdot 3^2 = (3^4)^n \cdot 9 = 9\,(81)^n$

$= 9\,\{(14 \times 5) + 11\}^n$

$= 9\,\{(14 \times 5)^n + nc_1\,(14 \times 5)^{n-1} \cdot 11 + nc_2\,(14 \times 5)^{n-2} \cdot 11^2 + \ldots + 11^n\}$

$= 9\,\{M(14) + 11^n\}$

$= 9\,M(14) + 9 \cdot 11^n$

$= M(14) + 9 \cdot 11^n$

$$5^{2n+1} = 5 \cdot 5^{2n} = 5 \cdot (25)^n = 5 \{ 14 \times 1 + 11 \}^n$$

$$= 5 \{ M(14) + 11^n \}$$ முன்போல்

$$= 5 \cdot M(14) + 5 \cdot 11^n$$

$$= M(14) + 5 \cdot 11^n$$

$$\therefore \quad 3^{4n+2} + 5^{2n+1} = M(14) + 9 \cdot 11^n + M(14) + 5 \cdot 11^n$$

$$= M(14) + 11^n$$

$$= M(14)$$

8·7·14. வில்ஸனின் தேற்றம் (Wilson's Theorem)

தேற்றம் 26

m பகா எண் என்றால், $\underline{|n-1} + 1 \equiv 0 \pmod{n}$

நிறுவல்

$n = 2$ என்றால், $\underline{|n-1} + 1 = \underline{|2-1} + 1 = 2$

$2 \equiv 0 \pmod{2}$ என்பது இயற்கை.

$n = 3$ என்றால் $\underline{|3-1} + 1 = \underline{|2} + 1 = 3$

$\therefore \quad 3 \equiv 0 \pmod{3}$ என்பதும் இயற்கை.

n பகா எண் > 3 என்க.

(I) $1, 2, 3, \ldots, (n-1)$ என்கிற எண்களை எடுத்துக் கொள்க. இந்த எண்களுள் p என்பதும் ஓர் எண் என்க.

இப்பொழுது, $p \cdot 1, p \cdot 2, p \cdot 3, \ldots, p(n-1)$ என்ற எண்களைத் தனித்தனியே n ஆல் வகுக்க, வெவ்வேறு மீதிகள் கிடைக்கும் என நிறுவுவோம்.

அப்படி இல்லை எனில், pr, ps $(r > s)$ என்பவை ஒரே மீதிகளைத் தருவனவாய் இருக்கட்டும்.

$\therefore \quad pr \equiv ps \pmod{n}$

$\Longrightarrow (pr - ps) = 0 \pmod{n}$

$\Longrightarrow p\,(r - s) \equiv 0 \pmod n$

$\Longrightarrow n \mid p\,(r - s)$

ஆனால் $p < n \Longrightarrow n \dagger p$

$r < n;\ s < n \Longrightarrow r - s < n$

$\Longrightarrow n \dagger r - s$

$\therefore\ n \dagger p\,(r - s)$

$\therefore\ n \mid p\,(r - s)$ என்பது தவறு.

மீதிகள் வெவ்வேறானவை.

pr ஐ n ஆல் வகுக்க, மீதி k என்க.

$\therefore\ k < n$.

ஆனால் n-க்குக் குறைந்த எண்களாவன : $1, 2, \ldots, (n - 1)$

$\therefore\ k \in \{1, 2, \ldots, (n - 1)\}$

$\therefore$ மீதிகள் எல்லாமே, ஏதோ வரிசையில் $1, 2, \ldots, (n - 1)$ என்பவையே.

வெவ்வேறான மீதிகள் என்பதால், மீதி 1 வரவேண்டுமானால்,

$pp' \equiv 1 \pmod n$ என்றவாறு ஒவ்வொரு p-க்கும் ஒரே ஒரு p' தான் உள்ளது.

$p' = p$ என்றால் $p^2 \equiv 1 \pmod n$

$\Longrightarrow (p^2 - 1) \equiv 0 \pmod n$

$\Longrightarrow (p - 1)(p + 1) \equiv 0 \pmod n$

அதாவது $p - 1$ ஐயாவது, $p + 1$ ஐயாவது n வகுக்க வேண்டும்.

$p < n,\ \therefore\ n \mid (p - 1) \Longrightarrow p = 1$

$p < n,\quad n \mid (p + 1) \Longrightarrow p = n - 1$

p' ஆனது p-க்குச் சமமாக இருக்கவேண்டின், p-ன் ஒரே மதிப்புகள் 1-ம், $(n - 1)$-ம் ஆவன.

இவற்றை (I)-லிருந்து நீக்கிவிடுக.

(II) இப்பொழுது, $2, 3, \ldots, n-2$ என்ற எண்களுள் p ஓர் எண் என்ருல்,

$pp' \equiv 1 \pmod n$ என்றவாறு ஒரு $p' (\neq p)$, இந்த (II)-ல் உள்ளது. அதாவது, சமமற்ற இரு எண்களின் பெருக்கத்தை n ஆல் வகுத்தால் மீதி 1 வரக்கூடிய எண்கள் (II)-ல் உள்ளன. (II)-ல் $(n-3)$ எண்ணிக்கையுள்ள எண்கள் உள்ளன.

n ஒரு பகா எண் என்பதால், $n-3$ ஓர் இரட்டை எண்,

$\therefore$ $(n-3)$ இரட்டை எண்ணிக்கையுள்ள எண்களை, $pp' \equiv 1 \pmod n$ என்றவாறு, (p, p') ஜோடிகளாகப் பிரிக்கலாம்.

இந்த ஜோடிகளின் ஒருங்கிசைவுகளைப் பெருக்கினுல்,

$2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots (n-2) \equiv 1 \pmod n$ ... (1)

மேலும் $(n-1) \equiv -1 \pmod n$

அதாவது, $1 \cdot (n-1) \equiv -1 \pmod n$ ... (2)

(1) ஐயும், (2) ஐயும் பெருக்கினுல்

$1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-2)(n-1) \equiv -1 \pmod n$

$$\Longrightarrow \underline{|n-1} + 1 \equiv 0 \pmod n$$

8·7·15 வில்ஸனின் மறுதலை (Converse of Wilson's Theorem)

தேற்றம் 27

ஒரு முழு எண் n ஆனது

$\underline{|n-1} + 1 \equiv 0 \pmod n$ என்ருல், n ஒரு பகா எண் ஆகும்.

நிறுவல்

தேற்றம் உண்மை அல்ல என்ருல், n ஒரு பகுநிலை எண் என்று கொள்க.

அப்படியானுல் 1 ஐயும், n ஐயும் தவிர, $1 < p < n$ என்றவாறு n ஐ மீதி இல்லாமல் வகுக்கும் எண் p இருக்க வேண்டும்.

தேற்றத்தின் தற்கோள்படி, $n \mid \underline{|n-1} + 1$

ஆனுல் $p \mid n$

$\therefore \; p \mid \underline{|n-1} + 1$ ... (1)

$$1 < p < n \quad \therefore \; |\underline{n-1} = 1 \cdot 2 \ldots p \ldots (n-1)$$

$$\therefore \; p \mid |\underline{n-1} \qquad \ldots \quad (2)$$

சமன்பாடுகள் (1), (2)-லிருந்து நாம் அறிவது :

p ஆனது அடுத்தடுத்த இரு முழு எண்களை வகுக்கின்றது.

இது இயற்கைக்குப் புறம்பானது.

$\therefore$ n ஒரு பகா எண்ணேயாகும்.

8·7·16. வில்ஸனின் மிகை (Extension of Wilson's Theorem)

தேற்றம் 28

n ஒரு பகா எண் என்றால்,

$$|\underline{n-r} \; |\underline{r-1} + (-1)^{r-1} \equiv 0 \pmod{n}$$

நிறுவல்

வில்ஸன் தேற்றத்தின்படி,

$$|\underline{n-1} + 1 \equiv 0 \pmod{n}$$

$$(n-1)(n-2)\ldots(n-(r-1)) \; |\underline{n-r} + 1 \equiv 0 \pmod{n}$$

$$[M(n) + (-1)(-2)\ldots(-(r-1))] \; |\underline{n-r} + 1 \equiv 0 \pmod{n}$$

$$[M(n) + (-1)^{r-1} \, 1 \cdot 2 \ldots (r-1)] \; |\underline{n-r} + 1 \equiv 0 \pmod{n}$$

$$[M(n) + (-1)^{r-1} \; |\underline{r-1}] \; |\underline{n-r} + 1 \equiv 0 \pmod{n}$$

$$M(n) \; |\underline{n-r} + (-1)^{r-1} \; |\underline{r-1} \; |\underline{n-r} + 1 \equiv 0 \pmod{n}$$

இடப் பக்கக் கோவையை n வகுக்கிறது என்பது இதன் பொருள்.

$n \mid (m(n) \; |\underline{n-r})$ என்பது தெளிவு.

$$\therefore \; n \mid (-1)^{r-1} \; |\underline{r-1} \; |\underline{n-r} + 1$$

$$\therefore \; (-1)^{r-1} \; |\underline{r-1} \; |\underline{n-r} + 1 \equiv 0 \pmod{n}$$

இரு புறங்களையும் $(-1)^{r-1}$ ஆல் பெருக்கு.

$$\therefore \quad (-1)^{2r} \; |\underline{r-1} \; |\underline{n-r} + (-1)^{r+1} \equiv 0 \pmod{n}$$

$$|\underline{r-1} \; |\underline{n-r} + (-1)^{r-1} (-1)^2 \equiv 0 \pmod{n}$$

$$|\underline{n-r} \; |\underline{r-1} + (-1)^{r-1} \equiv 0 \pmod{n}$$

8·7·17. மாதிரிக் கணக்குகள்

1. n பகா எண், $r < n$ என்றால்

$$\left\{ |\underline{\tfrac{1}{2}(n-1)} \right\}^2 + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \equiv 0 \pmod{n}$$ என்று நிறுவுக.

விடை

வில்ஸனின் மிகைப்படி,

$$|\underline{n-r} \; |\underline{r-1} + (-1)^{r-1} \equiv 0 \pmod{n}$$

இதில் r-க்கு $\dfrac{n+1}{2}$ என்று பிரதியிடு.

$\left(n \text{ பகா எண் என்பதால், } \dfrac{n+1}{2} \text{ என்பது முழு எண்.}\right)$

$$\therefore \quad |\underline{n - \frac{(n+1)}{2}} \quad |\underline{\frac{n+1}{2} - 1} + (-1)^{\frac{n+1}{2} - 1} \equiv 0 \pmod{n}$$

$$|\underline{\frac{n-1}{2}} \quad |\underline{\frac{n-1}{2}} + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \equiv 0 \pmod{n}$$

$$\left[|\underline{\frac{n-1}{2}} \right]^2 + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \equiv 0 \pmod{n}.$$

2. $|\underline{28} + 233 = M\,(899)$ என்று நிறுவுக.

விடை

29 என்பது பகா எண்.

∴ வில்ஸன் தேற்றத்தின்படி,

$$\underline{|29-1} + 1 \equiv 0 \pmod{29}$$

$$\therefore \quad \underline{|28} + 1 \equiv 0 \pmod{29} \qquad \ldots (1)$$

மேலும் $232 \equiv 0 \pmod{29}$ ... (2)

(1) ஐயும் (2) ஐயும் கூட்டினால்,

$$\underline{|28} + 233 \equiv 0 \pmod{29} \qquad \ldots (3)$$

31 என்பது பகா எண்.

∴ வில்ஸன் தேற்றப்படி,

$$\underline{|31-1} + 1 \equiv 0 \pmod{31}$$

$$\underline{|30} + 1 \equiv 0 \pmod{31}$$

$$30, 29 \cdot \underline{|28} + 1 \equiv 0 \pmod{31}$$

$$(31-1)(31-2)\ \underline{|28} + 1 \equiv 0 \pmod{31}$$

$$[M(31) + (-1)(-2)]\ \underline{|28} + 1 \equiv 0 \pmod{31}$$

$$\underline{|28}\ M(31) + 2\ \underline{|28} + 1 \equiv 0 \pmod{31}$$

$$31 \mid (\underline{|28}\ M(31))$$

$$\therefore \quad 2\,\underline{|28} + 1 \equiv 0 \pmod{31} \qquad \ldots (4)$$

மேலும் $31 \equiv 0 \pmod{31}$ ... (5)

(4) ஐயும், (5) ஐயும் கூட்ட

$$2\,\underline{|28} + 32 \equiv 0 \pmod{31}$$

$$2\,(\underline{|28} +)\,16 \equiv 0 \pmod{31}$$

$(2..., 31) = 1. \quad \therefore \quad \underline{|28} + 16 \equiv 0 \pmod{31}$ ... (6)

மேலும் $217 \equiv 0 \pmod{31}$ ... (7)

(6) ஐயும் (7) ஐயும் கூட்ட

$\underline{|28} + 233 \equiv 0 \pmod{31}$ ... (8)

$\therefore$ (3)-ம் (8)-ம் இணைந்து, $\underline{|28} + 233 = M(31 \times 29)$

$= M(899)$

3. $4n + 1$ ஒரு பகா எண் என்றால், இந்த எண் $(\underline{|2n})^2 + 1$-ன் காரணியாக இருக்கும் என நிறுவுக.

விடை

வில்ஸன் தேற்றத்தின் மிகைப்படி,

n பகா எண், $r < n \Longrightarrow \underline{|n-r}\ \underline{|r-1} + (-1)^{r-1}$

$\equiv 0 \pmod{n}$

இந்தத் தேற்றத்தில், n-க்குப் பதில் $4n + 1$ ஐயும், r-க்குப் பதில் $2n + 1$ ஐயும் பிரதியிட்டால்,

$\underline{|(4n+1)-(2n+1)}\ \underline{|(2n+1)-1} + (-1)^{2n+1-1}$

$\equiv 0 \pmod{4n+1}$

$\underline{|2n}\ \underline{|2n} + 1 \equiv 0 \pmod{4n+1}$

$(\underline{|2n})^2 + 1 \equiv 0 \pmod{4n+1}$

4. p பகா எண் என்றால், $(2\,\underline{|p-3} + 1)$ ஐ p வகுக்கிறது என நிறுவுக.

விடை

வில்ஸனின் தேற்றத்தின்படி,

$\underline{|p-1} + 1 \equiv 0 \pmod{p}$

$\Longrightarrow (p-1)(p-2)\,\underline{|p-3} + 1 \equiv 0 \pmod{p}$

$$\Longrightarrow [M(p) + (-1)(-2)]\ \underline{|p-3} + 1 \equiv 0 \pmod p$$

$$\Longrightarrow M(p)\ \underline{|p-3} + 2\,\underline{|p-3} + 1 \equiv 0 \pmod p$$

$$\Longrightarrow p \mid (M(p)\ \underline{|p-3}) \quad \therefore \quad p \mid (2\,\underline{|p-3} + 1)$$

5. $\underline{|712} + 1 = M(719)$ என்று நிறுவுக.

விடை

வில்ஸன் தேற்றப்படி,

$$\underline{|719-1} + 1 \equiv 0 \pmod{719}$$

$$\underline{|718} + 1 \equiv 0 \pmod{719}$$

$$718 \cdot 717 \cdot 716 \cdot 715 \cdot 714 \cdot 713\ \underline{|712} + 1 \equiv 0 \pmod{719}$$

$$(719-1)(719-2)(719-3)(719-4)(719-5)(719-6)\ \underline{|712} + 1 \equiv 0 \pmod{719}$$

$$[M(719) + (-1)(-2)(-3)(-4)(-5)(-6)]\ \underline{|712} + 1 \equiv 0 \pmod{719}$$

$$M(719) + 720\ \underline{|712} + 1 \equiv 0 \pmod{719}$$

$$720\ \underline{|712} + 1 \equiv 0 \pmod{719} \qquad \ldots\ldots(1)$$

மேலும் $719 \equiv 0 \pmod{719}$ ......(2)

(1) ஐயும் (2) ஐயும் கூட்ட,

$$720\ \underline{|712} + 720 \equiv 0 \pmod{719}$$

$$720(\underline{|712} + 1) \equiv 0 \pmod{719}$$

$$719 \nmid 720. \quad \therefore \quad \underline{|712} + 1 \equiv 0 \pmod{719}$$

பயிற்சி

1. 560 என்ற எண்ணின் வகுப்பான்களின் எண்ணிக்கையையும், வகுப்பான்களின் கூட்டுத் தொகையையும் காண்க.

2. (i) 18 வகுப்பான்கள் (ii) 16 வகுப்பான்கள் —இவற்றை உடைய மீச்சிறிய எண் எது?

3. $\varphi(720), \varphi(233), \varphi(151), \varphi(5^2)$— இவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

4. 1-ம், N-ம் நீங்கலாக, N-ன் மற்ற வகுப்பான்கள் $d_1, d_2, \dots, d_r$ என்றால் $\varphi(d_1) + \varphi(d_2) + \dots + \varphi(d_r) = N$ என்பதை நிறுவுக.

5. $\underline{|95}$ ஆனது 22 பூச்சியங்களுடன் முடிகிறது என்று நிறுவுக.

6. எத்தனை பூச்சியங்களுடன் $\underline{|12}$ முடிவடைகிறது?

7. $(m, n) = 1$; $m, n \in \mathbf{Z}^+$ என்றால்,

$$\frac{\underline{|m+n-1}}{\underline{|m}\ \underline{|n}}$$ என்பது ஒரு முழு எண் என்று காண்பிக்க.

8. $m, n \in \mathbf{Z}^+$ என்றால்,

$$\frac{\underline{|2m}\ \underline{|2n}}{\underline{|m}\ \underline{|n}\ \underline{|m+n}} =$$ ஒரு முழு எண் என்று நிறுவுக.

9. $n(n-1)(n+25)(n+50) = M(24)$ என்று நிறுவுக.

10. $4n-1$ என்ற உருமாதிரியுள்ள பகா எண்கள் முடிவில்லாதவை என்று நிறுவுக.

11. $n > 1$ என்றால் $n^4 + 4$ ஒரு பகு நிலை எண் என்று காண்பிக்க.

12. $2^n + 1$ ஒரு பகா எண் என்றால், n ஆனது 2-ன் மடங்காயிருத்தல் வேண்டும் என்று காண்பிக்க.

13. $(10^n + 3 \times 4^{n+2} + 5) \equiv 0 \pmod 9$ என்று நிறுவுக.

14. $4^{2n+1} + 3^{n+2} = M(13)$ என்று நிறுவுக.

கீழ்க்கண்டவற்றை நிறுவுக.

15. $3^{2n-1} + 2^{n+1} = M(7)$

16. $19^{2n} - 1 = M(360)$

17. $13^{2n+1} + 9^{2n+1} = M(22)$

18. $n^7 - n = M(42)$

19. $(x, n) = 1, (y, n) = 1 \Longrightarrow x^{n-1} - y^{n-1} = M(n)$

20. $n^{13} - n = M(2730)$

21. $\underline{|28} \equiv 666 \pmod{899}$

22. $\underline{|18} + 1 \equiv 0 \pmod{437}$

23. $\underline{|10} + 111 = M(143)$

24. $\dfrac{\underline{|nr}}{\underline{|n}\,(\underline{|r})^n}$ = ஒரு முழு எண்

25. $5^{2n+2} - 24n - 25 = M(576)$

26. $\underline{|16} + 86 = M(323)$

27. $n > 3$ என்பது ஒரு பகா எண்ணானால்,
$n^{12} - 1 = (65520)$ என்று நிறுவுக.

28. p என்ற பகா எண்ணின் உருமாதிரி $4m - 1$ என்றால்,
$(\underline{|2m-1})^2 - 1 \equiv 0 \pmod p$ என்று காண்பிக்க.

29. அடுக்கு 8 உள்ள எந்த எண்ணும் $17m$ அல்லது $17m \pm 1$ என்ற உருமாதிரியில் இருக்கும் என்று நிறுவுக.

30. அடுக்கு 9 உள்ள ஓர் எண்ணின் உருமாதிரி $19m$ அல்லது $19m \pm 1$ என்று நிறுவுக.

31. $8^{n+1} - 7n + 41 = M(49)$ என்று நிறுவுக.

32. $47^{7386} \equiv 11 \pmod{19}$ என்று காண்பிக்க.

குறிகள், குறியீட்டு முறைகள்–பட்டியல்

(Index of Symbols and Notations)

கணவியல்

$A \subseteq B$	கணம் A ஆனது கணம் B-ன் உட்கணம்
$A \subset B$	கணம் A ஆனது கணம் B-ன் சரியான உட்கணம்.
$A \cup B$	கணங்கள் A, B-க்களின் கூட்டு.
$A \cap B$	கணங்கள் A, B-க்களின் இடைவெட்டு
$\emptyset$, { }	வெற்றுக் கணம்
$x \in A$	x ஆனது A-ல் இருக்கிறது, x ஆனது A-க்குச் சொந்தம்.
$x \notin A$	x ஆனது A-ல் இல்லை.
$x \in A \vee x \in B$	$x \in A$ அல்லது $x \in B$ அல்லது $x \in A, B$.
$x \in A \wedge x \in B$	x ஆனது A-க்கும் B-க்கும் சொந்தம்.
$A \cap B = \emptyset$	A-ம் B-ம் பொது உறுப்பிலிக் கணங்கள்.
$A - B$	B-ன் உறுப்புகள் அல்லாத A-ன் உறுப்பு களைக் கொண்ட கணம்.
U	பெருங்கணம்
A^1, A^c, $\tilde{A}$, $-A$	நிரப்பி கணம், A-ன் உறுப்புகள் அல்லாத பெருங்கணத்தின் உறுப்புகளைக் கொண்ட கணம்
$A \triangle B$	கணங்களின் சமச்சீர் வேறுபாடு.
$\{a\}$	ஓருறுப்புக் கணம்
$P(E)$	அடுக்குக் கணம்
$a \sim b$	a ஆனது b-க்குச் சமநிலைத் தொடர்பில் உள்ளது.
$a \mid b$	a ஆனது bஐ மீதியில்லாமல் வகுக்கிறது.
$a \dagger b$	a ஆனது bஐ மீதியில்லாமல் வகுக்கவில்லை.
$a \equiv b \pmod{n}$	a, ஒருங்கிசைவு b, மட்டு n
$A \times B$	கணங்கள் A, B-க்களின் கார்டீசியன் பெருக்கம்
$f: A \longrightarrow B$	A-லிருந்து B-க்குக் கோர்த்தல்
dom f	f-கோர்த்தலின் வரையறை அரங்கம்.
Ran f	f-கோர்த்தலின் வீச்செல்லை.

$a \overset{f}{\longmapsto} b$	f-கோர்த்தலின் கீழ் a-ன் எதிர் உரு b
(a, b)	a, b-க்களின் வரிசைப்பட்ட ஜோடி
f^{-1}	f-ன் நேர்மாறு கோர்த்தல்.
$f \cdot g$	கோர்த்தல்கள் f, g-க்களின் தொகுப்பு அல்லது சேர்க்கை.
$\mathbf{Q}$	விகிதமுறு எண்கள் கணம்
$\mathbf{R}$	மெய்யெண்கள் கணம்
$\mathbf{N}$	இயற்கை எண்கள் கணம்
$\mathbf{C}$	கலப்பெண்கள் கணம்
$\mathbf{Z}$	முழு எண்கள் கணம்
$\mathbf{Z}^+$	நேர் முழு எண்கள் கணம்
$\mathbf{Z}_e$	இரட்டை நேர் முழு எண்கள் கணம்
$\mathbf{Z}_o$	ஒற்றை நேர் முழு எண்கள் கணம்
$[a]$	a-ன் சமநிலை இனம்
$\mathbf{Z}_n$	முழு எண்கள், மட்டு n, கணம்
$+_n$	கூட்டல், மட்டு n
$\cdot_n$	பெருக்கல், மட்டு n
S_n	நேர் முழு எண்கள் 1, 2, ... n-ன் வரிசை மாற்றங்கள் கொண்ட கணம்.

குலங்கள்

$a * H$	உட்குலம் $(H, *)$-ன் துணைக் கணம்
cent G	குலம் $(G, *)$-ன் மையம்
e	குலத்தின் முற்றொருமை
$ker\ f$	செயல் மாற்றுக் கோர்த்தல் f-ன் உட்கரு
$o(G)$	குலம் $(G, *)$-ன் பரிமாண வரிசை
$(\mathbf{Z}_n, +_n)$	முழு எண்கள், மட்டு n, குலம்
$\simeq$	இயல் முறை மாறுத வகையில்
$J(\sqrt{2})$	$a + b\sqrt{2}$ உருமாதிரியுள்ள உறுப்புகளைக் கொண்ட ஒருமையுள்ள பரிமாற்றுக்குலம்
$\mathbf{Z}/_n$	$\{[0], \ldots\ldots [n-1]\}$, சமநிலை இனங்களின் கணம்

எண் அரங்கங்கள்

D_p	எண் அரங்கம் D-ன் நேர் உறுப்புகள் அமைக்கும் கணம்
$\|a\|$	a-ன் தனிப் பெறுமானம்

பல்லுறுப்புகள்

$R[X]$	தேராக் கணியம் x-ல், களம் R-ல் கெழுக்களைக் கொண்ட பல்லுறுப்புகள் கணம்.
$\deg f(x)$	பல்லுறுப்பு $f(x)$-ன் அடுக்கு.

வெக்டர் வெளிகள்

$V(F)$	களம் F-ன்மீது வரையறுக்கப்பட்ட வெக்டர்வெளி V
0	வெக்டர் வெளியின் முற்றொருமை
$\bar{0}$	களம் F-ன் முற்றொருமை
$\dim V$	வெக்டர்வெளி $V(F)$-ன் அளவு

அணிகள்

$(a_{ij})_{m\times n}$	$m \times n$ அணி
a_{ij}	i-ஆவது நிரையும், j-ஆவது நிரலும் கூடுமிடத்து உள்ள அணியின் உறுப்பு.
δ_{ij}	க்ரோநெக்கர் டெல்டா $= \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & t \neq j \end{cases}$
$[0]$	பூச்சிய அணி
I	ஒருமை அணி
$\tilde{A}$, A', A^T	அணி A-ன் இடமாற்ற அணி
$\bar{A}$	அணி A-ன் கலப்பு இணை
$(\bar{A})^T$, A^H, A^*	ஹெர்மீஷியன் அணி A
$\lvert A \rvert$, $\det A$	அணிக்கோவை A-ன் மதிப்பு
$adj\ A$	சேர்ப்பு அணி
A^C	அணி A-ன் இணைக்காரணி அணி
$t_r A$	அணியின் மூலைவிட்ட உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை.
$g{\cdot}c{\cdot}d$, $h{\cdot}c{\cdot}f$	மீப்பெரிய பொதுக் காரணி.
$\varphi(N)$	நேர் முழு எண் N-க்குக் குறைந்த, N-க்குப் பகா எண்களாயுமுள்ள நேர் முழு எண்களின் எண்ணிக்கை.
$\sigma(N)$	N-ன் வகுப்பான்களின் கூட்டுத்தொகை
$\nu(N)$	N-ன் வகுப்பான்களின் எண்ணிக்கை
$I\left(\frac{a}{b}\right)$, $\left[\frac{a}{b}\right]$	மெய்யெண் $\frac{a}{b}$-ன் முழுப் பாகம்.
$M(p)$	p-ன் மடங்கு.

BOOKS FOR REFERENCE

Roy Dubisch : Introduction to abstract Algebra, New York, Wiley, 1965.

I. N. Herstein : Topics in Algebra, New York, Blaisdell, 1964.

N. Jacobson : Lectures in Abstract Algebra, Vol. I, Basic Concepts Princeton, Van Nostrand, 1951.

N. McCoy : Introduction to Modern Algebra, Boston , Allyn & Bacon, 1965.

க. சிவசுப்ரமணியம் : நவ • இயற்கணிதம்—தமிழ்நாடு பாட நூல் நிறுவனம்—1971.

தனிக் கலைச்சொற்கள்

Null set	—	வெற்றுக் கணம்
Partition of a set	—	ஒரு கணத்தின் பிரிவினை
Disjoint sets	—	பொது உறுப்பிலிக் கணங்கள்
Operation	—	செயலி
Power set	—	அடுக்குக் கணம்
Singleton	—	ஓருறுப்புக் கணம்
Mapping	—	கோர்த்தல்
Into mapping	—	உள் கோர்த்தல்
Onto mapping	—	முழுக் கோர்த்தல்
(1-1) mapping	—	ஒன்றுக்கொன்றான கோர்த்தல்
Image	—	எதிர் உரு
Range set	—	வீச்செல்லைக் கணம்
Identity mapping	—	முற்றொருமைக் கோர்த்தல்
Mapping into itself	—	தன்னுள் கோர்த்தல்
Composition of mappings	—	கோர்த்தல்கள் தொகுப்பு
Composite mapping	—	சேர்க்கைக் கோர்த்தல்
Inverse mapping	—	நேர்மாறு கோர்த்தல்
Reflexive property	—	தானுதல் பண்பு
Symmetric property	—	சமச்சீர் பண்பு
Transitive property	—	செலுத்தும் பண்பு
Binary operation	—	ஈரிணைச் செயலி
Abstract	—	அருவம், சாரம்
Cyclic group	—	சக்கரக் குலம்
Cyclic permutation	—	சக்கர வரிசைமாற்றம்
Sub group	—	உட்குலம்
Representative	—	குறிப்பான்
Coset	—	துணைக் கணம்
Centre of a group	—	குலத்தின் மையம்
Homomorphism	—	செயல் மாற்றுக் கோர்த்தல்
Isomorphism	—	இயல் முறை மாற்றுக் கோர்த்தல்

Preserves	—	போற்றுகிறது, காக்கிறது
Field of quotients	—	ஈவுகள் களம்
Coefficient	—	கெழு
Leading coefficient	—	முக்கியக் கெழு
Monic polynomial	—	ஒன்றுக் கெழுப் பல்லுறுப்பு
Conformable for addition	—	கூட்டலுக்கு உகந்த
Conformable for multiplication	—	பெருக்கலுக்கு உகந்த
Formal	—	முறைமையான
Idempotent matrix	—	மாற்ரு அணி
Nil potent matrix	—	பூச்சிய மாற்று அணி
Eigen values	—	ஐகன் மதிப்புகள்
Extension of a theorem	—	ஒரு தேற்றத்தின் மிகை.